This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Stanford University Libraries
3 6105 027 647 168

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand. Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liége Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME IV. — ANNÉE 1894.

(TOME XIV DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1894

ABRÉVIATIONS.

B. B. Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

C. R. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

J. M. E. (ou J. M. S). Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER et par FUCHS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

STANFORD LIBRARY
OCT 21 1960

MATHESIS

SUR LE THÉORÈME DE D'ALEMBERT(*)

par V. JAMET, professeur au Lycée de Marseille.

Il s'agit du théorème classique : « *Toute équation algébrique, à coefficients réels ou imaginaires, a une racine, réelle ou imaginaire.* »

La démonstration *naturelle* de ce théorème est, sans contredit, celle qui résulte de la considération de l'intégrale d'une fonction d'une variable imaginaire : j'entends par là qu'elle se présente sans effort à l'esprit de toute personne familière avec la théorie de Cauchy. Mais, pour les besoins de l'enseignement, de nombreuses tentatives ont été faites dans le but de la ramener à des termes plus simples. Parmi les démonstrations contemporaines les plus connues, nous citerons celle de M. Walecki (*Comptes rendus, année* 1883), celle de M. Amigues (C. R., 1891), celle de M. Dutordoir (*Mathesis*, (1), III, *Supplément*).

On trouve également, dans le traité d'Algèbre de M. Niewenglowski,

---

(*) Cette désignation ne remonte qu'à une trentaine d'années. On ne la trouve ni chez Cauchy (*Analyse algébrique*), ni dans les traités de Bourdon, Lefébure, Choquet, Bertrand. Nous ignorons quel en est le premier auteur. Elle nous semble mal choisie. En effet, c'est Albert Girard qui, en 1629, a le premier *affirmé* qu'une équation de degré m, a m racines; d'Alembert, Euler, Foncenex, Lagrange, Laplace essayèrent vainement de démontrer cette proposition; Gauss, en 1799, 1815 et 1816 en donna trois démonstrations distinctes. Depuis lors, on en a publié environ soixante-dix, la plupart défectueuses selon nous, parce que l'on ne peut leur donner une forme purement arithmétique. Pour leur donner cette forme, il faut démontrer simultanément l'existence des m racines, ou si l'on établit l'existence d'une seule racine, prouver qu'elle est fonction continue des coefficients. — M. Gino Loria a donné un remarquable aperçu de toutes les démonstrations publiées jusqu'en 1891, dans la *Rivista di Matematica*, 1891, pp. 185-248, et dans la *Bibliotheca mathematica*, 1891, pp. 99-112 et 1893, pp. 47-50. Le n° de juin 1893 du *Bulletin scientifique* de M. Lebon, contient un nouvel essai de démonstration, dû à M. Jablonski. (P. M.)

L'opinion, très répandue en France, d'après laquelle la première démonstration du théorème est due à d'Alembert, a été accréditée par M. Laurent, qui, dans son *Traité d'Algèbre* (2e édition, p. 365), cite un passage de Gauss tendant à l'établir formellement. (V. J.)

une démonstration dans laquelle notre éminent collègue a très heureusement mis à profit les idées de M. Darboux sur les ensembles limités inférieurement ou supérieurement, pour vaincre une objection à laquelle donnaient lieu les démonstrations exposées dans des traités antérieurs. Le même traité d'Algèbre renferme, sur les séries à termes imaginaires, des notions, qui, nous l'espérons, seront suffisantes pour l'intelligence de ce qui va suivre, à condition que l'on sache également la forme, due à M. Darboux (*Journal de Liouville, continué par M. Resal, t. II, pages* 291-312), du reste de la série de Taylor, étendue aux fonctions de variables imaginaires. Dans le tome VI du journal *Mathesis* (1re *série*, 1886, *supplément*), M. Mansion a publié une étude sur la théorie des fonctions de variables imaginaires, où l'on trouve, outre la démonstration du théorème de M. Darboux, de nombreux renseignements sur les développements des fonctions en séries, renseignements utiles pour la lecture des pages qui vont suivre. Le théorème de M. Darboux consiste en ceci : *Si la fonction* $f(z)$ *a une suite indéfinie de dérivées successives, pour les valeurs de* z *comprises dans un espace contenant les points* z_0 *et* $z_0 + h$, *l'expression* $f(z_0 + h)$ *est développable par la série de Taylor, comme si* z_0 *et* h *étaient réelles, à condition que l'on remplace le terme complémentaire par*

$$\lambda \varepsilon^{\alpha i} \frac{h^n}{1.2.3\ldots(n-1)p}(1-\theta)^{n-p} f^n(z_0 + \theta h)$$

α *et* p *étant des quantités réelles,* λ *et* θ *étant elles-mêmes des quantités réelles, comprises entre* 0 *et* $+1$. De plus, p étant choisie arbitrairement, λ, α et θ sont déterminées. Dans ce qui va suivre, nous ferons simplement $p = 1$. Nous nous sommes inspiré, pour notre part, de la méthode suivie par Briot et Bouquet pour démontrer l'existence de l'intégrale d'une équation différentielle du premier ordre, et pour en déduire l'existence des fonctions implicites, en tâchant de suppléer, par le théorème de M. Darboux, aux connaissances que suppose la lecture de cette démonstration, si magistralement exposée, comme tant d'autres, dans l'ouvrage célèbre que ces auteurs ont consacré à la théorie des fonctions elliptiques.

1. Pour démontrer que toute équation algébrique, d'un degré donné, a une racine, nous pouvons admettre que le théorème est vrai pour toute équation algébrique de degré inférieur, et que par conséquent une telle équation a autant de racines, distinctes ou non, qu'il y a d'unités dans

son degré. Ainsi, ayant à étudier l'équation algébrique $F(z) = 0$, de degré m, nous pourrons admettre que l'équation dérivée a $m - 1$ racines, distinctes ou non.

Soit donc

$$F(z) \equiv z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \cdots + a_{m-1} z + a_m = 0 \qquad (1)$$

l'équation donnée, et soient

$$\lambda_1 + \mu_1 \sqrt{-1}, \quad \lambda_2 + \mu_2 \sqrt{-1}, \ldots \quad \lambda_{m-1} + \mu_{m-1} \sqrt{-1}$$

les racines de l'équation dérivée. Soit aussi

$$F(z' + h) \equiv \Phi(z') \equiv z'^m + a'_1 z'^{m-1} + a'_2 z'^{m-2} + \cdots + a'_m = 0$$

l'équation transformée par le changement de z en $z' + h$: soient aussi

$$\lambda'_1 + \mu'_1 \sqrt{-1}, \quad \lambda'_2 + \mu'_2 \sqrt{-1}, \ldots \quad \lambda'_{m-1} + \mu'_{m-1} \sqrt{-1}$$

les racines de l'équation $\Phi'(z') = 0$. Je dis qu'on peut choisir h de telle sorte que si

$$a'_1 = a' + b' \sqrt{-1},$$

on ait, quel que soit j :

$$a' + \lambda'_j > 0 \quad \text{et} \quad b' + \mu'_j > 0.$$

En effet,

$$a'_1 = mh + a_1, \quad \text{et si} \quad h = p + q \sqrt{-1},$$
$$\lambda'_j + \mu'_j \sqrt{-1} = \lambda_j - p + (\mu_j - q) \sqrt{-1}.$$

Si, d'autre part :

$$a_1 = a + b \sqrt{-1},$$

on a

$$a'_1 + \lambda'_j + \mu'_j \sqrt{-1} = a + (m-1)p + \lambda_j + [b + (m-1)q + \mu_j] i.$$

Il suffit donc que l'on ait, quel que soit j :

$$a + (m-1)p + \lambda_j > 0, \quad b + (m-1)q + \mu_j > 0,$$

chose toujours possible.

2. Supposons donc que, dans l'équation (1), on ait, quel que soit j

$$a + \lambda_j > 0, \quad b + \mu_j > 0;$$

faisons encore

$$z = z' + \rho(\cos\omega + i \sin\omega), \quad \rho(\cos\omega + i \sin\omega) = h$$

et proposons de déterminer ρ et ω de telle sorte que, dans l'équation transformée, le terme indépendant de z, savoir $F(k)$ ait un module moindre que la m^{me} puissance du module de toute racine de l'équation dérivée. Entre les carrés de ces modules, il doit y avoir la relation suivante :

$$\begin{aligned}&[\rho^m \cos m\omega + (a\cos(m-1)\omega - b\sin(m-1)\omega)\rho^{m-1} + \cdots]^2\\ &+ [\rho^m \sin m\omega + (a\sin(m-1)\omega + b\cos(m-1)\omega)\rho^{m-1} + \cdots]^2\\ &< [\rho^2 - 2(\lambda_j\cos\omega + \mu_j\sin\omega)\rho + \lambda_j^2 + \mu_j^2]^m,\end{aligned}$$

pour $j = 1, 2, 3, \ldots, m-1$. On peut transformer cette inégalité en une autre inégalité dont le premier membre soit un polynôme ordonné par rapport aux puissances décroissantes de ρ, et dont le premier terme sera

$$2[(a+\lambda_j)\cos\omega + (b+\mu_j)\sin\omega]\rho^{2m-1},$$

et ce polynôme devra être négatif. Or, le coefficient de ρ^{2m-1} sera négatif si ω est compris entre π et $\frac{3}{2}\pi$; car son sinus et son cosinus seront négatifs, et les coefficients $a+\lambda_j$, $b+\mu_j$ seront positifs. Donc on pourra trouver une longueur R telle que ce polynôme soit négatif, lorsque ρ sera supérieur ou égal à R.

On pourra aussi, sans que cette condition cesse d'être remplie, choisir ρ de telle sorte que, dans l'équation transformée, le coefficient analogue à a_{m-1} soit différent de zéro, et, par suite, que l'équation dérivée n'ait aucune racine nulle. Car ce coefficient, égal à $F'(k)$, se décompose en une partie réelle et une partie imaginaire, soit $P + Q\sqrt{-1}$, P, Q désignant deux polynômes entiers, de degré $m-1$ en ρ ; ω étant choisi, on pourra choisir ρ supérieur à toute racine commune aux deux équations $P = 0$, $Q = 0$, si toutefois elles ont des racines communes.

En résumé, si l'on écrit l'équation proposée comme il suit :

$$f(z) \equiv z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \cdots + a_{m-1} z = a,$$

et si l'on appelle ρ le module d'une quelconque des racines de l'équation dérivée, on peut faire les deux hypothèses suivantes : 1° module $a < \rho^m$ 2° a_{m-1} différent de 0, de telle sorte que l'équation $f'(z) = 0$ n'a pas de racine nulle.

3. Cela posé, proposons-nous de former une fonction z de la variable indépendante t, assujettie aux conditions suivantes : Quand le point t se

dirige en ligne droite du point 0 vers le point a, la fonction z vérifie l'équation $f(z) = t$, et reste finie et continue quand le point t décrit, sur sa trajectoire, une certaine longueur. Si cette longueur atteint ou dépasse le module de a (et nous verrons qu'elle la dépasse toujours), le théorème sera démontré dès que nous aurons formé cette fonction. Cherchons donc une fonction z, développable en une série de la forme

$$\alpha_0 t + \alpha_1 t^2 + \alpha_2 t^3 + \cdots$$

remplissant les conditions ci-dessus. S'il existe une telle série, ses coefficients seront les valeurs que prennent, pour $t = 0$, et par conséquent, pour $z = 0$, les dérivées successives de la fonction z cherchée, divisées, respectivement, par 1, 1.2, 1.2.3., ... Or, si l'on pose $\frac{1}{f'(z)} = F(z)$, ces dérivées doivent remplir les conditions suivantes :

$$\frac{dz}{dt} = F(z),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = F'(z)\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{d^3z}{dt^3} = F'(z)\frac{d^2z}{dt^2} + F''(z)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

. . . . . .

et ainsi de suite, au moyen desquelles on calculera les expressions de ces dérivées elles-mêmes en fonction de z, et par suite les coefficients α_0, α_1, α_2 .... Voyons maintenant à quelle condition on est sûr que la série entière ainsi formée est convergente. Soient $z_1, z_2, z_3 \ldots z_{m-1}$ les racines de l'équation $f'(z) = 0$, de telle sorte que

$$F(z) = \frac{1}{(-1)^{m-1} \cdot m\,(z_1 - z)(z_2 - z)(z_3 - z) \cdots (z_{m-1} - z)}.$$

Supposons les racines $z_1, z_2, \ldots z_{m-1}$ rangées d'après l'ordre de grandeur croissante de leurs modules, et soit ρ le module de z_1, module différent de zéro, d'après la remarque faite à la fin du n° précédent. Si nous observons que, pour toute valeur de z dont le module est inférieur à ρ, on a

$$\frac{1}{z_i - z} = \frac{1}{z_i} + \frac{z}{z_i^2} + \frac{z^2}{z_i^3} + \cdots$$

nous en conclurons, par la multiplication des séries, que $F(z)$ se développe en une série entière par rapport à z, série dont les coefficients successifs sont des fonctions entières, homogènes, de $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}, \dots \frac{1}{z_{m-1}}$. Dans chacune de ces fonctions, tous les termes sont précédés du signe $+$, et tous les termes de la série sont précédés du même signe. Les dérivées $F'(z)$, $F''(z)$... sont développables en des séries qui remplissent les mêmes conditions, et en vertu des formules ci-dessus, $\frac{d^p z}{dt^p}$ sera, quel que soit p, la somme d'un nombre limité de termes, égal, chacun, à la somme des produits de plusieurs séries absolument convergentes, remplissant les conditions ci-dessus. Chacun de ces produits sera égal à une certaine série, et l'on pourra, sans changer la somme d'une telle somme de séries, transformer cette somme unique en série ordonnée suivant les puissances croissantes de z; on trouvera une série dont les coefficients auront des modules plus petits que les nombres, réels et positifs, qu'on trouverait, en cherchant, par le même procédé, à développer en série, la dérivée p^{me} d'une fonction ζ, assujettie à remplir la condition

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{1}{m(\rho - \zeta)^{m-1}},$$

et à s'annuler avec t. Or il existe une fonction z, et une seule, qui vérifie l'équation ci-dessus, et qui s'annule avec t. En effet, toute fonction ζ qui doit vérifier cette équation, doit aussi vérifier la suivante

$$A - \frac{1}{m}(\rho - \zeta)^m = \frac{t}{m}$$

où A désigne une constante; et pour que ζ s'annule avec t, il faut qu'on ait $A = \frac{\rho^m}{m}$. Donc la fonction auxiliaire ζ est définie par l'équation

$$(\rho - \zeta)^m = \rho^m \left(1 - \frac{t}{\rho^m}\right),$$

d'où l'on conclut

$$\zeta = \rho \left(1 - \sqrt[m]{1 - \frac{t}{\rho^m}}\right);$$

et parmi les m déterminations du radical qui figure dans cette équation, il faut adopter celle qui est égale à 1, lorsque t est nulle; sans quoi ζ

ne serait pas nulle avec t. Mais la fonction ζ, ainsi définie, est développable en série convergente, et cela, d'une seule manière, pour toute valeur de t dont le module ne dépasse pas ρ^m et notamment pour $t = a$, comme il a été établi au n° 2. Les coefficients de ce développement sont (comme il est aisé de le vérifier) des nombres réels et positifs : d'ailleurs, ils sont, comme nous l'avons démontré, supérieurs aux modules des coefficients de la série que nous voulons former ; donc celle-ci est convergente pour ces mêmes valeurs de t.

4. Désignons désormais par z, ou par $\varphi(t)$, la somme de la série dont nous venons d'indiquer le mode de formation, et démontrons que cette fonction vérifie l'équation $f(z) = t$. Puisque cette fonction s'annule avec t, il suffit de démontrer qu'elle vérifie l'équation

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{f'(z)},$$

ou

$$\frac{dz}{dt} = \mathrm{F}(z).$$

A cet effet, cherchons s'il existe une fonction σ s'annulant avec t, et vérifiant l'équation

$$\frac{d\sigma}{dt} = \mathrm{F}(\varphi(t)).$$

Je dis que la fonction z, ou $\varphi(t)$, mise à la place de σ, remplit cette condition.

En effet, observons d'abord que, pour les valeurs de t dont il s'agit, $\mathrm{F}(\varphi(t))$ est développable en série entière. Car si, dans les expressions de ses dérivées successives, savoir :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{F}'(\varphi)\cdot\frac{d\varphi}{dt},\\
&\mathrm{F}'(\varphi)\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\mathrm{F}''(\varphi)\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2,\\
&\mathrm{F}'(\varphi)\frac{d^3\varphi}{dt^3}+3\mathrm{F}''(\varphi)\cdot\frac{d\varphi}{dt}\cdot\frac{d^2\varphi}{dt}+\mathrm{F}'''(\varphi)\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,
\end{aligned} \tag{3}$$

on fait $t = 0$, on retrouve les valeurs que prennent, à l'origine, les

dérivées de la fonction z, et l'on en conclut que l'application du théorème de Taylor à la fonction $F(\varphi(t))$ donne, pour le développement de celle-ci, exactement le développement de $\frac{dz}{dt}$, pourvu que le terme complémentaire tende vers zéro, lorsque son rang est de plus en plus élevé. Or, d'après le théorème de M. Darboux, ce terme a un module moindre que celui de l'expression suivante :

$$\frac{t^n}{1.2.3...(n-1)}(1-\vartheta)^{n-1} D^n[F(\varphi(\theta t))]$$

où θ est compris entre zéro et $+1$. Considérons la dérivée n^{me} qui figure dans cette expression comme formée au moyen de la suite (3).

Aux fonctions

$$F'(\varphi), \quad F''(\varphi), \quad \ldots \quad F^{(n-1)}(\varphi),$$

substituons les séries entières par rapport à φ, qui représentent ces fonctions; aux expressions

$$\frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad \ldots \quad \frac{d^{n-1}\varphi}{dt^{n-1}}$$

substituons les séries en t, correspondantes.

Soit τ le module de t. Observant que $\zeta(\tau)$ a un module supérieur à celui de $\zeta(t)$, substituant $\zeta(\tau)$ à $\varphi(t)$ dans les expressions telles que $F^i(\varphi)$, et τ à t dans les expressions $\frac{d^i\varphi(t)}{dt^i}$; remplaçant encore dans toutes les séries dont nous venons de parler $z_1, z_2, z_3, \ldots z_{m-1}$ par ρ, nous augmentons le module de l'expression primitive $D^nF(\varphi(t))$, et nous en concluons que celle-ci a un module inférieur à celui de

$$D_\tau^n\left[\frac{1}{m(\rho-\zeta(\tau))^{m-1}}\right] \quad \text{ou de} \quad \frac{d^{n+1}\zeta(\tau)}{d\tau^{n+1}}.$$

Par conséquent $D_{\theta\tau}^n F[\varphi(\theta t)]$ a un module inférieur à celui de $\zeta^{(n+1)}(\theta\tau)$. Mais, au signe près, ce dernier module est égal à

$$\frac{\rho}{m}\cdot\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-n\right)}{\rho^{m(n+1)}}\left(1-\frac{\theta\tau}{\rho^m}\right)^{\frac{1}{m}-n-1},$$

et le terme complémentaire a un module (numériquement) moindre que

$$\frac{\rho}{m}\cdot\frac{\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}-1\right)\left(\frac{1}{m}-2\right)\cdots\left(\frac{1}{m}-n\right)}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{\tau^n}{\rho^{m(n+1)}}$$
$$\times\left(\frac{1-\theta}{1-\frac{\theta\tau}{\rho^m}}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\theta\tau}{\rho^m}\right)^{2-\frac{1}{m}}}.$$

D'ailleurs, le facteur

$$\left(\frac{1-\theta}{1-\frac{\theta\tau}{\rho^m}}\right)^{n-1}$$

est inférieur à 1; et le facteur

$$\frac{1}{\left(1-\frac{\theta\tau}{\rho^m}\right)^{2-\frac{1}{m}}}$$

est moindre que

$$\frac{1}{\left(1-\frac{\tau}{\rho^m}\right)^{2-\frac{1}{m}}}.$$

Quant au produit des facteurs qui précèdent, on peut le regarder comme le terme général d'une série convergente; car le rapport du terme suivant de cette série, à ce terme lui-même, serait

$$\frac{\frac{1}{m}-n-1}{n}\cdot\frac{\tau}{\rho^m}$$

et la valeur numérique de ce rapport aurait pour limite $\frac{\tau}{\rho^m}$, nombre inférieur à 1.

Ainsi, il existe une fonction σ, satisfaisant à l'équation

$$\frac{d\sigma}{dt}=F(\varphi(t));$$

sa dérivée est identique à $\frac{dz}{dt}$; et si elle s'annule avec t (hypothèse toujours possible), elle est identique à z. Donc la fonction z, formée au n° 3, vérifie l'équation

$$\frac{dz}{dt}=F(z)=\frac{1}{f'(z)}$$

et puisqu'elle s'annule avec t, on en conclut qu'elle vérifie l'équation $f(z) = t$, pour toute valeur de t qui rend convergente la série destinée à définir la fonction z, et notamment pour $t = a$. Donc enfin *l'équation* $f(z) = a$, *a une racine.*

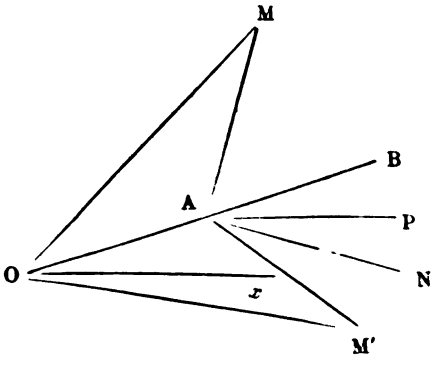
SUR UNE FAMILLE REMARQUABLE DE COURBES;

par M. G. PIRONDINI, à Parme.

1. Les courbes que nous allons étudier ont pour équation, en coordonnées polaires,

$$\rho = 2a \cos n\theta. \qquad (1)$$

Elles admettent le mode de génération suivant : Soient OA, AM deux droites égales articulées en A; supposons que la première tourne autour de l'extrémité fixe O, la seconde autour du point A, avec la condition que le rapport des deux vitesses angulaires ait une valeur constante m(*); le point M décrira une courbe ayant une équation de la forme (1).



En effet, prenons pour pôle O, pour axe polaire la droite Ox qui correspond à la position où AM est dans le prolongement de OA. Nous faisons tourner OA dans le sens inverse de celui des aiguilles d'une montre (sens positif); suivant que la droite AM tourne dans le même sens ou dans le sens contraire, le rapport m est positif ou négatif. Dans le premier cas, si l'on pose

$$\rho = OM, \quad \theta = MOx, \quad \alpha = AOx, \quad OA = a,$$

on a

$$MAB = m\alpha, \quad MOA = \tfrac{1}{2} m\alpha,$$

(*) On considère ici la vitesse de AM *par rapport* à OA.

et évidemment

$$\rho = 2a \cos \frac{1}{2} m\alpha ;$$

comme $\theta = \alpha + \frac{1}{2} m\alpha$, l'élimination de a donne

$$\rho = 2a \cos \frac{m}{m+2} \theta .$$

Dans le second cas, figuré par OAM′, on trouve

$$\rho = 2a \cos \frac{-m}{m+2} \theta .$$

Les deux équations sont comprises dans l'équation (1) si l'on pose $\frac{\pm m}{m+2} = n$; ce qui donne deux valeurs de m pour une même valeur de n :

$$m_1 = \frac{2n}{1-n}, \quad m_2 = -\frac{2n}{1+n}. \tag{2}$$

On a donc le théorème suivant : *Les lignes* (1) *peuvent être engendrées de deux manières différentes, par la rotation d'un angle articulé* OAM *dont les deux côtés tournent respectivement autour de* O *et* A *avec des vitesses dont le rapport reste constant.*

Des égalités (2) on conclut

$$\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = -1, \tag{3}$$

formule qui permet d'établir l'une des constructions de la courbe quand on connaît l'autre. Nous supposons n positif; alors m_2 est toujours négatif, et m_1 est positif ou négatif suivant que $n < 1$ ou $n > 1$. Le cas de $n = 1$ correspond à une circonférence ; il ne comporte qu'une valeur de m, savoir $m = 1$.

2. La courbe (1) peut servir à diviser un angle ε en k parties égales quand on sait le diviser en $k+1$ ou en $k-1$ parties égales.

En effet, posons

$$\frac{m_1}{m_2} = \pm k ;$$

si nous prenons le signe $+$, nous aurons

$$n = \frac{k+1}{k-1}, \quad m_1 = -(1+k), \quad m_2 = -\frac{1+k}{k}, \tag{4}$$

$$\rho = 2a \cos \frac{k+1}{k-1} \theta ; \tag{5}$$

le signe — donne

$$n = \frac{k-1}{k+1}, \quad m_1 = k-1, \quad m_2 = -\frac{k-1}{k}, \tag{6}$$

$$\rho = 2a \cos \frac{k-1}{k+1}\theta. \tag{7}$$

Supposons la ligne (5) dessinée; faisons l'angle $x\text{OA} = \frac{\varepsilon}{k+1}$; prenons $\text{OA} = a$ et construisons dans la direction négative l'angle $\text{BAM}' = \varepsilon$. Si le second côté rencontre la courbe en M', on a nécessairement $\text{AM}' = a$, et la circonférence décrite de A comme centre avec le rayon a coupe la courbe en un autre point N qui correspond à l'autre mode de génération; par conséquent, à cause de $\frac{m_1}{m_2} = k$, on a $\text{BAN} = \frac{\varepsilon}{k}$.

De même, si la ligne (7) est dessinée, on fait l'angle $x\text{OA} = \frac{\varepsilon}{k-1}$ et l'on prend $\text{OA} = a$; on construit dans la direction positive l'angle $\text{BAM} = \varepsilon$, dont le second côté BM coupe la courbe en un point M tel que $\text{AM} = a$, et l'on trace de A comme centre avec le rayon a une circonférence, qui coupe la courbe aux points M, P; le point P correspond à l'autre mode de génération, et par suite $\text{MAB} = k$. BAP.

3. Puisqu'on sait diviser un angle en 4 et 2 parties égales, le problème précédent résout la trisection de l'angle au moyen des courbes

$$\rho = 2a \cos 2\theta, \tag{8}$$

$$\rho = 2a \cos \frac{\theta}{2}. \tag{9}$$

La courbe (8) est la *rosace à quatre branches*, podaire d'une hypocycloïde à quatre rebroussements, par rapport à son centre; c'est aussi le lieu de la projection d'un point fixe O sur une droite de longueur constante qui se meut entre deux droites rectangulaires Ox, Oy. Les valeurs correspondantes de m sont

$$m_1 = -4, \quad m_2 = -\frac{4}{3}.$$

On en déduit deux générations de la rosace au moyen d'un angle articulé mobile OAM (n° 1).

On obtient la même courbe en construisant dans une circonférence de

diamètre OA = 2a deux cordes quelconques OB, OC faisant avec OA les angles COA = 2BOA; si l'on prend sur OB, dans les deux sens, les longueurs OM = OM' = OC, les points M, M' appartiennent à la rosace.

On peut aussi construire d'abord la lemniscate de Bernoulli, représentée par l'équation

$$\rho_1^2 = 2a^2 \cos 2\theta,$$

et porter sur chaque rayon de cette courbe une longueur égale à $\frac{\rho_1^2}{a}$.

La ligne (9) correspond à

$$m_1 = 2, \quad m_2 = -\tfrac{3}{5};$$

elle s'obtient par la double génération indiquée ci-dessus (n° 1). Voici deux autres constructions : 1° On inscrit dans un cercle de rayon a deux cordes quelconques OB, OC faisant avec un diamètre fixe OA les angles COA = 2BOA, et l'on porte sur OC des longueurs OM = OM' = OB. 2° Sur les rayons vecteurs de la *cardioïde*

$$\rho_1 = 4a \cos^2 \tfrac{1}{2}\theta,$$

on prend une longueur égale à $\sqrt{a\rho_1}$.

4. Soit à diviser un angle donné en 5 parties égales. Si l'on fait $k = 5$, les formules du n° 2 donnent

$$\rho = 2a \cos \tfrac{3}{2}\theta, \quad m_1 = -6, \quad m_2 = -\tfrac{6}{5}, \tag{10}$$

$$\rho = 2a \cos \tfrac{3}{2}\theta, \quad m_1 = 4, \quad m_2 = -\tfrac{4}{5}. \tag{11}$$

On construit les courbes (10) et (11) par le procédé du n° 1, puis on applique le problème du n° 2. L'emploi de la courbe (10) exige la division de l'angle en 6 parties égales.

La courbe (11) peut se déduire de la rosace à quatre branches. Car elle correspond à $m = 4$; et la rosace, à $m = -4$, de sorte que si OAM' est une position de l'angle articulé qui engendre la rosace, le symétrique de M' par rapport à OA engendre la courbe (11).

5. Pour diviser un angle en 7 parties égales, nous faisons $k = 7$ dans les formules du n° 2; il vient

$$\rho = 2a \cos \tfrac{4}{3}\theta, \quad m_1 = -8, \quad m_2 = -\tfrac{6}{7}; \tag{12}$$

$$\rho = 2a \cos \tfrac{3}{4}\theta, \quad m_1 = 6, \quad m_2 = -\tfrac{6}{7}. \tag{13}$$

Si l'on emploie (13), on doit d'abord diviser l'angle donné en 6 parties

égales; la courbe (12) exige la division de cet angle en 8 parties égales. Les deux lignes s'obtiennent par le procédé du n° 1.

Les courbes (11) et (13) peuvent se déduire du trifolium

$$\rho_1 = 2a \cos 3\vartheta. \tag{14}$$

Si F est un point du trifolium, on décrit du centre O avec le rayon OF une circonférence, qui coupe en G la bissectrice de l'angle FOx, et en H la bissectrice de l'angle GOx; les points G et H décrivent respectivement les lignes (11) et (13).

La ligne (12) se déduit de la courbe

$$\rho = 2a \cos \tfrac{1}{3}\theta, \tag{15}$$

en quadruplant l'inclinaison du rayon sur Ox. La courbe (15) correspond à

$$m_1 = 1, \quad m_2 = -1;$$

elle est donc engendrée par le mouvement d'un angle articulé OAM, dont le côté AM a, par rapport à OA, une vitesse égale à celle de OM et de même sens.

BIBLIOGRAPHIE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

Quelques théorèmes de géométrie élémentaire, par E. Rousseau, professeur à l'université de Bruxelles. — Gand, imprimerie Meyer-Van Loo, 1893. — Une brochure in-8° de 27 pages.

Les angles dièdres et les angles polyèdres (et par extension les angles coniques) sont des grandeurs de même espèce, qu'on peut rapporter à une même unité; il est rationnel d'adopter pour cette unité le dièdre droit. Ces angles peuvent aussi être mesurés au moyen de la portion de surface qu'ils interceptent sur une sphère dont le centre est sur l'arête du dièdre ou coïncide avec le sommet de l'angle solide; l'unité de surface sphérique est alors le fuseau droit ou le quart de la sphère.

Après avoir démontré que deux triangles sphériques symétriques ont même surface, il est facile d'établir *directement* que *le double de la surface d'un polygone sphérique est égal à la surface de la sphère, diminuée de la somme des fuseaux ayant pour angles les suppléments des angles du polygone.* Cette proposition a pour corrélative : *Le double d'un angle polyèdre est égal à quatre dièdres droits, moins la somme des suppléments des dièdres de cet angle solide.*

En partant de ces théorèmes, M. Rousseau trouve un grand nombre de relations curieuses entre les angles solides et les dièdres d'un polyèdre, et la formule d'Euler (S + F = A + 2) avec quelques-unes de ses conséquences; plusieurs de ces relations sont probablement nouvelles.

L'opuscule se termine par quelques formules trigonométriques relatives au tétraèdre.

Nous recommandons aux professeurs et aux élèves la lecture de l'intéressante brochure de M. Rousseau : ils y retrouveront, sous une forme nouvelle et attrayante, des propositions connues, et aussi d'autres, peu connues ou tout à fait nouvelles. Pour nous servir d'un terme courant, nous dirons que cette publication est éminemment *suggestive*. (J. NEUBERG).

Exercices d'arithmétique. Énoncés et solutions, par J. FITZ-PATRICK, ancien professeur de mathématiques et G. CHEVREL, directeur de l'institution Charlemagne à Tours, avec une préface de J. TANNERY. — Paris, A. Hermann, 1893 (x-483 pages in-8°). Prix : 10 francs.

Nous extrayons de la *Revue générale des Sciences pures et appliquées* du Dr Olivier, un excellent compte rendu de ce livre, dû à M. G. Floquet :

« Cet important recueil ne renferme pas moins de 465 exercices. Il se recommande par le choix judicieux des questions, par leur variété, par l'ordre méthodique dans lequel elles sont classées, par la netteté et l'élégance des solutions. Il sera d'autant mieux accueilli des élèves et des maîtres qu'il est seul de son espèce. L'intéressante préface de M. J. Tannery met bien en évidence l'utilité et l'opportunité d'une semblable publication.

L'ouvrage embrasse toutes les parties de l'arithmétique depuis la numération jusqu'aux premières notions sur la théorie des nombres. Il contient non seulement des problèmes résolus, mais encore des exposés théoriques, des règles pratiques, et aussi des remarques historiques ou philosophiques, des extraits de correspondances qui le rendent particulièrement attrayant. On y rencontre des renseignements bibliographiques, des indications de travaux que pourra consulter le lecteur désireux de pousser plus loin son étude.

Le livre est divisé en seize chapitres, précédés chacun d'un sommaire théorique. Les six premiers concernent les notions préliminaires et la numération, les quatre opérations, la divisibilité des nombres, les diviseurs communs des nombres entiers, et se terminent par le théorème de Lamé relatif au nombre des divisions à effectuer dans la recherche d'un plus grand commun diviseur. Les nombres premiers occupent le chapitre VII qui renferme à lui seul soixante-dix exercices environ. Viennent ensuite trois chapitres consacrés aux fractions ordinaires, aux fractions décimales et aux nombres décimaux, aux rapports et aux proportions. On y remarque des sommations de séries et des problèmes sur la fonction E (x) représentant le plus grand entier contenu dans x. Les différents systèmes de numération, les carrés et racines carrées, les cubes et racines cubiques, puis les progressions servent de thème aux quatre chapitres suivants. Le chapitre XV contient diverses questions dont la solution ne dépend pas directement des théories qui précèdent. Citons l'interprétation du célèbre article 757 du Code civil, des notions sur les nombres figurés, les nombres triangulaires, etc., un aperçu de la théorie des nombres parfaits, une note sur les nombres amiables.

Enfin, le chapitre XVI est un exposé des premières notions relatives à la théorie des nombres. Voici quelques-unes des nombreuses questions qui y sont traitées; elles suffisent à montrer tout l'intérêt qui s'attache à ce chapitre :

Démonstration de la formule d'Euler faisant connaître le nombre $\varphi(n)$ des nombres premiers avec n et non supérieurs à n. Propriétés du nombre $\varphi(n)$. — Expression de la somme des nombres premiers avec n et non supérieurs à n en fonction de n et de $\varphi(n)$. — Détermination du nombre $f(n)$ des nombres premiers avec un nombre donné n et non supérieurs à un entier donné. Expression de la somme des $f(n)$ nombres premiers avec n compris entre 1 et f. — Théorème de Fermat. — Théorème d'Euler sur la divisibilité par n de la différence $a^{\varphi(n)} - 1$, lorsque a et n sont premiers entre eux. — Théorème de Wilson et sa généralisation. Méthode proposée par Gauss pour déterminer les racines primitives d'un nombre premier donné, etc.

Une démonstration élémentaire du théorème de Bachet (*), par M. A. Matrot, termine ce beau volume édité avec soin par M. Hermann et dont l'exécution matérielle ne laisse rien à désirer. Nous le regardons comme appelé à rendre de réels services, et nous lui souhaitons le succès que méritent les efforts si louables et si heureux de ses auteurs. »

E. Lemoine. **La Géométrographie ou l'art des constructions géométriques.** Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1893 (66 p. in-8°). Prix : 2 fr.

Ce mémoire, extrait du compte rendu du Congrès de Pau, de l'Association française pour l'avancement des sciences, est le développement des travaux antérieurs de l'auteur sur le même sujet.

Toute construction est représentée par

$$l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3,$$

où R_1, R_2, C_1, C_2, C_3 désignent les opérations suivantes : 1° Faire passer une règle par un point; 2° tracer une droite : 3° mettre la pointe du compas en un point déterminé, ou 4° indéterminé; 5° tracer la circonférence. Le coefficient de *simplicité* est $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$, celui d'*exactitude* $l_1 + m_1 + m_2$. Comme le remarque l'auteur, cette mesure de la simplicité d'une construction n'est pas *absolue*, puisque elle suppose également simples les opérations représentées par R_1, R_2, C_1, C_2, C_3; cependant elle peut souvent servir à comparer utilement les degrés de simplicité de diverses solutions d'un même problème.

L'auteur expose les principes que nous venons de résumer, puis les applique à 63 exemples dont quelques-uns sont très compliqués et sont accompagnés de remarques générales importantes.

(*) Qu'il nous soit permis, à propos du théorème : *Tout nombre entier est la somme de quatre carrés, dont un, deux ou trois peuvent être nuls*, de faire observer que c'est à tort que M. Matrot attribue ce théorème à Bachet. Bachet, en effet, n'a fait que le vérifier empiriquement dans un petit nombre de cas, tandis que Fermat l'a généralisé de manière à prouver qu'il en possédait la démonstration. Il est donc juste de continuer à l'appeler théorème de Fermat.

La brochure de M. Lemoine est le complément *indispensable* de tous les manuels de géométrie élémentaire et a sa place marquée dans la bibliothèque de tous les professeurs de mathématiques élémentaires.

An Essay on Newton's Principia, by W. W. ROUSE BALL, Fellow and Tutor of Trinity College Cambridge. London and New-York, Macmillan and Co, 1893 (X-175 p. in-12, cartonné à l'anglaise). Prix : 6 shillings.

Histoire très bien faite de la genèse du livre immortel de Newton; analyse détaillée de l'ouvrage; renseignements sur la publication de la deuxième et de la troisième édition; pièces inédites ou peu connues relatives aux *Principia*. Voici les titres des chapitres : 1. Introduction. 2. Recherches de Newton en 1666 : il explique *partiellement* les phénomènes célestes par la gravitation. 3. Recherches de 1679 : correction de l'erreur de 1666. 4. Recherches de 1684 (lois du mouvement elliptique). L'auteur réimprime ici le traité *De Motu*, esquisse des premières sections du livre I des *Principia*. 5. Préparation des *Principia* (1685-1687) : Newton découvre toute la portée de la théorie de la gravitation. Analyse des *Principia* (39 pages). 7. Recherches ultérieures de Newton et préparation des deux dernières éditions. Ce chapitre renferme quelques lettres de Newton qui sont peu connues sur le continent et qui sont utiles pour l'intelligence des *Principia*. 8. Appendices : Correspondance de Newton avec Hooke et avec Halley.

Le livre de M. Ball est une monographie précieuse sur un point important de l'histoire des mathématiques. Il contribuera à accroître, si c'est possible, la gloire de Newton, en révélant à beaucoup de lecteurs, avec quelle merveilleuse rapidité l'illustre géomètre anglais a élevé à la science ce monument immortel, les *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*. (P. M.)

Geometrical Researches on the Theory of Parallels, by N. LOBATSCHEWSKY, translated from the Original by G. B. HALSTED, A. M., Ph. D., Professor of Mathematics in the University of Texas. Austin (Texas), 1892 (50 p. in-8°). Prix : Un dollar.

Quatrième édition de la traduction anglaise des célèbres *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelenlinien*, publiées en 1840 à Berlin par Lobatchefsky, et dont l'édition française, due à Hoüel (1861), a révélé aux géomètres l'existence de la géométrie non-euclidienne. Le traducteur nous apprend, dans sa préface, que cette géométrie est enseignée dans plusieurs universités américaines et va l'être au Japon, à l'Université de Tokio, où l'on réimprime l'opuscule que nous annonçons.

Elementary Synthetic Geometry, by G. B. HALSTED, etc., New-York, J. Wiley and Sons, 1892 (VIII-164 p. in-8°). Prix : 1,75 dollar.

Esquisse rapide plutôt que manuel. Voici les subdivisions : 1. Symétrie et égalité. 2. Géométrie de la sphère. 3. Équivalence. 4. Proportion. 5. Similitude. 6. Mesure. 7. Géométrie moderne (transversales, rapports harmoniques, dualité

quadrilatères et quadrangles complets, inversion, polaires, rapports anharmoniques). 8. Géométrie récente (anti-parallèles, isogonaux, symmédianes, points de Brocard).

Annuaire pour l'an 1894, publié par le Bureau des longitudes. Paris, Gauthier-Villars et fils (In-18 de V-886 pages). Prix : 1 fr. 50.

Outre les renseignements pratiques qu'il contient chaque année, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour 1894 renferme des articles dus aux savants les plus illustres sur les Monnaies, la Statistique, la Géographie, la Minéralogie, etc., enfin les Notices suivantes : La Lumière et l'Électricité, d'après Maxwell et Hertz, par M. Poincaré. — L'Origine et l'emploi de la boussole marine appelée aujourd'hui compas, par le Contre-Amiral Fleuriais. — Quatre jours d'observation au sommet du mont Blanc, par M. J. Janssen. — Discours prononcés aux funérailles de l'Amiral Pâris, par MM. Faye, Bouquet de la Grye et le Contre-Amiral Fleuriais. — Discours prononcés à l'inauguration de la statue d'Arago, par MM. Tisserand, Cornu, Mouchez.

QUELQUES PROPRIÉTÉS D'UNE DROITE PARTAGÉE EN MOYENNE ET EXTRÊME RAISON;

par M. Clément Thiry.

Soient AB une droite quelconque de longueur a, O son milieu et C le point qui partage AB en moyenne et extrême raison(*). Au point C élevons une perpendiculaire CH à AB jusqu'à l'intersection avec la demi-circonférence décrite sur AB comme diamètre ; la tangente en H rencontre le prolongement de AB en D. Les divers éléments de cette figure jouissent de quelques propriétés assez intéressantes.

I. Si AC est le plus grand segment, on a, par définition,

$$AB.\,BC = \overline{AC}^2 \quad \text{ou} \quad (AC + CB)\,BC = \overline{AC}^2,$$

d'où

$$CA.\,CB = \overline{AC}^2 - \overline{CB}^2, \qquad (1)$$

$$CA.\,CB = (AC + CB)(AC - CB) = AB.\,2CO = 2AB.\,CO, \qquad (2)$$

égalité qui donne une expression du *produit des deux segments*.

II. Dans le triangle rectangle OHD, on a :

$$\overline{HC}^2 = OC.\,CD, \quad \text{mais} \quad \overline{HC}^2 = AC.\,CB = 2AB.\,CO.$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Donc

$$CD = 2AB. \tag{3}$$

Puisque CD = 2AB, on mènera facilement la tangente au point H.

III. On a

$$HD.HC = \overline{AB}^2. \tag{4}$$

En effet, les triangles semblables HCD et OHC donnent

$$\frac{HD}{\overline{OH}} = \frac{HC}{\overline{OC}};$$

mais, à cause de (2),

$$OC = \frac{CA.CB}{2AB} = \frac{\overline{CH}^2}{2AB}, \quad OH = \frac{AB}{2},$$

donc la proportion ci-dessus donne l'égalité (4).

Remarque. Puisque CD = 2AB, on a

$$HC.HD.CD = 2\overline{AB}^3. \tag{5}$$

IV. En multiplant par π les deux membres de (4), on a

$$\pi HD.HC = \pi\overline{AB}^2. \tag{6}$$

Donc, *la surface conique engendrée par la tangente* DH *tournant autour de* AB *est égale à la surface de la sphère de diamètre* AB.

V. Si l'on fait tourner la figure autour de AB, on a

$$\text{zone } AHC = \pi AB.AC, \quad \text{zone } BHC = \pi AB.CB;$$

d'où

$$\text{zone } AHC - \text{zone } BHC = \pi AB\,(AC - CB) = \pi AB.2CO = \pi\overline{CH}^2. \tag{7}$$

Donc, *le cercle qui partage le diamètre d'une sphère en moyenne et extrême raison a une surface égale à la différence des deux calottes sphériques qu'il détermine.*

VI. Le second point C′ qui partage AB en moyenne et extrême raison (C′ est situé sur le prolongement de BA, à gauche de A) jouit de propriétés analogues à celles du point C. Du point C′ menons la tangente C′M à la circonférence AB, et soit P le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur AB.

On démontrera, comme précédemment, les relations suivantes :

$$C'A.C'B = \overline{C'B}^2 - \overline{C'A}^2 = 2AB.C'O,$$
$$C'P = 2AB = CD, \quad MP.MC' = \overline{AB}^2.$$

VII. On sait que

$$CA = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1), \quad CB = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}),$$

$$C'A = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1), \quad C'B = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5});$$

d'où

$$CA.\,CB = a^2(\sqrt{5} - 2), \quad C'A.\,C'B = a^2(\sqrt{5} + 2),$$
$$CA.\,C'A = CB.\,C'B = a^2.$$

VIII. $AP = C'P - C'A = 2a - \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1) = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$.

On voit donc que AP=BC. Il résulte de là que MP=HC, MC'=HD. *Le triangle* MPC' *est donc le symétrique du triangle* HCD *par rapport au diamètre perpendiculaire à* AB.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 812.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 56.)

Le centre d'un cercle (C) *se meut sur une parabole donnée et le cercle passe constamment par le foyer* F *de cette parabole. Trouver* : 1° *l'enveloppe de ce cercle; 2° le lieu du point de rencontre de ce cercle* : a) *avec une parallèle à l'axe menée par* C; b) *avec l'ordonnée de* C; c) *avec la tangente à la parabole en* C; d) *avec la normale menée en* C. (MOREL.)

Solution par M. DÉPREZ. 1° L'enveloppe du cercle (C) se compose évidemment du foyer F et de la directrice.

2° *a)* La parallèle à l'axe menée par C rencontre le cercle (C) en deux points, l'un appartenant à la directrice, l'autre ayant pour abscisse $2x' + \frac{1}{2}p$, si (x', y') sont les coordonnées de C. Le rayon du cercle est $CF = x' + \frac{1}{2}p$. Le lieu du second point est donc la parabole représentée par l'équation

$$y^2 = p\,(x - \tfrac{1}{2}p).$$

b) Soient (x, y) les coordonnées du point de rencontre du cercle (C) avec l'ordonnée de C; on a

$$y = y' \pm (x' + \tfrac{1}{2}p), \quad x = x'.$$

Éliminant x', y' entre ces égalités et l'équation de la parabole, on trouve

$$[y \mp (x + \tfrac{1}{2}p)]^2 = 2px, \quad \text{ou} \quad (y \mp x)^2 \mp py + \tfrac{1}{4}p^2 - px = 0,$$

équation de deux paraboles.

c) Les équations du cercle (C) et de la tangente en C à la parabole étant

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = (x' + \tfrac{1}{2}p)^2, \quad yy' = p(x + x'),$$

on éliminera x', y' entre ces équations et $y'^2 = 2px'$. Si l'on développe la première et qu'on remplace y'^2 par $2px'$, yy' par $p(x + x')$, on trouve

$$x' = \frac{x^2 + y^2 - 2px - \tfrac{1}{4}p^2}{2x + p};$$

la seconde donne ensuite

$$y' = \frac{p}{y(2x + p)}(3x^2 + y^2 - px - \tfrac{1}{4}p^2).$$

L'équation du lieu cherché est donc

$$2y^2(2x + p)(x^2 + y^2 - 2px - \tfrac{1}{4}p^2) = p(3x^2 + y^2 - px - \tfrac{1}{4}p^2)^2.$$

d) On élimine x', y' entre les équations

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = \left(x' + \frac{p}{2}\right)^2, \quad y - y' = -\frac{y'}{p}(x - x'),$$
$$y'^2 = 2px'.$$

Remarques. Remplaçons la parabole par une ellipse. L'enveloppe du cercle (C) se compose du foyer F et du cercle *directeur* décrit du second foyer F′ comme centre avec un rayon égal au grand axe. Les points d'intersection du cercle (C) avec la parallèle menée par C au grand axe divisent dans des rapports constants la perpendiculaire abaissée de C sur la directrice; par suite, ils décrivent deux ellipses. Les points de rencontre du cercle (C) avec l'ordonnée de C parcourent également deux ellipses.

Question 830.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 103.)

On donne un angle xOy et un point H. *Deux droites rectangulaires quelconques, menées par* H, *coupent* Ox *en* P, P′, *et* Oy *en* Q, Q′. *On demande de trouver :* 1° *l'enveloppe de la droite joignant les milieux* P″, Q″ *des segments* PP′, QQ′ ; 2° *le lieu du second point d'intersection des circonfé-*

rences PHP′, QHQ′ ; 3° *l'enveloppe de la droite joignant les milieux* R, R′ *des droites* PQ, P′Q′ ; 4° *le lieu du milieu de la droite* RR′. (J. Neuberg.)

Solution par M. Retali, Déprez et Droz. 1° Les deux droites rectangulaires marquent sur Ox et Oy deux involutions perspectives ; les points P″ et Q″, milieux de deux segments correspondants (perspectifs) PP′ et QQ′, marquent donc sur Ox et Oy deux ponctuelles projectives, et par suite l'enveloppe de la droite P″Q″ est une conique, que nous appellerons E^2, tangente aux droites Ox, Oy. Les rayons doubles de l'involution rectangulaire, c'est-à-dire les deux droites isotropes issues du point H, sont évidemment tangentes à E^2 ; par suite, E^2 a en H un de ses foyers.

Autrement. Les égalités

$$\text{angle } Q''HQ' = Q''Q'H = P'Q'O, \quad \text{angle } P''HP' = Q'P'P \text{ (*)},$$

donnent

$$Q''HQ' - P'HP'' = \pi - P''HQ' = xOy,$$

donc l'enveloppe de la droite P″Q″ est une conique ayant un foyer en H, tangente aux droites Ox, Oy, etc.

2° Le deuxième point d'intersection A des circonférences PHP′, QHQ′ est symétrique de H par rapport à la tangente P″Q″ de E^2 ; le lieu du point A est, par conséquent, un cercle ayant son centre en l'autre foyer de E^2, et pour rayon le grand axe de E^2.

3° Le lieu des points R et R′ est, par un théorème connu, une hyperbole H^2 qui passe par O, par les points à l'infini des droites Ox, Oy et par H, et dont la tangente en ce dernier point peut se construire immédiatement : cela posé, l'angle droit RHR′, tournant autour du point H, marque sur l'hyperbole H^2 des couples R, R′ en involution, et les droites RR′ vont concourir, en vertu du théorème de Frégier, en un point fixe N, appartenant à la normale en H. L'enveloppe de la droite RR′ se réduit donc à ce point N.

4° Enfin, le lieu du milieu de la droite RR′ est (v. p. ex., Chasles. *Sections Coniques*, p. 137) une conique passant par le point fixe N, par les deux points de contact (imaginaires conjugués) des tangentes de H^2 issues de ce point, et par les deux points à l'infini de H^2.

M. Déprez accompagne sa solution des remarques suivantes :

I. Lorsque l'angle xOy est droit, l'enveloppe de la droite P″Q″ est une parabole ayant pour foyer H et touchant Ox, Oy ; le second point d'intersection H′ des

(*) On suppose P′ situé entre O et P et Q entre O et Q′.

circonférences PHP', QHQ' décrit la directrice de cette parabole ; les circonférences OPQ, OP'Q' passent par H', et RR' est perpendiculaire à la directrice OH' ; le milieu de RR' est le centre du cercle des neuf points du triangle PQQ' et décrit la perpendiculaire au milieu de OH.

II. Si l'angle xOy est quelconque et l'angle mobile $Q'HP = xOy$, le second point d'intersection des circonférences OPQ, OP'Q' décrit une cubique.

M. Barisien a donné une bonne solution analytique du cas où l'angle xOy est droit.

×Question 846.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 151.)

Le carré de tout nombre impair autre que 1 est la somme de deux carrés, ou la somme de trois carrés. (E. Catalan.)

Solution par M. V. Jamet (Marseille). En effet,

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1,$$

et si $4n+1$ est égal à un carré, ou à la somme de deux carrés, le théorème est évident. S'il en est autrement, $4n+1$ est la somme de trois carrés (Legendre, *Théorie des nombres, 3e édition, p. 393 et suiv.*). Soit donc

$$4n + 1 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Dans l'identité

$$(2n+1)^2 = (2n-k)^2 + (k+1)(4n-k+1) \qquad (1)$$

faisons $k = a^2$: nous trouvons

$$\begin{aligned}(2n+1)^2 &= (2n-a^2)^2 + (a^2+1)(b^2+c^2)\\ &= (2n-a^2)^2 + (ab+c)^2 + (ac-b)^2, \qquad (2)\end{aligned}$$

et l'intérêt du problème consiste à faire voir que deux au moins des trois carrés ci-dessus sont différents de zéro. En effet, a, b, c étant trois nombres différents de zéro, $(ab+c)^2$ n'est pas nul, et je dis qu'on peut choisir a de telle sorte que $2n - a^2$ ne soit pas nul. En effet, les trois nombres a^2, b^2, c^2 ne sauraient être égaux tous les trois à $2n$, sans quoi l'on aurait :

$$4n + 1 = 6n, \quad \text{ou} \quad 2n = 1, \text{ ce qui est impossible.}$$

D'ailleurs, au cas où $2n$ est un carré, on trouve aisément une décomposition en une somme de deux carrés. En effet, si $2n = 4h^2$, on a

$$(2n+1)^2 = (4h^2+1)^2 = 16h^4 + 8h^2 + 1 = (4h^2-1)^2 + (4h)^2.$$

Remarque. Si a^2, b^2 et c^2 sont tous différents, l'identité (1) nous donne six manières différentes de décomposer $(2n+1)^2$ en une somme de trois carrés. En effet, l'égalité (2) peut être transformée comme il suit :

$$(2n+1)^2 = (2n-a^2)^2 + (ac+b)^2 + (ab-c)^2 \qquad (3)$$

et l'on trouve quatre formules analogues à (2) et à (3), en faisant $k=b^2$, $k=c^2$.

Question 847.

(Voir *Mathesis*, (2) III, p. 151).

Trouver le lieu du milieu de la droite qui joint les centres de courbure aux extrémités des diamètres conjugués d'une ellipse. (Greenstreet.)

Solution par MM. Barisien et Droz Farny. Si φ est l'angle d'anomalie excentrique à l'une des extrémités d'un des diamètres, les coordonnées du centre de courbure correspondant sont :

$$x_1 = \frac{c^2}{a}\cos^3\varphi, \quad y_1 = -\frac{c^2}{b}\sin^3\varphi.$$

Celles du centre de courbure à l'extrémité du diamètre conjugué sont

$$x_2 = -\frac{c^2}{a}\sin^3\varphi, \quad y_2 = -\frac{c^2}{b}\cos^3\varphi.$$

Les coordonnées x, y du milieu de la droite joignant ces deux centres sont :

$$2X = x_1+x_2 = \frac{c^2}{a}(\cos^3\varphi - \sin^3\varphi), \quad 2Y = y_1+y_2 = -\frac{c^2}{b}(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi).$$

Il faut éliminer φ entre ces deux équations. Or, on en déduit

$$\cos^3\varphi = \frac{aX-bY}{c^2}, \quad \sin^3\varphi = -\frac{aX+bY}{c^2}.$$

L'équation du lieu est, par suite,

$$(aX-bY)^{\frac{2}{3}} + (aX+bY)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}, \qquad (1)$$

$$(2a^2X^2 + 2b^2Y^2 - c^4)^3 + 27c^4(a^2X^2 - b^2Y^2)^2 = 0.$$

C'est une courbe du 6e degré, analogue a la développée de l'ellipse. Elle est concentrique à l'ellipse et a ses points de rebroussement situés deux par deux sur chacune des perpendiculaires aux diagonales du rectangle des axes.

Autre solution par MM. Hacken et Mandart. M. Hacken fait la remarque suivante qui présente un grand intérêt :

Si l'on prend pour axes de coordonnées les perpendiculaires OX', OY' aux diagonales du rectangle des axes de l'ellipse, les nouvelles coordonnées d'un point (X, Y), sont de la forme

$$X' = (aX - bY)\,m, \quad Y' = (aX + bY)\,m,$$

m étant un facteur qui ne dépend que de a et b. L'équation (1) peut donc s'écrire ainsi :

$$X'^{\frac{2}{3}} + Y'^{\frac{2}{3}} = K^{\frac{2}{3}}.$$

Cette courbe est donc l'enveloppe de la droite joignant les pieds des coordonnées d'un point de l'ellipse $X'^2 + Y'^2 = K^2$; elle se déduit aussi d'une hypocycloïde à quatre rebroussements en faisant tourner les ordonnées de celle-ci d'un angle constant autour de leurs pieds.

×Question 851.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 152.)

La tangente en un point quelconque M *d'une circonférence* O *rencontre un diamètre fixe* AA' *au point* T. *Trouver le lieu du centre du cercle inscrit au triangle* OMT. (SMEETS.)

Solution par M. E. N. BARISIEN. Soit BB' le diamètre perpendiculaire à AA' et supposons que le point M se trouve sur le quart de cercle AB.

ω étant le cercle du cercle inscrit au triangle OMT, si l'on joint ωA, on voit que les deux triangles MOω et AOω sont égaux. Par conséquent, les angles OMω et OAω sont égaux : mais comme le premier vaut 45°, il en résulte que la droite Aω est inclinée à 45° sur OA, de telle sorte que le lieu du centre ω est la droite AB.

Lieu des centres des cercles exinscrits au même triangle. Soit ω_1 le centre du cercle exinscrit dans l'angle MOT; joignons $A\omega_1$. Les triangles $MO\omega_1$ et $AO\omega_1$ sont égaux ; par conséquent, comme l'angle $\omega A\omega_1$ est droit, le côté $A\omega_1$ est incliné de 45° sur AT. Le lieu du centre ω_1 est donc la droite AB'.

On verrait de même que le lieu du centre ω_2 est la droite A'B' et que celui du centre ω_3 est la droite A'B.

Donc, *le lieu complet des centres des quatre cercles inscrit et exinscrits se compose des quatre côtés du carré* ABA'B'.

On peut encore remarquer que si T' est le point de rencontre de MT avec BB', le lieu des centres des quatre cercles inscrit et exinscrits au triangle OMT' se compose des côtés du même carré ABA'B'.

Solution géométrique analogue par M. Polak (Bruxelles), Hacken, Mandart Fritz Donner (Melle), Delahaye (Roye), Mlle De Haas (Rotterdam), Déprez (Tournai) et Decamps.

Démonstration analytique par MM. Verdeyen *et* Lippens (athénée de Gand) et M. Polak. Soient x', y' les coordonnées de M ; les équations de OM, MT étant $yx' - y'x = 0$, $xx' + yy' - r^2 = 0$, la condition que le point (x, y) du lieu est équidistant de OT, OM, MT donne

$$y = \pm\frac{yx' - y'x}{r} = \pm\frac{xx' + yy' - r^2}{r}.$$

De ces égalités, on tire en prenant les signes supérieurs

$$x' = \frac{ry^2 + rxy + r^2x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{ry^2 - rxy + r^2y}{x^2 + y^2};$$

ces valeurs étant substituées dans l'équation $x'^2 + y'^2 = r^2$, on obtient

$$y^4 - x^4 + 2ry^3 + r^2y^2 + 2rx^2y + r^2x^2 = 0,$$

ou

$$(y^2 + x^2)(x + y + r)(-x + y + r) = 0.$$

D'autres combinaisons de signes donnent

$$(y^2 + x^2)(x + y - r)(-x + y - r) = 0.$$

Le lieu proprement dit se compose donc des droites

$$x + y = \pm r, \quad x - y = \pm r.$$

Autre solution analytique par M. Decamps. — M. Déprez accompagne sa solution des remarques suivantes : 1° La projection de O sur la bissectrice de l'angle OTM décrit une parallèle à OA (théorème connu). 2° Cette bissectrice enveloppe une parabole de foyer O. 3° Le point de Lemoine du triangle OMT décrit une ellipse. 4° Le centre de gravité, le centre du cercle des neuf points, les centres du cercle de Brocard du triangle OMT décrivent des quartiques.

ˣQUESTIONS D'EXAMEN.

601. Mettre le produit

$$P = (x^2 + y^2 + z^2)(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2)$$

sous la forme d'une somme de quatre ou de trois carrés (Comparer *J. M. E.*, 1893, p. 127).

Dans l'identité de Lagrange

$$(x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2)$$
$$= (xx' + yy' + zz')^2 + (yz' - y'z)^2 + (zx' - z'x)^2 + (xy' - x'y)^2,$$

faisons d'abord

$$x' = yz, \quad y' = zx, \quad z' = \pm xy;$$

nous aurons

$$P = (3xyz)^2 + x^2(y^2 - z^2)^2 + y^2(z^2 - x^2)^2 + z^2(x^2 - y^2)^2$$
$$= (xyz)^2 + x^2(y^2 + z^2)^2 + y^2(z^2 + x^2)^2 + z^2(x^2 - y^2)^2.$$

L'hypothèse

$$x' = zx, \quad y' = \pm xy, \quad z' = yz$$

donne

$$P = (zx^2 \pm xy^2 + yz^2)^2 + y^2z^2(y \mp x)^2 + x^2z^2(z - y)^2 + x^2y^2(x \pm z)^2.$$

Enfin, si nous posons

$$x' = zx, \quad y' = yz, \quad z' = \pm xy,$$

il vient

$$P = y^2(xy \mp z^2)^2 + x^2(xy \mp z^2)^2 + z^2(x^2 + y^2 \pm xy)^2.$$

603. Résoudre l'équation

$$\sqrt{x^2 - 2ax\cos\alpha + a^2} + \sqrt{x^2 - 2bx\sin\alpha + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Réponse :

$$x = \frac{ab}{a\sin\alpha + b\cos\alpha}. \qquad \text{(A. C.)}$$

604. Les seuls nombres de trois chiffres tels que le produit du chiffre des dizaines par le chiffre des unités soit égal au nombre formé les deux premiers chiffres à gauche, sont 126, 153, 246, 255. 357, 366, 459, 486.

(*Journal de Vuibert.*)

QUESTIONS PROPOSÉES.

601. On donne deux droites OX, OY et deux points A, D. Une sécante quelconque menée par D rencontre OX, OY aux points B, C. Étudier synthétiquement les enveloppes des hauteurs BB', CC' du triangle ABC, les lieux des points B', C', de l'orthocentre H de ABC et du centre O' du cercle circonscrit? (J. N.)

602. Par un point P, donné dans le plan du triangle ABC, on peut mener deux transversales d'_a, d''_a, telles que leurs points de rencontre A', A'' avec BC soient les milieux des segments interceptés par l'angle BAC. Soient (d'_b, d''_b), (d'_c, d''_c) les transversales analogues par rapport aux angles B, C et soient (B', B''), (C', C'') leurs points de rencontre avec CA, AB. Démontrer que les six points A', A'', B', B'', C', C'' sont sur une même conique. Trouver l'équation de cette courbe en fonction des coordonnées trilinéaires du point P. (Max Greiner.)

903. On considère une ellipse (E) et l'ellipse (E') ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée de (E). Si d'un point quelconque de (E') on abaisse des normales sur (E), les six pôles des droites joignant les pieds des normales ont leur centre des moyennes distances au centre commun des deux ellipses. (E. N. Barisien.)

904. La tangente en un point M d'une parabole semi-cubique rencontre la courbe en un autre point M'. Du point M on peut mener à la courbe une seconde tangente dont le point de contact est T. Lorsque le point M se déplace sur la courbe, la droite M'T enveloppe une autre parabole semi-cubique ayant même axe et même point de rebroussement que la première. (E. N. Barisien.)

905. Soient A', B', C', F les points où le cercle inscrit au triangle ABC touche les côtés BC, CA, AB et le cercle des neuf points. Démontrer que F et le centre de gravité G' du triangle A'B'C' sont réciproques par rapport au cercle de Brocard, et que F est la projection de G' sur la tangente menée par le point de Steiner à l'ellipse maximum circonscrite.

(Morley.)

906. Démontrer que

$$\frac{1}{1^4.3^4}+\frac{1}{5^4.7^4}+\frac{1}{7^4.9^4}+\cdots=\frac{1}{1536}(\pi^4-6\pi^3+30\pi^2-60\pi).$$

(Barniville.)

907. On considère une ellipse E et un triangle équilatéral inscrit ABC. La circonférence circonscrite à ce triangle coupe E en un quatrième point P. Démontrer que les trois ellipses homothétiques à E et ayant un contact du second ordre avec le cercle ABC respectivement en A, B, C passent par P. (L. Dessaint.)

908. Soit S_p la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des n premiers nombres entiers. Démontrer que

$$S_5=\tfrac{4}{5}S_1^2(S_1-1)+S_3. \qquad \text{(A. C.)}$$

Rectifications. N° de décembre 1893. *Notice sur Ribaucour.* C'est par erreur que nous avons dit que le Mémoire de Ribaucour, couronné par l'Académie de Paris n'avait pas été publié. Il a paru dans le *Journal de Liouville* (1891), (4), VII, 5-108, 219-270). — Page 279, c'est par erreur aussi que les énoncés des n^os^ 594, 595, 596 sont attribués au *Journal de M. Vuibert;* ils ont été extraits du *Bulletin scientifique de* M. E. Lebon (Voir les solutions de ces questions, pour 594, 7^e^ a., page 304 ; pour 595, 7^e^ a., pages 132 et 164; pour 596, 7^e^ a. page 73). — Page 280, question 896, lire : le plus petit multiple commun des nombres etc.

NÉCROLOGIE.

EUGÈNE-CHARLES CATALAN

(1814-1894)

Au moment de mettre sous presse, nous apprenons la mort de notre vénéré maître et ami EUGÈNE-CHARLES CATALAN. Il a été emporté, après quelques jours de maladie, par une pneumonie aigue, aujourd'hui 14 février 1894, à six heures du matin. La digne compagne de sa vie, qui avait partagé avec lui les bons et les mauvais jours pendant plus d'un demi-siècle, l'avait précédé de quelques jours dans la tombe : elle était décédée le 11 février, au soir.

Il n'est pas nécessaire de rappeler aux lecteurs de *Mathesis*, dont CATALAN était l'un des plus fidèles collaborateurs, quels sont les travaux scientifiques du géomètre que la science vient de perdre : nous avons publié, dans le tome V de ce recueil, une étude étendue de l'un de nous sur l'ensemble de ses recherches jusqu'en 1884.

Pendant les dix années qui ont suivi, CATALAN a employé les loisirs de sa verte vieillesse à réunir, dans trois volumes de *Mélanges mathématiques*, les innombrables notes qu'il avait publiées antérieurement et il a complété plusieurs de ses grands mémoires d'analyse. Parmi ses travaux de cette époque, il faut citer particulièrement la suite de ses recherches sur les polynômes X_n de Legendre, où l'on trouve des idées nouvelles et fécondes qu'il n'avait pas rencontrées dans ses premières études sur ce sujet.

Quelques-uns des écrits de M. CATALAN assurent à son nom une renommée durable : nous citerons, avant tout, ses *Recherches sur quelques produits infinis* et son *Mémoire sur les polyèdres semi-réguliers*, deux œuvres qui donnent une juste idée de son talent mathématique et le montrent également bien doué comme analyste et comme géomètre.

P. M. et J. N.

SUR DEUX CLASSES DE SURFACES QUI SE CORRESPONDENT;

par M. S. MANGEOT, Docteur ès Sciences, professeur au lycée de Troyes (France).

Je me propose le problème qui suit : Étant donnés trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, déterminer deux surfaces σ, σ' telles qu'en menant, de l'une à l'autre, une corde quelconque δ parallèle à Oz, les normales élevées sur les deux surfaces, aux deux extrémités de la corde δ, fassent deux angles égaux avec chacune des trois droites Ox, Oy, Oz, sans que toutefois ces normales appartiennent à un même plan quand δ n'est pas nulle.

Je rapporte les deux surfaces aux axes Ox, Oy, Oz; je considère, à l'égard de chacune d'elles, la coordonnée z comme fonction des deux autres coordonnées x, y, et je désigne par p, q, r, s, t et p_1, q_1, r_1, s_1, t_1, les dérivées partielles du premier et du second ordre de ces deux fonctions.

Les conditions imposées aux surfaces σ, σ' s'expriment par les relations

$$p = \pm p_1, \quad q = \mp q_1.$$

On en tire $s = 0$; d'où les formules

$$(1) \qquad \begin{cases} z = f(x) + \varphi(y) + \text{const.}, \\ z = \pm f(x) \mp \varphi(y) + \text{const.}, \end{cases}$$

pour représenter les deux surfaces cherchées σ, σ'; f et φ désignent deux fonctions arbitraires.

On pourrait aussi définir ces deux surfaces par les équations

$$(2) \qquad \sigma' = cf(x)\,\varphi(y), \quad \sigma' = \sigma'\,[f(x)]^{\pm 1}\,[\varphi(y)]^{\mp 1}.$$

Dans les formules qui précèdent, les signes supérieurs se correspondent, ainsi que les signes inférieurs.

Voici quelques propriétés des surfaces σ, σ'.

L'addition et la soustraction des formules (1) montrent que le lieu du milieu de la corde δ est un cylindre, et que l'intersection des deux surfaces σ, σ' se compose de courbes planes, qui sont des sections droites de ce cylindre.

On a

$$\iint\sqrt{1+p^2+q^2}\,dxdy = \iint\sqrt{1+p_1^2+q_1^2}\,dxdy,$$

$$\frac{(1+p^2+q^2)^2}{rt-s^2} = -\frac{(1+p_1^2+q_1^2)^2}{r_1t_1-s_1^2},$$

le champ d'intégration étant le même pour les deux intégrales. Ceci signifie que tout cylindre parallèle à Oz découpe deux aires égales sur les deux surfaces σ, σ', et que la courbure totale des deux surfaces est la même aux deux extrémités de la corde δ, pour toutes les positions de cette corde.

Celles des surfaces σ, σ' qui sont des quadriques sont les deux paraboloïdes, l'un elliptique, l'autre hyperbolique, que définissent les relations

$$z = ax^2 + by^2 + \text{const.}, \quad z = \pm ax^2 \mp by^2 + \text{const.}$$

Si dans les formules (1) ou (2), on remplace les premiers membres par une même fonction quelconque de z, elles définiront deux surfaces Σ, Σ' possédant encore la même propriété des normales que σ et σ', mais seulement en leurs points communs, résultat qui s'énonce ainsi :

En tout point de chacune des courbes planes suivant lesquelles elles se rencontrent, les deux surfaces Σ, Σ' coupent sous des angles égaux le plan de cette courbe.

Comme exemples de surfaces Σ, Σ', on peut citer l'ellipsoïde et l'hyperboloïde qui ont les mêmes plans principaux avec des longueurs d'axes proportionnelles. Telles sont aussi, parmi les surfaces transcendantes, les deux suivantes :

$$\sin x = a\frac{\cos y}{\operatorname{tg} z}, \quad \sin x = b\frac{\operatorname{tg} z}{\cos y}.$$

On pourrait utiliser, dans certains cas, la propriété des normales qui lie les deux surfaces σ, σ', ou les deux surfaces Σ, Σ', pour la construction du plan tangent à l'une d'elles : il est bien évident que si l'on sait déterminer le plan tangent à l'une des deux surfaces par un procédé particulier, on saura, en vertu de cette propriété, résoudre la même question pour l'autre surface. Afin d'en donner une application toute simple, je suppose que l'on ait à construire la normale en un point m du paraboloïde isoscèle, défini par son paramètre principal a, son sommet O, son axe Oz, et ses plans de symétrie zOx, zOy. Je projette m en m'

sur Oz; je construis le symétrique m'' de m par rapport au plan zOx, et je prends $m'n = a$ sur Oz, m' étant entre O et n. La parallèle menée par m à la droite $m''n$ est la normale demandée. Ceci résulte de la construction de la normale au paraboloïde de révolution.

QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE;

par M. G. DE ROCQUIGNY.

(Suite; voir *Mathesis*, (2), III, pp. 112 et 164).

33. Trouver les sommes

$$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+n(n+1)(n+2),$$
$$1.2.3+3.4.5+5.6.7+\cdots+(2n-1)2n(2n+1),$$
$$1.2.3+4.5.6+7.8.9+\cdots+(3n-2)(3n-1)3n,$$
$$1.3.5+3.5.7+5.7.9+\cdots+(2n-1)(2n+1)(2n+3),$$
$$1.3.5+5.7.9+9.11.13+\cdots+(4n-3)(4n-1)(4n+1),$$
$$1.3.5+7.9.11+13.15.17+\cdots+(6n-5)(6n-3)(6n-1).$$

Réponses :

$$\tfrac{1}{5}n(n+1)(n+2)(n+3),\quad n(n+1)(2n^2+2n-1),$$
$$\frac{3n(n+1)}{2}\left[\frac{3n(3n-1)}{2}-1\right],\quad n(n+2)(2n^2+4n-1),$$
$$2n(n+1)(8n^2-5)+3n,\quad 3n^2(18n^2-13).$$

34. Le quadruple de la somme

$$(n^3+1)+(n^3+2)+(n^3+3)+\cdots+(n+1)^3$$

est égal au produit d'une somme de trois carrés par une somme de trois cubes.

On trouve

$$[n^3+(n+1)^3+1][n^2+(n+1)^2+(2n+1)^2].$$

35. Le quadruple de la somme

$$(n^4+1)+(n^4+2)+(n^4+3)+\cdots+(n+1)^4$$

a pour expression

$$[(n+1)^4+n^4+1][(2n+1)^3+(2n+1)].$$

25. Le quadruple de la somme

$$(n^5+1)+(n^5+2)+(n^5+3)+\cdots+(n+1)^5$$

a pour expression

$$[n^5+(n+1)^5+1]\,[(3n^2+3n+1)^2+(n^2+n)^2+(2n+1)^2].$$

26. Quels sont les deux derniers chiffres de 2^{999}?

Les deux derniers chiffres des puissances successives de 2 sont

02, 04, 08, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24,
48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76,
52, 04, ...

ils présentent une période de 20 termes, c'est-à-dire 2^{20n+r} et 2^r sont terminés par les deux mêmes chiffres, excepté lorsque $r=1$. D'après cela, 2^{999} a les deux mêmes chiffres à droite que 2^{19}; ces chiffres sont donc 8, 8.

Les trois derniers chiffres des puissances successives de 2 ont une période de 100 termes.

27. Trouver les deux derniers chiffres de 3^{999}.

Les deux derniers chiffres des puissances successives de 3 présentant une période de 20 termes :

03, 09, 27, 81, 43, 29, 87, 61, 83, 49,
47, 41, 23, 69, 07, 21, 63, 89, 67, 01,
03, 09, ...

On en conclut que 3^{999} est terminé par 67.

28. Quels sont les derniers chiffres à droite des puissances successives de 5?

Toutes ces puissances, excepté 5^1, se terminent par 25. Elles se terminent alternativement par 125 et 625, à l'exception de 5^1 et 5^2. Les quatre derniers chiffres se reproduisent de quatre en quatre; les cinq derniers, de huit en huit; et ainsi de suite. Les premières puissances font exception.

29. Pour les puissances de 4, le dernier chiffre est alternativement 4 et 6; les deux derniers chiffres sont les mêmes de 10 en 10; les trois derniers, de 50 en 50; les quatre derniers, de 250 en 250; et ainsi de suite. Il y a des exceptions pour 4^{10n+1}, 4^{250n+1}, ...

30. Les puissances successives de 7 se terminent à tour de rôle par 7, 9, 3, 1; les deux derniers chiffres à droite sont les mêmes de 4 en 4;

les trois derniers, de 20 en 20; les quatre derniers, de 100 en 100; et ainsi de suite.

31. Pour les puissances de 9, le dernier chiffre est alternativement 9 et 1; le chiffre des dizaines est toujours pair. Les deux derniers chiffres se reproduisent de 10 en 10; les trois derniers de 50 en 50, etc.

32. Toute puissance m^p d'un nombre impair est 1° la somme de m entiers consécutifs; 2° la somme de $2m$ entiers consécutifs.

Si x est le premier terme de la progression, on doit avoir

$$m^p = \frac{m(2x+m-1)}{2}, \quad \text{ou} \quad m^p = m(2x+2m-1),$$

d'où l'on tire une valeur entière de x.

33. Trouver la somme de $2m+1$ nombres triangulaires consécutifs dont celui du milieu est $\frac{n(n+1)}{2}$.

Réponse :

$$\tfrac{1}{6}(2m+1)[3n(n+1)+m(m+1)].$$

34. Trouver la somme de $2m$ nombres triangulaires consécutifs dont ceux du milieu sont

$$\tfrac{1}{2}n(n+1) \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Réponse :

$$\tfrac{1}{3}m[m^2+3(n+1)^2-1].$$

35. Tout nombre de la forme a^2+ab+b^2 est la somme de trois nombres triangulaires. — Ce nombre peut s'écrire

$$\frac{2a^2+2ab+2b^2}{2} = \frac{(a+b)^2+a^2+b^2}{2}$$

$$= \frac{(a+b)(a+b+1)+a(a-1)+b(b-1)}{2}$$

$$= \frac{(a+b)(a+b-1)+a(a+1)+b(b+1)}{2}$$

La décomposition en trois nombres triangulaires peut donc se faire au moins de deux manières.

Le nombre a^2-ab+b^2 est aussi, de deux manières différentes, une somme de trois nombres triangulaires.

36. Le nombre

$$N = a+b+c+ab+ac+bc+a^2+b^2+c^2$$

est 1° la somme de trois nombres triangulaires; 2° la somme de quatre nombre triangulaires. Ce théorème revient à mettre 2N sous les formes

$$x^2+y^2+z^2+x+y+z, \quad x^2+y^2+z^2+u^2+x+y+z+u.$$

On trouve respectivement,

$$x=b+c, \quad y=c+a, \quad z=a+b,$$

et

$$x=a, \quad y=b, \quad z=c, \quad u=a+b+c.$$

37. La somme des carrés de deux nombres triangulaires consécutifs est 1° un nombre triangulaire; 2° la somme de trois nombres triangulaires. En effet,

$$\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2(n^2-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}.$$

---

*NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Sur la question* 852 (Voir *Mathesis*, (2), III, p. 278). M. Barisien trouve pour l'équation du lieu du point Ω'

$$3(x^2+y^2)^2-8ax(x^2+y^2)+6a^2(x^2+y^2)-a^4=0;$$

il en conclut que la courbe est une quartique ayant un point triple en A. Si l'on fait $y=0$, on trouve une équation ayant une racine triple $x=a$; mais le point A est un rebroussement et l'axe Ox est la tangente en ce point. On aurait évité cette erreur si l'on avait observé que la courbe, ayant un point double en chacun des points circulaires à l'infini, ne peut avoir en outre un point triple, sans se décomposer en une conique (circonférence) et les deux droites isotropes se coupant sur cette conique.

Pour déterminer les foyers doubles de la courbe, prenons pour axe des y la parallèle à Oy menée par le point $(\frac{2}{3}a, 0)$; l'équation devient

$$27(x^2+y^2)^2-18a^2x^2+30a^2y^2+8a^3x-a^4=0.$$

On voit facilement que deux foyers doubles réels sont placés sur l'axe des x aux points $(\pm\frac{2}{3}a, 0)$, et que deux foyers imaginaires ont pour coordonnées $(0, \pm\frac{2}{3}ai)$. (Extrait d'une lettre de M. V. Retali.)

2. Théorème. *Si l'on ajoute* 1 *à chacun des termes de la suite des sextuples des nombres triangulaires, on obtient une série telle que la somme de ses termes à partir du premier est un cube.* En effet,

$$(n+1)^3 - n^3 = 1 + 6.\frac{n(n+1)}{2}. \qquad \text{(Laurens.)}$$

3. *Volume du tétraèdre* ABCD (Voir *Mathesis*, 1893, p. 247). Menons par A le plan MN perpendiculaire à AB et projetons CD en EF sur ce plan. Traçons AE, AF et soit δ la hauteur du triangle AEF dont EF est la base; δ est égale à la plus courte distance des arêtes opposées AB et CD. Désignons par α l'angle de CD avec EC ou l'angle que fait CD avec AB. On aura

$$EF = CD \cos (CD, EF) = CD \sin (CD, EC) = CD \sin \alpha.$$

Par suite,

$$ABCD = ABCF = ABFE =$$
$$= \tfrac{1}{3} AB . \text{aire } AFE = \tfrac{1}{6} . AB . EF . \delta = \tfrac{1}{6} . \delta . AB . CD . \sin \alpha.$$

Cette démonstration, extraite de la *Mécanique rationnelle* de M. Appell, nous a été communiquée par un abonné.

4. *Longueur de la bissectrice dans un triangle.* Soient AD, la bissectrice de l'angle A dans le triangle ABC; BE = BD, une longueur portée sur le prolongement de AB; CF = CD, une longueur portée sur CA dans la direction du point A. Les triangles AED, AFD sont semblables et, par suite, $\overline{AD}^2 = AE.AF$. — La bissectrice extérieure jouit d'une propriété analogue (E. Lauvernay, J. M. S., 1894, pp. 4-5).

ERNEST EDOUARD KUMMER (1810-1893).

Ernest-Édouard Kummer naquit à Sorau dans la Basse-Lusace, sur la frontière de la Silésie actuelle, le 29 janvier 1810. Son père, qui était médecin, mourut en 1813 et ce ne fut qu'au prix de grandes privations que sa mère put lui faire entreprendre des études supérieures. Il fréquenta d'abord le gymnase de Sorau, puis se rendit à l'Université de Halle (1828) où il eut Scherk pour principal professeur de mathématiques et où il conquit le grade de docteur le 10 septembre 1831. Il fut d'abord professeur au gymnase de Sorau, puis de 1832 à 1842 à celui de Liegnitz, où il compta Léopold Kronecker parmi ses élèves. En 1839, il fut élu correspondant de l'Académie de Berlin; en 1842, il devint professeur à l'Université de

Breslau; en 1855, il succéda à Dirichlet comme professeur à l'Université et membre de l'Académie de Berlin. Il devint en même temps professeur à l'École militaire et le resta jusqu'en 1874. A l'Université de Berlin, où il professa jusqu'en 1884, il fit des cours publics sur les parties de la science qui ont été l'objet de ses mémoires les plus célèbres; mais en même temps, il faisait des cours moins élevés sur la géométrie analytique, la théorie des surfaces, la théorie des nombres et la mécanique analytique. Ses travaux sur la théorie des nombres, où il est le digne continuateur de Gauss et de Dirichlet, ont été le point de départ de ceux de Kronecker, de Dedekind et de Weber. Kummer est mort le 14 mai 1893 à Berlin (D'après LAMPE, *Naturwissenschaftliche Rundschau*, Braunschweig, 15 juli 1893, pp. 361-364).

M. Hermite a apprécié l'œuvre scientifique du grand géomètre silésien de la manière suivante (C. R., 23 mai 1893, t. CXVI, pp. 1163-1164) :

« En Analyse, on lui doit des recherches approfondies sur la série hypergéométrique, les intégrales définies, la fonction eulérienne et l'évaluation numérique des séries lentement convergentes.

En Géométrie, M. Kummer a le premier considéré une surface de quatrième ordre extrêmement intéressante, à laquelle son nom est attaché et qui a été le sujet de nombreux et intéressants travaux.

En Algèbre, il a obtenu, sous la forme d'une somme de sept carrés, le discriminant de l'équation du troisième degré qui donne les axes principaux des surfaces du second ordre. Ce résultat, on ne peut plus remarquable, a été le point de départ du célèbre mémoire de Borchardt sur l'équation analogue et plus générale dont dépendent les inégalités séculaires du mouvement des planètes.

D'autres écrits concernent la théorie des systèmes de rayons rectilignes et la réfraction atmosphérique, mais c'est l'arithmétique supérieure qui a la part la plus grande dans l'œuvre mathématique de notre confrère.

Les mémoires sur les nombres complexes formés avec les racines de l'unité, la notion originale et profonde des facteurs idéaux, celle des classes non équivalentes, la détermination du nombre de ces classes par une extension des méthodes de Dirichlet, la découverte éclatante de la démonstration du théorème de Fermat pour tous les exposants premiers qui ont une certaine relation avec les nombres de Bernoulli, ont été accueillis par une admiration unanime. Ces recherches se placent avec celles de Dirichlet au premier rang, par leur importance et leur fécon-

dité, dans la science arithmétique de notre époque. L'Académie les a récompensées par le grand prix des sciences mathématiques; peu d'années après, M. Kummer devenait correspondant dans la section de géométrie; il a été élu associé étranger en 1868. »

---

*SUR LE CERCLE DES NEUF POINTS;

par M. Joseph Gillet, professeur à Maredsous.

Il existe bien des manières d'arriver au cercle des neuf points. La suivante, sans être absolument nouvelle, présente un certain intérêt(*).

I. On appelle *quadrangle complet* la figure déterminée par quatre points quelconques A, B, C, D. Le quadrangle comprend trois couples de côtés opposés : AB et CD, AC et BD, AD et BC. Soient X, X', Y, Y', Z, Z' les milieux de ces côtés. Les droites XX', YY', ZZ' sont les *médianes* du quadrangle ABCD.

Les trois médianes se coupent en un même point ω, *qui est leur milieu commun et qui est le centre des moyennes distances des points* A, B, C, D; car les milieux de deux couples de côtés opposés du quadrangle sont les sommets d'un parallélogramme.

II. Si deux côtés opposés d'un quadrangle, par exemple AB et CD sont perpendiculaires, les médianes YY', ZZ', qui correspondent aux autres couples de côtés opposés, sont égales.

En effet, le parallélogramme YZY'Z' dont les côtés sont parallèles à AB et CD, est un rectangle.

III. Soient ABC un triangle quelconque; A_1, B_1, C_1, les milieux des côtés; A_2, B_2, C_2, les pieds des hauteurs; H, le point du concours des hauteurs; A_3, B_3, C_3, les milieux des segments AH, BH, CH.

Deux côtés opposés quelconques, AH et BC, BH et AC, CH et AB, du quadrangle ABCH étant rectangulaires, les trois médianes A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 sont égales et se coupent en un même point ω qui est leur milieu commun. Il en résulte que les six points A_1, B_1, C_1, A_3, B_3, C_3 sont sur une circonférence de centre ω. Les angles $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ étant droits, la circonféreuce passe aussi par les points A_2, B_2, C_2.

(*) Le lecteur est prié de faire les figures. Pour les élèves qui nous liront, nous donnons la définition des termes qui ne se trouvent pas dans les manuels de géométrie élémentaire.

IV. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. D'après un théorème connu, $AA_1 = A_1H = OA_1$; on en déduit facilement que ω est au milieu de la droite OH et que $\omega A_1 = \frac{1}{2} OA$.

Remarques. I. ω est le centre des moyennes distances des quatre points A, B, C, H.

II. O est le centre des moyennes distances des centres I, I', I'', I''' des quatre cercles qui touchent les trois côtés du triangle ABC (Théorème de Beltrami).

BIBLIOGRAPHIE.

Un Paragraphe des coniques, par M. Labenne, ingénieur honoraire des ponts et chaussées, professeur à l'athénée de Charleroi. Une brochure in-8° de 16 p.

Ce petit opuscule est le premier paragraphe d'un traité des coniques que l'auteur se propose de publier. L'ouvrage sera divisé en deux parties dont la première comprendra l'étude géométrique des trois courbes du second degré et la seconde les propriétés particulières à chacune d'elles. Voici la table des matières de la première partie : *Chapitre I.* Éléments des sections coniques : 1. Définitions. Centre, diamètres, axes. 2. Tangente, pôle, polaire. 3. Directrice et foyer. *Chapitre II.* Théorèmes généraux (de Chasles, de Maclaurin et Braikenridge, de Newton, etc.). *Chapitre III.* Relations entre les divers éléments des coniques. 1. Points conjugués. Droites conjuguées. Triangle autopolaire. 2. Cordes menées d'un même point d'une conique. 3. Centre, diamètres conjugués et tangentes. IV. Foyer, directrice et tangente. *Chapitre IV.* Plusieurs coniques dans un même plan. — Un mot sur les coniques semblables, homographiques, homologiques. — Polaires réciproques. *Appendice.* Homographie et involution de deux divisions et de deux faisceaux(*).

L'auteur s'est attaché, nous dit-il dans sa préface, à mettre l'étude géométrique des coniques complètement à la portée des élèves des Athénées en n'employant, pour les démonstrations, que des théorèmes de géométrie connus de ces élèves.

Sans vouloir condamner ce mode d'exposition, nous préférons faire étudier par nos élèves de première scientifique les premiers éléments de géométrie projective, puis la théorie géométrique des coniques fondée sur ces éléments. (J. N.).

Traité d'Arithmétique élémentaire, par C. Bergmans, docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur à l'Athénée royal de Gand, chargé de cours à l'Université de la même ville. Nouvelle édition, complètement revue et corrigée. Gand, Hoste, 1893. (In-8° de 324 pages). Prix fr. 3,50.

Il a été rendu compte de la première édition de cet ouvrage dans *Mathesis*, 1891,

---

(*) On peut souscrire dès maintenant à la première partie de l'ouvrage, au prix de trois francs.

(2), I, 17-19. Voici d'après les indications de l'auteur, les modifications qui ont été introduites dans cette nouvelle édition.

« J'ai refondu l'ouvrage en le mettant absolument d'accord avec le programme officiel en vigueur qui est imprimé en tête du livre.

J'ai revu avec soin toutes les démonstrations; quelques-unes, qui étaient un peu sommaires, ont été complétées par des exemples, des applications et, en général, par tous les développements nécessaires pour qu'un élève intelligent ait, à la simple lecture, une idée exacte de la théorie.

La généralisation des problèmes par les formules a été aussi remaniée; les élèves n'éprouveront plus de peine à s'y habituer, à formuler les règles qu'on en déduit et à les appliquer à des exemples numériques.

Je me suis imposé la tâche de résoudre les nombreux exercices qu'on trouve dans mon traité d'arithmétique; c'est grâce à cette résolution que j'ai pu les mettre dans un ordre tout à fait méthodique.

Le livre V est tout nouveau; il suit fidèlement les différentes parties du programme si important de la 3e scientifique : j'espère que les professeurs accueilleront favorablement cette innovation qui leur permettra de donner, sans perte de temps, un très grand développement à leur enseignement dans cette classe.

J'ai conservé deux appendices; l'un donne une théorie élémentaire des congruences dont les élèves qui se destinent à faire des études scientifiques doivent avoir une certaine notion afin de pouvoir comprendre plus tard quelques théories spéciales de l'arithmétique; l'autre est consacré à un exposé sommaire des machines à calcul et des tables des calculs faits dont tout le monde doit avoir une idée à notre époque.

J'ai conservé les notes après les avoir soigneusement revues; quelques-unes ont été complétées; le professeur y trouvera des matériaux pour éveiller la curiosité et pour développer l'initiative des bons élèves; en les engageant à recourir aux sources, il développera leur initiative et leur fera acquérir l'érudition qui leur manque généralement; ils prendront aussi l'habitude de recherches qui leur seront fort utiles pour se préparer aux études supérieures de l'université.

Enfin, pour faciliter l'application de la loi du 15 juin 1883 sur l'emploi de la langue néerlandaise dans l'enseignement scientifique, l'ouvrage est terminé par un vocabulaire complet, dans les deux langues, des termes spéciaux usités en arithmétique; j'y ai ajouté quelques notes étymologiques dont le professeur pourra tirer parti pour appeler l'attention de ses élèves sur la valeur de quelques termes. »

Précis d'Arithmétique, à l'usage des Écoles moyennes, des cours professionnels, des Écoles normales et des classes d'humanités par l'abbé E. Gelin, docteur en philosophie et en théologie, professeur de mathématiques supérieures au collège Saint-Quirin à Huy. Ouvrage adopté par le conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen. Troisième édition contenant les solutions raisonnées de cent vingt sept problèmes. Namur, Wesmael-Charlier; Huy, chez l'auteur, 1894 (362 p. in-8°). Prix : 3 francs.

Nous avons déjà annoncé la deuxième édition et la traduction flamande de ce manuel dans *Mathesis*, 1888, VIII, p. 273, 1890, X, p. 137-138.

Dans la troisième édition, l'auteur expose, avec de nombreux exemples, plusieurs méthodes générales de résolution des problèmes, savoir : la *méthode de réduction au même coefficient*, à laquelle il rattache la *règle de chaîne* ou *règle conjointe;* la *méthode de fausse position*, et les *solutions rétrogrades*. Il fait aussi connaître la *méthode* THOYER pour le calcul des intérêts ou escomptes, et la *méthode rétrograde* ou *indirecte* pour l'établissement des comptes courants et d'intérêts.

Comme dans la précédente édition, il a marqué d'un astérisque les numéros qui peuvent être omis par les élèves des Écoles moyennes, des Écoles normales d'institutrices et des classes d'humanités, et, en général, par ceux qui ont besoin d'un cours sérieux, mais moins étendu, d'arithmétique.

Nous regrettons que M. Gelin n'ait pas introduit, dans cette nouvelle édition, les problèmes de récapitulation que l'on trouve dans l'édition flamande.

Exercices de Calcul intégral par A. COLLETTE, ancien Élève de l'École normale de Gand, Professeur agrégé de l'enseignement moyen du degré supérieur. Liége, Nierstrasz, 1894 (VIII-112 p. in-8). Prix : 3 francs.

Sommaire. Introduction : formules employées. 1. Intégration immédiate; par décomposition; par substitution; par parties; par réductions successives. 2. Fractions rationnelles. 3. Différentielles algébriques irrationnelles. 4. Différentielles binômes. 5. Fonctions trigonométriques directes. 6. Fonctions exponentielles et transcendantes inverses. 7. Intégrales définies. 8. Intégration des séries (il manque ici, pour chaque exemple, la discussion relative au reste). 9. Quadrature des aires planes. Rectification des courbes. Aire et volume des surfaces de révolution. 10. Intégrales multiples; volumes quelconques; surfaces courbes.

Voici comment cet utile recueil est apprécié dans le J. M. S. (janvier 1894, p. 22).

« Nous signalons avec plaisir à nos lecteurs cet opuscule dans lequel M. Collette a résumé les solutions des questions proposées dans le cours d'Analyse que professe M. Neuberg à l'Université de Liége. Des exercices de calcul intégral, on peut en faire indéfiniment : le difficile, c'est de les grouper de façon que le lecteur puisse saisir ce qu'on peut nommer *un genre* de questions, genre auquel s'applique avec succès une méthode déterminée d'intégration. C'est ce que M. Collette a voulu réaliser, autant que possible, en groupant ses exercices en dix chapitres, chacun d'eux correspondant à un procédé particulier d'intégration. Les nouveaux programmes de l'École Polytechnique, en introduisant la Mécanique dans le cours de Mathématiques spéciales, vont pousser de plus en plus cet enseignement vers la partie élémentaire du calcul intégral. Les professeurs qui ont souvent à proposer à leurs élèves des exercices faciles de calcul intégral, les élèves qui désirent entrer à l'École en possédant déjà la base de ce calcul, trouveront grand profit à la lecture d'un livre sur lequel nous appelons ici leur attention. »

A Treatise on the Analytical Geometry of the Point, Line, Circle, and Conic Sections, containing an Account of its most recent Extensions, with numerous Examples, by JOHN CASEY, LL. D., F. R. S., etc. Second Edition, revised and enlarged. Dublin, Hodges, Figgis, and Co; London, Longmans, Green, and Co, 1893 (XXXII-564 pages in 8).

Nouvelle édition, revue et considérablement augmentée du livre annoncé dans *Mathesis*, 1885, t. v., pp. 254-255. C'est à M. Dowling, gendre de Casey, et à M. Neuberg que l'on doit la publication de cet excellent manuel dont les deux tiers seulement étaient imprimés à la mort de l'auteur.

L'édition précédente complait 330 pages; la présente en a 564. Les principales additions se rapportent à la théorie du centre des moyennes distances, à celles du rapport harmonique, de l'homographie, de l'involution, à la géométrie récente et à l'invariantologie des Coniques. Cette dernière théorie est exposée avec plus de développement que dans la plupart des manuels classiques. Le nombre des exercices a été aussi considérablement augmenté; beaucoup des exercices nouveaux sont originaux.

Voici un aperçu des sujets traités. 1. Le point. 2. La droite. 3. Le cercle. 4. Equation générale des courbes du second degré. 5. La parabole. 6. L'ellipse. 7. L'hyperbole. 8. Recherches diverses. 9. Propriétés générales des coniques. 10. Coordonnées trilinéaires. 11. Théorie des projections. 12. Homographie. 13. Dualité et polaires réciproques. 14. Géométrie récente (*) (pp. 393-461). 15. Théorie invariantologique des Coniques (462-545). — Notes — Index. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 822.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p, 79).

Soient AB, CD *deux diamètres rectangulaires d'une circonférence. On prend les arcs* ACB', B'CA' *égaux au diamètre* AB, *puis les arcs* A'CB'', B'CA'' *égaux à la corde* A'B'; *puis les arcs* A''CB''', B'''CA''' *égaux à la corde* A''B''; *et ainsi de suite. Démontrer que la quantité*

$$AB - A'B' + A''B'' - A'''B''' + \cdots$$

a pour limite le quart de la circonférence donnée. (DE LANTSHEERE.)

(*) Nombre de propositions exposées dans ce chapitre sont empruntées à *Mathesis* et dues à *M. Neuberg* qui a largement collaboré à la seconde édition du livre de Casey.

Solution par M. VLADIMIRESCU. On a

$$\lim [AB - A'B' + A''B'' - A'''B''' + \cdots]$$
$$= \lim [\text{arc } ACB' - \text{arc } A'CB'' + \text{arc } A''CB''' - \cdots]$$
$$= \lim [(\text{arc } ACB' - \text{arc } A'CB'') + (\text{arc } A''CB''' - \text{arc } A'''CB^{IV}) + \cdots]$$

Or,

$$\text{arc } ACB' - \text{arc } A'CB'' = AA' + A'A'',$$
$$\text{arc } A''CB''' - \text{arc } A'''CB^{IV} = A''A''' + A'''A^{IV}, \text{ etc};$$

par conséquent

$$\lim [AB - A'A' + A''B'' - A'''B''' + \cdots]$$
$$= \lim [AA' + A'A'' + A''A''' + \cdots] = \text{arc } AC.$$

Question 829.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 103).

En chaque point M ***d'une ellipse donnée, on construit le centre de courbure*** μ ***de l'hyperbole homofocale qui passe en*** M. ***Trouver le lieu géométrique du point*** μ. (J. NEUBERG.)

Solution par M. BARISIEN. Soient (x, y) les coordonnées du point M, (X, Y) celles du point μ, φ l'angle d'anomalie excentrique dans l'ellipse au point M.

Si a et b sont les demi-axes de l'ellipse, et si A et B sont les demi-axes de l'hyperbole homofocale passant par M, on a pour les équations de ces deux courbes

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2, \tag{1}$$
$$B^2 x^2 - A^2 y^2 = A^2 B^2, \tag{2}$$

avec la condition

$$A^2 + B^2 = c^2. \tag{3}$$

En résolvant les équations (1) et (2) et tenant compte de (3), on trouve

$$x^2 = \frac{a^2 A^2}{c^2}, \quad y^2 = \frac{b^2 B^2}{c^2}.$$

Les coordonnées du point M sont donc

$$x = \frac{a A}{c}, \quad y = \frac{b B}{c}.$$

D'autre part,

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi. \tag{4}$$

Il en résulte que

$$A = c\cos\varphi, \quad B = c\sin\varphi, \tag{5}$$

Ces formules (5) permettent de construire facilement les axes de l'hyperbole (2). Les coordonnées du centre de courbure μ sont

$$X = \frac{(A^2 + B^2)\,x^3}{A^4}, \quad Y = -\frac{(A^2 + B^2)\,y^3}{B^4},$$

En y substituant les valeurs (4) et (5), on trouve

$$X = \frac{a^2}{c^2\cos\varphi}, \quad Y = -\frac{b^2}{c^2\sin\varphi}.$$

En éliminant φ entre ces deux équations, on obtient

$$\frac{a^4}{X^2} + \frac{b^4}{Y^2} = c^4.$$

C'est la quartique connue sous le nom de *Kreuzcurve*.

Solution analytique analogue par MM. Aug. Morel (Creusot) et J. Déprez (Tournay).

Solution par M. Droz-Farny. On a la construction suivante du point μ : La tangente en M à l'ellipse, normale à l'hyperbole, rencontre le grand axe en un point T; la perpendiculaire en T sur MT coupe le rayon vecteur MF en un point Q; enfin la perpendiculaire en Q sur MF rencontre MT au point μ.

Soient x', y' les coordonnées de M; l'équation de MT est

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Comme $OT = \frac{a^2}{x'}$, l'équation de TQ est

$$b^2x'^2y - a^2x'y'x + a^4y' = 0;$$

celle de MF étant

$$y(c - x') + xy' = cy',$$

les coordonnées de Q sont

$$x = \frac{ca^2 - b^2x'}{cx'}, \quad y = -\frac{a^2y'}{cx'}.$$

On en déduit l'équation de $Q\mu$, savoir :

$$(c^2x' - cx'^2)\,x - cx'y'y = a^4 - c(a^2 + b^2)\,x'. \tag{2}$$

Des égalités (1) et (2), on conclut les coordonnées de μ :

$$x = \frac{a^4}{c^2 x'}, \quad y = -\frac{b^4}{c^2 y'};$$

Tirant de là x' et y' et substituant les valeurs dans l'équation de l'ellipse, on obtient pour le lieu cherché

$$\frac{a^6}{c^4 x^2} + \frac{b^6}{c^4 y^2} = 1.$$

Ce lieu est donc la *Kreuzcurve* relative à l'ellipse dont les demi-axes sont $\frac{a^3}{c^2}$, $\frac{b^3}{c^2}$.

M. Dépez a donné une seconde solution analytique de la même question, fondée sur la construction suivante : Si T, T', N, N' sont les points où la tangente et la normale en M rencontrent les axes de l'hyperbole, la droite joignant le centre de courbure de l'ellipse au second point d'intersection des circonférences OTT', ONN' rencontre TT' en μ.

Solution par M. Retali. On démontre aisément qu'au point de rencontre de deux coniques homofocales (C), (C') le centre de courbure de (C) est le pôle par rapport à (C') de la tangente menée en ce point à (C). (Voir Salmon-Fiedler, *Kegelschn.*, page 429).

En effet, soient

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - \mu} + \frac{y^2}{b^2 - \mu} - 1 = 0,$$

les équations de deux coniques homofocales (C), (C') menées par le point M (x', y') : les paramètres λ et μ seront les racines de l'équation en λ :

$$\frac{x'^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y'^2}{b^2 - \lambda} - 1 = 0.$$

La tangente à (C) au point M a pour équation

$$\frac{xx'}{a^2 - \lambda} + \frac{yy'}{b^2 - \lambda} - 1 = 0,$$

et les coordonnées du pôle de cette droite, par rapport à (C), sont

$$X = x' \frac{a^2 - \mu}{a^2 - \lambda}, \quad Y = y' \frac{b^2 - \mu}{b^2 - \lambda};$$

mais le centre de courbure de (C) en M a pour coordonnées

$$X_1 = \frac{x'^3 (a^2 - b^2)}{(a^2 - \lambda)^2}, \quad Y_1 = \frac{y'^3 (b^2 - a^2)}{(b^2 - \lambda)^2},$$

et, en éliminant y'^2 entre les deux équations

$$\frac{x'^2}{a^2-\lambda}+\frac{y'^2}{b^2-\lambda}-1=0, \quad \frac{x'^2}{a^2-\mu}+\frac{y'^2}{b^2-\mu}-1=0,$$

l'on trouve, après quelques réductions,

$$x'^2\,\frac{a^2-b^2}{a^2-\lambda^2}=a^2-\mu,$$

donc

$$X=X_1,\ Y=Y_1.$$

Cela posé, le lieu du point μ est évidemment la courbe polaire réciproque par rapport à l'ellipse donnée, de la développée de cette ellipse; c'est-à-dire une courbe du quatrième ordre et de la sixième classe, symétrique par rapport aux axes de l'ellipse, ayant trois points doubles d'inflexion, dont l'un coïncide avec le centre et dont les deux autres sont à l'infini sur les axes(*).

Pour trouver l'équation de cette courbe, soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

l'équation de l'ellipse donnée; la normale en M est représentée par

$$\frac{a^2x}{x'}-\frac{b^2y}{y'}=c^2,$$

et si nous posons $x'=a\cos\varphi$, $y'=b\sin\varphi$, elle devient

$$\frac{ax}{\cos\varphi}-\frac{by}{\sin\varphi}=c^2;$$

les coordonnées du pôle μ de cette droite, par rapport à l'ellipse, sont :

$$x=\frac{a^3}{c^2\cos\varphi},\quad y=-\frac{b^3}{c^2\sin\varphi};$$

en éliminant φ, nous trouvons pour équation du lieu du point μ

$$\left(\frac{a^3}{c^2x}\right)^2+\left(\frac{b^3}{c^2y}\right)^2=1.$$

(*) On rapprochera cette définition de celle que Terquem (N. A., 1847, p. 394) a donnée de la courbe désignée plus tard sous le nom de *Kreuzcurve*.

Question 833.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 104.)

On considère les extrémités A *et* B *de deux diamètres conjugués quelconques d'une ellipse de centre* O. *Sur la normale en* A, *on porte deux longueurs* AM *et* AM', *égales à* OB. *On projette le point* A *sur* OM *en* P, *et sur* OM' *en* P'. *On projette de même le point* B *sur* OM *en* Q, *et sur* OM' *en* Q'; *chacun des lieux de* P, P', Q, Q' *est une courbe du sixième ordre. Montrer que la somme des aires de ces quatre courbes est double de l'aire de la podaire du centre* O *de l'ellipse.* (Barisien.)

Solution par M. A. Droz-Farny. Soient $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ les coordonnées de A, et $(-a\sin\varphi, b\cos\varphi)$ celles de B; pour fixer les idées, nous supposons A sur le premier quadrant, B sur le second. D'après un théorème connu,

$$OM = a + b, \quad OM' = a - b, \quad \text{angle } MO\,x = M'O\,x = \varphi.$$

Soient aussi $OA = r$, $OB = r'$, *angle* $AOx = \omega$, *angle* $BOx = \omega'$. En projetant OA et OB sur les axes, on a

$$\left\{\begin{array}{ll} a\cos\varphi = r\cos\omega, & b\sin\varphi = r\sin\omega, \\ a\sin\varphi = r'\cos\omega', & b\cos\varphi = r'\sin\omega'. \end{array}\right. \tag{1}$$

1° Soient $OP = \rho$, $PO\,x = \varphi$ les coordonnées polaires de P. On trouve en tenant compte des égalités (1)

$$\rho = r\cos(\varphi - \omega) = a\cos^2\varphi + b\sin^2\varphi; \tag{2}$$

et en passant aux coordonnées rectangulaires

$$(x^2 + y^2)^3 = (ax^2 + by^2)^2.$$

2° Soit $OP' = \rho_1$; comme $OP' = OA\cos AOP'$, on a

$$\rho_1 = r\cos(\omega + \varphi) = a\cos^2\varphi - b\sin^2\varphi, \tag{3}$$

ou

$$(x^2 + y^2)^3 = (ax^2 - by^2)^2.$$

3° Si l'on fait $OQ = \rho_2$, $OQ' = \rho_3$, on trouve

$$\rho_2 = r'\cos(\omega' - \varphi) = (b - a)\sin\varphi\cos\varphi, \tag{4}$$

$$\rho_3 = r'\cos(\omega' + \varphi) = -(a + b)\sin\varphi\cos\varphi. \tag{5}$$

Ces équations se transforment respectivement en

$$(x^2 + y^2)^3 = (a - b)^2x^2y^2,$$
$$(x^2 + y^2)^3 = (a + b)^2x^2y^2.$$

4° Les aires des quatre courbes sont

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\rho_1^2 d\varphi, \quad 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\rho_1^2 d\varphi, \quad 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\rho_2^2 d\varphi, \quad 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\rho_3^2 d\varphi;$$

si l'on substitue les valeurs (2), (3), (4), (5), on obtient pour la somme des aires

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\,d\varphi,$$

ce qui est précisément l'aire de la podaire du centre de l'ellipse.

×Question 846.

(Voir *Mathesis* (2), III, 215; IV, 27).

Tout carré impair, supérieur à 1, *est la somme de deux carrés, ou la somme de trois carrés.*

Solution par M. E. CATALAN. LEMME I. *Tout nombre premier p, de la forme* $4\lambda + 1$, *est la somme de deux carrés.* (FERMAT.)

LEMME II. *Si un nombre premier q, a la forme* $4\mu - 1$, q^2 *est la somme de trois carrés* (*).

Soient, d'après ce qui précède :

$$p = a^2 + b^2, \quad q^2 = f^2 + g^2 + h^2.$$

Supposons :

1° $N = pq$, 2° $N = pp'p''$, 3° $N = qq'q''$, 4° $N = pp'p''qq'q''$, etc.

1° $$N^2 = p^2q^2 = (pf)^2 + (pg)^2 + (hf)^2.$$

2° $$N^2 = p^2p'^2p''^2.$$

Mais, d'après le théorème de Fibonacci (**) :

$$p^2p'^2p''^2 = c^2 + d^2; \quad \text{donc} \quad N^2 = c^2 + d^2.$$

3° $$N^2 = q^2q'^2q''^2,$$

ou $$N^2 = (f^2 + g^2 + h^2)\,q'^2q''^2 = (fqq')^2 + (gq'q'')^2 + (hq'q'')^2.$$

4° $$N^2 = p^2p'^2p''^2q^2q'^2q''^2$$
$$= (fpp'p''q'q'')^2 + (gpp'p''q'q'')^2 + (hpp'p''q'q'')^2 \text{ etc.}$$

(*) Pour ces deux Lemmes, on peut consulter nos *Remarques sur la théorie des nombres et sur les fractions continues* (1893).

(**) $$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = c^2 + d^2,$$
$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2)(a''^2 + b''^2) = (c^2 + d^2)(a''^2 + b''^2) = c'^2 + d'^2, \text{ etc.}$$

En résumé, N^2 étant impair, et supérieur à 1, ce carré est réductible à l'une ou à l'autre des formes

$$a^2+b^2,\quad f^2+g^2+h^2.$$

Remarque. Reprenons les égalités

$$N^2=a^2+b^2,\quad N^2=f^2+g^2+h^2.$$

Multipliant par 4^n, nous aurons

$$(2^n N)^2=(2^n a)^2+(2^n b)^2,$$
$$(2^n N)^2=(2^n f)^2+(2^n g)^2+(2^n h)^2$$

Donc *tout carré pair, supérieur à* 4, *est la somme de deux carrés, ou la somme de trois carrés.*

P. S. *Si un nombre* N *est la somme de trois carrés ou de quatre carrés,* N^2 *est la somme de trois carrés* (*).

24 juin 1893.

Question 859.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 176).

Un cercle (C) *coupe une conique* (Σ) *en quatre points. Par ces quatre points on fait passer une hyperbole équilatère* (H). *Quel que soit le cercle* (C) *le rapport des distances respectives du centre de* (Σ) *aux centres de* (C) *et de* (H), *est constant.* (E. N. Barisien.)

Solution par MM. Droz-Farny, Collette, Gillet, Déprez et Mandart. Les équations de C et Σ étant

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma=0,\quad b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0,$$

toute conique passant par les points l'intersection de C et Σ aura pour équation

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\gamma-\lambda(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2)=0.$$

Cette conique sera une hyperbole équilatère si

$$1-\lambda b^2=\lambda a^2-1\ ;\quad \text{d'où}\quad \lambda=\frac{2}{a^2+b^2}.$$

Les coordonnées des centres de C et de H sont respectivement

$$\alpha,\ \beta\ \text{ et }\ \frac{\alpha}{1-\lambda b^2}=\frac{\alpha(a^2+b^2)}{c^2},\ \frac{\beta}{1-\lambda a^2}=-\frac{\beta(a^2+b^2)}{c^2}.$$

(*) *Remarques sur la théorie des nombres*, p. 28.

Le carré du rapport cherché sera $\frac{c^4}{(a^2+b^2)^2}$. Ce rapport est donc constant.

Remarque. Les centres de C et H décrivent deux figures inversement semblables, ayant pour point double et pour droites doubles le centre et les axes de Σ. (Déprez.)

---

*QUESTIONS D'EXAMEN.

604. Sachant que l'équation

$$f(x, y) = Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0$$

représente deux droites, trouver le produit des distances d'un point donné (x, y) à ces droites.

Soit

$$f(x, y) \equiv (ay + bx + c)(a'y + b'x + c');$$

la quantité cherchée a pour expression

$$\frac{f(x, y)}{\sqrt{(a^2+b^2)(a'^2+b'^2)}} = \frac{f(x, y)}{\sqrt{a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + a'^2b^2}}.$$

Or,

$$aa' = A, \quad bb' = C, \quad ab' + a'b = 2B$$
$$a^2b'^2 + a'^2b^2 = (ab' + a'b)^2 - 2aa'bb' = 4B^2 - 2AC, \text{ etc.}$$

605. Un train de chemin de fer doit effectuer, dans un temps prescrit, un parcours de 600 kilomètres.

Après avoir marché pendant 12 heures, il est obligé de s'arrêter pendant le quart du temps qu'il a encore pour achever son trajet. Il continue alors sa route en augmentant sa vitesse de 5 kil. à l'heure et se trouve encore à 30 kilomètres du lieu de sa destination lorsqu'il devrait y être rendu.

On demande en combien d'heures le trajet devait s'effectuer.

En 24 heures ou en 20 heures, les vitesses étant de 25 kilom. ou de 30 kilom. à l'heure.

606. Le nombre

$$5^{n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$$

est divisible par 23. (*Journal de Vuibert.*)

607. Soit ABCD un carré de centre O. Montrer que les centres des cercles inscrits dans les huit triangles AOB, BOC, COD, DOA, ABC, BCD, CDA, DAB sont les sommets d'un octogone régulier. Rapport des aires de l'octogone et du carré. (*Journal de Vuibert.*)

Soient O_1, O_2 les centres des cercles inscrits aux triangles AOB, ABC. L'angle

O_1OO_2 étant égal à un huitième de 4 droits, il suffit de démontrer que $OO_1 = OO_2$ ou que l'angle $OO_2O_1 = OO_1O_2$.

AO_2 étant la bissectrice de l'angle A du triangle OAB, on a

$$\frac{OO_2}{OB} = \frac{AO}{AO + AB}, \quad \text{d'où} \quad OO_2 = \frac{OA.OB}{OA + AB} = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}.$$

Si E est le milieu de AB, on a

$$\frac{OO_1O_2}{OEB} = \frac{OO_1.OO_2}{OE.OB}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\text{octogone}}{\text{carré}} = 3\sqrt{2} - 4.$$

908. Construire un triangle ABC connaissant deux sommets B, C et le centre O' du cercle des neuf points. (*Journal de Vuibert.*)

Le milieu A' de BC appartenant au cercle ω, on connaît le centre et le rayon. Les pieds des hauteurs BB'', CC'' sont donnés par l'intersection du cercle ω avec le cercle de diamètre BC, ... — Le pied A'' de la hauteur AA'' est à l'intersection du cercle ω avec la droite BC. On peut donc tracer cette hauteur et obtenir le sommet A en décrivant un cercle passant par B, C et ayant pour rayon $2\omega A'$.

La première solution montre qu'on doit avoir $\omega A'$ égal ou supérieur à $\frac{1}{2}$ BC.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***909.** Soit ABCD un trapèze dont la diagonale AC égale la base AB. On projette D en E sur BC; la perpendiculaire élevée au milieu de BE rencontre AC au point G; la parallèle à BC menée par G coupe en H la droite qui unit les milieux des bases AB, CD. Démontrer que HG = BE. (A. C.)

910. Soient M, M' deux points mobiles dans le plan du triangle ABC. Ces points sont constamment en ligne droite avec le sommet A, et les droites BM, BM' rencontrent AC en deux points N, N' symétriques par rapport au milieu du côté AC. La droite CM' coupe BM en M''. Connaissant la tangente à la courbe décrite par M, construire les tangentes aux trajectoires des points M' et M''. (D'Ocagne.)

Même question lorsque les droites BM, BM' sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle ABC. (J. N.)

911. Dans le plan d'un cercle donné, dont le rayon est r, l'on mène deux parallèles dont la distance à une tangente du cercle est $\pm r\sqrt{3}$: les points d'intersection de ces deux parallèles avec le cercle forment sur cette courbe un groupe équianharmonique. (Retali.)

912. L'on mène deux parallèles à un côté d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle, à la distance $\pm \frac{1}{2} r\sqrt{3}$ de ce côté : les points d'intersection de ces deux parallèles avec le cercle forment sur cette courbe un groupe équianharmonique. (RETALI.)

913. Étant donnée une parabole, si l'on décrit un cercle qui passe par le foyer, et dont le centre est sur la directrice : 1° les deux courbes se coupent en quatre points qui forment sur chacune d'elles un groupe équianharmonique; 2° la polaire réciproque de la parabole par rapport au cercle est aussi la polaire réciproque du cercle par rapport à la parabole. (RETALI.)

914. Chaque cercle passant par le centre d'une hyperbole équilatère et ayant son centre sur elle, coupe cette courbe en quatre points qui forment, sur les deux courbes, un groupe équianharmonique. La polaire proque de l'hyperbole par rapport au cercle est aussi la polaire réci-réciproque du cercle par rapport à l'hyperbole. (RETALI.)

×**915.** Soit $T_n = \frac{1}{2} n(n+1)$ le n^e nombre triangulaire; on peut admettre des valeurs entières négatives de n, car $T_{-n} = T_{n-1}$. Démontrer que si $a+b+c=0$, $\alpha+\beta+\gamma=0$, le produit

$$(T_a + T_b + T_c)(T_\alpha + T_\beta + T_\gamma)$$

est une somme de trois nombres triangulaires. (DE ROCQUIGNY.)

×**916.** Mettre l'expression

$$n^2 + (2n-1)^2 + (2n+1)^2$$

sous la forme d'une somme de deux nombres triangulaires.

(DE ROCQUIGNY.)

917. Soient AC une corde fixe d'une circonférence, BD une corde mobile de longueur invariable. Trouver 1° les lieux des points M et N, intersection des couples de côtés opposés (AB, CD), (BC, AD); 2° l'enveloppe de la droite MN. (J. GILLET.)

918. Soit AB un diamètre fixe d'une circonférence. Prenons sur la tangente menée au point M de la circonférence les segments MA', MB' respectivement égaux aux cordes adjacentes MA, MB. Trouver : 1° les lieux des points A', B' lorsque M varie; 2° le lieu du point d'intersection des droites AB' et A'B; 3° le lieu du point de rencontre des droites AA', BB'. (DE ROCQUIGNY.)

RECTIFICATION. *Mathesis*, 1893, (2), III, p. 242, lignes 5, 7, 8, au lieu de n lisez η.

SUR UNE PROPOSITION FONDAMENTALE DU CALCUL ASYMPTOTIQUE;

par M. E. Cesàro, professeur à l'Université de Naples.

Le *théorème d'Analyse*, que j'ai fait connaître récemment dans le *Bulletin de Darboux*, peut être présenté sous une forme un peu différente et plus générale. L'intégrale de $f(x, t)\,dt$, prise entre les limites a et b est une fonction de x, que nous représenterons momentanément par $[a, b]$. Si cette fonction croît à l'infini lorsque x tend vers x_0, il est clair qu'on peut en dire autant de l'une, au moins, des fonctions

$$[a, \tfrac{1}{2}(a+b)], \quad [\tfrac{1}{2}(a+b), b].$$

On en déduit, par un raisonnement très employé, qu'on peut construire une suite infinie de fonctions

$$[a_1, b_1], \quad [a_2, b_2], \quad [a_3, b_3], \ldots\ldots$$

indéfiniment croissantes pour $x = x_0$, et telles que, pour n infini, a_n et b_n tendent vers une limite t_0. Il peut se faire qu'il y ait plusieurs nombres tels que t_0, il peut même arriver qu'il y en ait une infinité; mais, lorsqu'il est possible d'en *isoler* un, t_0, on peut affirmer que toute partie $[\alpha, \beta]$ de l'intégrale $[a, b]$, prise autour de t_0, jouit de la propriété de devenir infinie pour $x = x_0$. Il suffit, en effet, de prendre n assez grand pour que $a_n > \alpha$, $b_n < \beta$, et de remarquer que la fonction $[\alpha, \beta] - [a_n, b_n]$ ne peut devenir infinie pour $x = x_0$ si l'on a eu soin de prendre les nombres α et β suffisamment voisins de t_0 pour qu'ils ne comprennent pas entre eux les nombres $t_1, t_2, \ldots$, analogues à t_0.

Cela étant, supposons que pour les intégrales

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)\,dt, \quad G(x) = \int_a^b g(x, t)\,dt,$$

aux éléments positifs, il n'existe qu'un seul et même nombre t_0, et proposons-nous de trouver la limite du rapport de ces fonctions pour $x = x_0$. Supposons d'abord que le rapport de $f(x, t)$ à $g(x, t)$ tende *uniformément* vers une limite $k(x)$ lorsque t tend vers t_0. Nous pouvons déterminer deux nombres α et β, *indépendants de* x, et assez voisins de t_0 pour que le rapport de $f(x, t)$ à $g(x, t)$ diffère de $k(x)$ de moins de ε, en valeur

absolue, quel que soit ε, et pour toutes les valeurs de t comprises entre α et β. Nous pourrons alors en dire autant du rapport des intégrales

$$\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt, \quad \int_\alpha^\beta g(x,t)\,dt.$$

Les excès de $F(x)$ et $G(x)$ sur ces intégrales sont d'ailleurs des fonctions $f(x)$ et $g(x)$, qui restent finies lorsque x tend vers x_0. Il en résulte que, si l'on prend $x - x_0$ suffisamment petit en valeur absolue, on peut faire en sorte que le rapport des fonctions

$$1 - \frac{f(x)}{F(x)}, \quad 1 - \frac{g(x)}{G(x)}$$

s'approche de l'unité autant qu'on le désire. On aura alors

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt}{\int_\alpha^\beta g(x,t)\,dt} \cdot \frac{1 - \dfrac{g(x)}{G(x)}}{1 - \dfrac{f(x)}{F(x)}} = [k(x) + \theta\varepsilon](1 + \theta'\varepsilon'),$$

en désignant par ε' un autre nombre arbitraire, et par θ et θ' deux nombres compris entre 1 et — 1. La différence entre les fonctions

$$\frac{F(x)}{G(x)}, \quad k(x),$$

peut donc devenir et rester aussi petite qu'on le veut lorsque x tend vers x_0, pourvu que $k(x)$ reste finie aux environs de x_0. Il en résulte que, si $k(x)$ tend vers une limite finie k, pour $x = x_0$, on a aussi

$$\lim_{x=x_0} \frac{F(x)}{G(x)} = k.$$

Ce théorème subsiste encore lorsque l'intervalle d'intégration est infini. Il suffit, pour s'en convaincre, d'effectuer la transformation $2tt' = a(1 + t')$, qui ramène à $(0, 1)$ l'intervalle (a, ∞). En particulier, le théorème est applicable aux séries

$$F(x) = \sum_0^\infty u_n(x), \quad G(x) = \sum_0^\infty v_n(x),$$

dont les termes sont des fonctions de x, qu'on suppose finies autour d'une valeur x_0 de x, qui rend divergentes les deux séries.

Pour ces fonctions, mises sous la forme

$$F(x) = \int_0^\infty u_n(x)\,dt, \quad G(x) = \int_0^\infty v_n(x)\,dt,$$

où $n = [t]$, on peut dire que $t_0 = \infty$. Au contraire, pour les intégrales eulériennes de seconde espèce, c'est $t_0 = 0$ qu'il faut prendre, parce que, quel que soit $a > 0$, la première des intégrales

$$\int_0^a t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \int_a^\infty e^{-t} \frac{dt}{t}$$

croît indéfiniment lorsque x tend vers zéro, tandis que l'autre a une valeur finie.

On sait que Lejeune-Dirichlet a cherché à déterminer asymptotiquement la série $a_1^{-x} + a_2^{-x} + a_3^{-x} + \cdots$ aux environs de $x = 1$, où elle devient divergente, en supposant que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ soient des nombres entiers positifs, dont on connaît la *fréquence* $w > 0$, c'est-à-dire la limite, pour n infini, de la probabilité w_n qu'il y a de rencontrer un de ces nombres parmi les n premiers nombres naturels. Or on a

$$\int_0^\infty t^{x-1} (e^{-ta_1} + e^{-ta_2} + e^{-ta_3} + \cdots) dt = \Gamma(x) \sum_1^\infty \frac{1}{a_n^x}.$$

Par comparaison avec $\Gamma(x-1)$ on voit que

$$\lim_{x=1} (x-1) \sum_1^\infty \frac{1}{a_n^x} = \lim_{t=0} t \sum_1^\infty e^{-ta_n}.$$

Le second membre, lorsqu'on y change e^{-t} en x, équivaut à

$$\lim_{x=1} (1-x) \sum_1^\infty x^{a_n} = \lim_{x=1} (1-x)^2 \sum_1^\infty n w_n x^n.$$

Il est donc égal à w, en vertu d'un *théorème de M. Appell*(*), qui est d'ailleurs un corollaire de notre théorème général. En conséquence,

$$\lim_{x=1} (x-1) \left(\frac{1}{a_1^x} + \frac{1}{a_2^x} + \frac{1}{a_3^x} + \cdots \right) = w.$$

Comme on a, en particulier, $\lim_{x=1} (x-1)\, s(x) = 1$, où

$$s(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \cdots,$$

il est facile d'en déduire une expression asymptotique, remarquablement simple, de la série elliptique

$$1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \cdots$$

(*) *Mathesis* 1893, p. 241.

En effet, si l'on représente par $1 + 2f(q)$ la somme de cette série, on a

$$\int_0^\infty t^{x-1} f(e^{-t})\, dt = \Gamma(x)\, s(2x).$$

Par comparaison avec $\Gamma(x - \frac{1}{2})$ on voit que la limite de $t^{\frac{1}{2}} f(e^{-t})$, pour $t = 0$, ne peut différer, si elle existe, de

$$\lim_{x=\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(x)\, s(2x)}{\Gamma(x - \frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lim_{x=\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)\, s(2x)}{\Gamma(x + \frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Donc

$$\lim_{q=1} (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots) \sqrt{1-q} = \sqrt{\pi}.$$

On obtient de même l'expression asymptotique de la fonction

$$f(q) = q + q^2 + q^4 + q^8 + q^{16} + \cdots,$$

étudiée par M. Catalan, en remarquant que

$$\int_0^\infty t^{x-1} f(e^{-t})\, dt = \frac{2^x \Gamma(x)}{2^x - 1},$$

d'où il suit

$$\lim_{t=0} \frac{f(e^{-t})}{\log t} = \lim_{x=0} \frac{2^x \Gamma(x)}{(2^x - 1)\, \Gamma'(x)} = -\frac{1}{\log 2}.$$

En d'autres termes,

$$\lim_{q=1} \frac{q + q^2 + q^4 + q^8 + \cdots}{\log \dfrac{1}{\log \dfrac{1}{q}}} = \frac{1}{\log 2}.$$

Nous allons chercher maintenant l'expression asymptotique de la *série de Lambert* :

$$\Lambda(q) = \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{1-q^2} + \frac{q^3}{1-q^3} + \cdots$$

dans le voisinage de l'unité. On a

$$\int_0^\infty t^{x-2} \Lambda(e^{-t})\, dt = \sum_1^\infty \int_0^\infty \frac{t^{x-1} dt}{e^{nt} - 1} = \Gamma(x)\, s^2(x).$$

D'autre part,

$$\int_0^\infty t^{x-2} e^{-t} \log t\, dt = \Gamma'(x-1).$$

Donc

$$\lim_{t=0} \frac{t\Lambda(e^{-t})}{\log t} = \lim_{x=1} \frac{\Gamma(x)\,\zeta^2(x)}{\Gamma'(x-1)} = -\lim_{x=1} \frac{(x-1)^2\,\zeta^2(x)}{\Gamma(x)} = -1.$$

Enfin,

$$\lim_{q=1} \frac{\Lambda(q)\log\frac{1}{q}}{\log\log\frac{1}{q}} = -1.$$

Si l'on veut pousser plus loin le calcul, il faut considérer l'intégrale

$$\int_0^\infty t^{x-1}\left(\Lambda(e^{-t}) + e^{-t}\frac{\log t}{t}\right)dt = \Gamma(x)\,\zeta^2(x) + \Gamma'(x-1),$$

dont la valeur peut être mise sous la forme suivante :

$$\Gamma(x)\left(\zeta^2(x) - \frac{1}{(x-1)^2}\right) + \frac{\Gamma'(x)}{x-1}.$$

Or on a

$$\lim_{x=1}\left(\zeta(x) - \frac{1}{x-1}\right) = C, \quad \lim_{x=1}\Gamma'(x) = \Gamma'(1) = -C,$$

C étant la *constante d'Euler*. Donc le produit de $x-1$ par l'expression considérée tend vers C. Il en résulte

$$\lim_{t=0}(t\Lambda(e^{-t}) + e^{-t}\log t) = C\,; \quad \text{etc.}$$

Remarquons, pour finir, que le cas de plusieurs nombres $t_0, t_1, t_2, \ldots$, en nombre fini, se ramène immédiatement au cas d'un seul nombre. Il suffit de partager l'intégrale donnée en plusieurs autres, convenablement choisies, et de transformer les intervalles correspondants en l'un d'eux, de telle sorte que les nombres $t_1, t_2, t_3, \ldots$ se transforment tous en t_0. Considérons, par exemple, l'intégrale

$$F(x) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1} f(t)\,dt,$$

où $f(t)$ représente une fonction finie dans l'intervalle (0,1), aux extrémités duquel elle tend à prendre les valeurs k_0 et k_1. On a ici à considérer, pour x tendant vers zéro, les nombres $t_0 = 0$, $t_1 = 1$;

mais on est immédiatement ramené au cas d'un seul nombre en mettant l'intégrale sous la forme

$$F(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{x-1}[f(t)+f(1-t)]\,dt.$$

D'ailleurs, l'intégrale de $t^{x-1}dt$, entre les limites 0 et $\frac{1}{2}$, est égale à $\frac{1}{x.2^x}$; donc

$$\lim_{x=0} xF(x) = \lim_{t=0}[f(t)+f(1-t)] = k_0 + k_1.$$

C'est bien ce qui arrive, par exemple, lorsque $f(t) = 1$; car

$$F(x) = \frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{2\Gamma^2(x+1)}{x\Gamma(2x+1)}, \quad \lim_{x=0} xF(x) = 2.$$

Plus généralement, si l'on considère la fonction

$$F(x) = \int_a^b [\varphi(t)]^{x-1} f(t)\,dt,$$

où $\varphi(t)$ est, comme $f(t)$, une fonction finie quelconque, n'ayant dans l'intervalle (a, b) que des racines simples, on peut écrire

$$\lim_{x=0} xF(x) = \varepsilon_a \frac{f(a)}{\varphi'(a)} - \varepsilon_b \frac{f(b)}{\varphi'(b)},$$

en représentant par ε_t un coefficient généralement nul, qui devient égal à l'unité pour toutes les valeurs de t qui annulent $\varphi(t)$.

APPLICATIONS D'UN THÉORÈME DE CHASLES;

par M. Balitrand.

Le théorème de Chasles : *Les droites qui joignent les points homologues de deux divisions homographiques, enveloppent une conique tangente aux deux droites, bases de ces divisions*, est fondamental dans la théorie des coniques; il peut également recevoir beaucoup d'autres applications. Nous nous proposons de l'appliquer à la construction des tangentes, et d'en déduire quelques théorèmes pour des courbes ou des tranformations de courbes bien connues.

I. Étant données quatre courbes, C, C_1, C_2, C_3, une tangente Δ à la courbe C rencontre C_1, C_2, C_3, en trois points M_1, M_2, M_3; on détermine

sur cette tangente un point M_4 tel que le rapport anharmonique $(M_1M_2M_3M_4)$ soit constant, et l'on se propose de déterminer la tangente à la courbe C_4, lieu du point M_4.

Considérons une autre tangente Δ', et sur cette droite les points M'_1, M'_2, M'_3, M'_4 analogues à M_1, M_2, M_3, M_4 ; les six droites Δ, Δ', $M_4M'_1$..., $M_4M'_4$ sont, en vertu du théorème de Chasles, tangentes à une conique. Si l'on suppose que Δ' se déplace de façon à venir coïncider avec Δ, on voit que les tangentes aux courbes C_1, C_2, C_3, C_4 aux points M_1, M_2, M_3, M_4 et la droite Δ sont tangentes à une conique, et que le point de contact de Δ avec cette conique est précisément le point de contact de Δ avec la courbe C. Cette propriété détermine la tangente à M_4 et pour l'obtenir effectivement, avec la règle seule, il suffit d'appliquer le théorème de Brianchon comme le montre la figure 1.

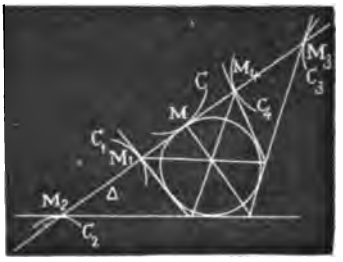


Fig. 1.

On peut, à l'inverse de ce qui précède, considérer les droites qui sont divisées par quatre courbes C_1, C_2, C_3, C_4 dans un rapport anharmonique constant et chercher par le même théorème le point de contact de l'une de ces droites avec son enveloppe. La construction s'effectue encore avec la règle au moyen du théorème de Brianchon.

Si, en particulier, la droite demeure constamment normale à l'une des courbes, C_4 par exemple, elle a pour enveloppe la développée de C_4 ; et le théorème précédent permet de déterminer en un point le centre de courbure de C_4.

Nous allons maintenant faire des applications aux droites divisées par trois courbes dans un rapport constant, à la transformation réciproque, aux cubiques unicursales et à l'hypocycloïde à trois rebroussements.

II. M. Mannheim, dans son *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique*, a considéré les droites qui sont divisées par trois courbes dans un rapport constant; il a déduit, des principes de la géométrie cinématique, la construction du point de contact de l'une de ces droites avec son enveloppe, puis il en a fait l'application à la détermination du centre de courbure de l'ellipse dont il a indiqué plusieurs constructions. Il nous suffit, pour obtenir ce cas particulier, de supposer que la courbe (M_4) coïncide avec la droite de l'infini.

Par suite, étant données trois courbes C_1, C_2, C_3, si une droite Δ les coupe de telle sorte que $(M_2M_1 : M_2M_3) =$ constante (fig. 2), cette droite et les tangentes aux courbes en M_1, M_2, M_3 enveloppent une parabole qui touche Δ au même point M que son enveloppe C. La figure montre comment on peut obtenir avec la règle le point de contact de Δ avec la parabole. Le problème inverse, c'est-à-dire : étant données la courbe C ainsi que les courbes C_1, C_3 déterminer la tangente à la courbe C_2, lieu du point M_2, se résout de la même façon.

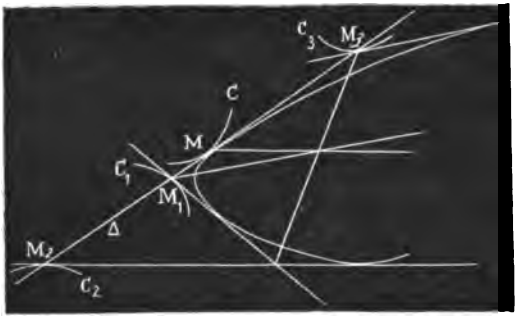


Fig. 2.

On sait que dans l'ellipse la normale en un point M_1 est rencontrée par les axes en des points M_2, M_3 tels que le rapport $(M_1M_2 : M_1M_3)$ reste constant quand M_1 décrit l'ellipse. Donc, la parabole tangente aux axes, à la tangente et à la normale en M_1, touche cette dernière droite au centre de courbure. Pour avoir ce point, il suffit, d'après des propriétés bien connues de la parabole, de prendre le symétrique F de M_1 par rapport à la droite qui joint les milieux des segments interceptés sur les axes par la tangente et la normale et d'élever en F une perpendiculaire à FM. Cette perpendiculaire rencontre la normale au centre de courbure cherché(*).

III. *Application à la transformation réciproque*(**). Dans cette transformation, les points correspondants M_1, M_2 de deux courbes transformées C_1, C_2, sont en ligne droite avec un point fixe S, et vus d'un point fixe O sous un angle droit. Mais les côtés de l'angle droit forment avec les droites isotropes issues de O un faisceau harmonique, et par conséquent sur chaque droite menée par S nous avons quatre points formant une division harmonique.

Les droites qui joignent les points homologues situés sur deux droites infiniment voisines issues de S, enveloppent une conique tangente à ces

---

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

(**) Voir pour cette transformation imaginée par M. de Longchamps, le J. M. S., 1882, pp. 49, 77, 97.

deux droites. C'est-à-dire, qu'il existe une conique ayant pour foyer le point O, qui touche les tangentes menées en M_1, M_2 aux courbes réciproques, et la droite M_1M_2 au point S. Cette propriété détermine la tangente en M_2 à la courbe C_2, mais nous n'avons pas trouvé de moyen bien simple pour la construire (*).

IV. *Transformation orthotangentielle*(**). — On obtient celle-ci en transformant la précédente par polaires réciproques, de telle sorte que les tangentes correspondantes de deux courbes transformées sont rectangulaires et se coupent sur une droite fixe Σ. On voit immédiatement que les points de contact M_1, M_2 de deux tangentes correspondantes sont sur un cercle tangent à Σ au point de rencontre de cette droite avec les tangentes en M_1, M_2.

Nous avons vu que dans la transformation réciproque, les côtés de l'angle droit qui pivote autour du point O forment une involution dont les rayons doubles sont les droites isotropes. On peut, bien évidemment, supposer, sans que le théorème cesse de s'appliquer, que les rayons doubles sont deux droites quelconques : nous allons faire une application de cette transformation réciproque généralisée aux cubiques unicursales et aux courbes du quatrième ordre et de troisième classe, en particulier à l'hypocycloïde à trois rebroussements.

V. *Application aux cubiques unicursales et à l'hypocycloïde à trois rebroussements.* — Si par un point fixe S pris sur la cubique, on mène une sécante variable, les couples de rayons qui joignent le point double O aux points d'intersection M et N de cette sécante et de la courbe sont en involution. Autrement dit, les cubiques unicursales sont anallagmatiques dans la transformation réciproque généralisée; les deux pôles étant, un point arbitraire S pris sur la courbe et le point O. Pour

(*) Une construction très simple a été signalé par M. d'Ocagne (J. M. S., 1885, p. 15). En voici une autre. Soit m_1 le point où la conique touche la tangente menée en M_1 à C_1. Si l'on mène les rayons OS, Om_1 à deux points de la conique et le rayon OM_1 au point d'intersection des tangentes en ces points, on obtient les angles égaux SOM_1, M_1Om_1; d'où un moyen de déterminer le point m_1. Les symétriques des rayons vecteurs OS, Om_1 par rapport aux tangentes correspondantes SM_1, m_1M_1 concourent au second foyer O'. Les deux rayons vecteurs OM_2, $O'M_2$ du point M_2 sont également inclinés sur les deux tangentes issues de M_2; l'une de ces tangentes, M_2S, étant connue, on détermine facilement la seconde. (J. N.)

(**) Cette transformation a été indiquée par M. E. Cesàro (*Mathesis*, (1), III, 248, et X, 142; N. A. M., 1884, p. 545 et 1885, p. 259).

avoir les rayons doubles de cette involution, il suffit de joindre le point 0 aux points de contact A et B des tangentes menées à la courbe par le point S. D'après la remarque précédente, il existe une conique qui touche les droites OA et OB, les tangentes en M et N à la cubique et la droite SMN au point S.

Du point S on ne peut mener que deux tangentes SA, SB à la cubique ; il en résulte que les droites OA et OB forment une involution dont les rayons doubles sont les tangentes en O. Lorsque le point S décrit la cubique, la droite AB enveloppe une courbe. Le même théorème permet de trouver le point de contact de cette droite et de son enveloppe. En effet, la conique inscrite au triangle SAB et qui touche les tangentes au point double, touche la droite AB au point cherché.

Les théorèmes corrélatifs des précédents s'appliquent aux courbes corrélatives des cubiques unicursales; c'est-à-dire aux courbes de troisième classe et de quatrième ordre, et en particulier à l'hypocycloïde à trois rebroussements. Celle-ci s'obtient lorsqu'on choisit comme tangente double la droite de l'infini, les points de contact étant les points cycliques. Une tangente en σ à l'hypocycloïde la rencontre en deux points α et β autres que le point de contact; les tangentes en ce point sont rectangulaires, et le lieu de leur point de rencontre γ est le cercle inscrit à la courbe. Si à ce cercle, l'on adjoint la droite de l'infini, on obtient la cayleyenne de l'hypocycloïde.

Pour cette courbe, on a d'après ce qui précède les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME. I. — *Par un point π pris sur la droite $\alpha\beta$, menons les tangentes $\pi\mu$, $\pi\nu$ à l'hypocycloïde : l'hyperbole équilatère tangente en σ à l'hypocycloïde et passant par les points μ et ν a ses asymptotes parallèles aux tangentes en α et β.*

Lorsque le point π décrit la tangente $\alpha\beta$, le lieu des centres de ces hyperboles est une droite Δ passant par σ et faisant avec $\alpha\beta$ un angle double de celui que fait la tangente en σ avec cette même droite (*).

(*) Prenons, en effet, comme axes la tangente et la normale en σ à l'hypocycloïde et soient : $y - \lambda x = 0$, $\lambda y + x = 0$ les directions des asymptotes. L'équation générale des hyperboles est : $(y - \lambda x)(\lambda y + x) + A y = 0$.

Le lieu de leurs centres est la droite représentée par l'équation

$$y = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2} x.$$

C. Q. F. D.

Si le point π se rapproche de σ de façon à venir se confondre avec lui, on voit que :

L'hyperbole équilatère osculatrice en σ à l'hypocycloïde et ayant ses asymptotes parallèles aux tangentes en α et β passe par le point de contact ρ de la tangente issue de σ.

Si l'on connaissait le centre de cette hyperbole, on aurait ses asymptotes et par suite très facilement le rayon de courbure de l'hypocycloïde(*).

On peut construire ce centre en s'appuyant sur la propriété suivante :

Si l'on joint un point σ d'une hyperbole équilatère à deux points diamétralement opposés, la tangente en σ est symédiane dans le triangle ainsi formé.

Nous savons que le centre cherché se trouve sur la droite Δ ; il nous suffit de mener par σ une droite qui fasse avec $\alpha\beta$, le même angle que $\sigma\rho$ avec Δ, puis par le point ρ une sécante qui, limitée à la droite ainsi déterminée, ait son milieu sur Δ. Le point ainsi obtenu donnera le centre cherché.

Le théorème de Pascal permet aussi de construire le rayon de courbure, puisqu'il permet de trouver, avec la règle seule, le second point d'intersection de la normale en σ et de l'hyperbole équilatère.

A cet effet, menons par ρ une parallèle à la tangente en α, elle rencontre $\alpha\beta$ en M_1 ; menons par M une parallèle MP à la normale en σ, elle rencontre la parallèle menée par σ à la tangente β au point N : ρN coupe la normale en σ au point cherché.

Le second théorème que nous avions en vue est le suivant :

THÉORÈME II. *Le cercle passant par les points α, β, γ (γ, intersection des tangentes en α et β), est tangent en γ au lieu du point γ.*

Autrement dit, ***l'enveloppe des cercles ayant pour diamètres les portions de tangentes à l'hypocycloïde comprises entre la courbe, est le cercle inscrit à la courbe.***

D'après le théorème, bien connu, de Cremona, le diamètre de ces cercles est constant et double du diamètre du cercle inscrit. Par suite, ***le lieu des milieux des portions de tangentes comprises entre la courbe, est le cercle inscrit à l'hypocycloïde.*** (*A continuer.*)

(*) On sait, en effet, que dans l'hyperbole équilatère, le diamètre du cercle osculateur est égal à la portion de normale comprise entre les branches de la courbe.

BIBLIOGRAPHIE.

An elementary Treatise on Modern Pure Geometry, by R. LACHLAN, M. A., Late fellow of Trinity College, Cambridge. London, Macmillan and C°. 1893 (Un vol. in 8° de X — 288 pages). Prix : 9 sh.

L'auteur s'est proposé d'exposer les théories de géométrie pure qui font suite à Euclide, c'est-à-dire les matières qui forment les appendices du Traité de MM. Rouché et de Comberousse; plus les principales propositions de la géométrie récente. L'exposé est très-clair, rigoureux et suffisamment complet; des exercices, en très-grand nombre, très-bien choisis, sont proposés à la fin de chaque paragraphe.

Nous recommandons volontiers aux professeurs et aux élèves cet ouvrage qui renferme une grande richesse de matériaux classés avec méthode. On en peut juger par la table des matières que nous allons résumer. Chap. I. Introduction (Classification des courbes, principe de dualité, principe de continuité, points à l'infini). — Chap. II. Mesure des grandeurs géométriques (Règle des signes en géométrie; mesure des longueurs, des angles et des aires). — Chap. III. Propositions métriques fondamentales (Relations entre les segments d'une même droite ou entre les angles d'un même faisceau; théorèmes élémentaires sur les aires). — Chap. IV. Formes harmoniques. — Chap. V. Théorie de l'involution. — Chap. VI. Propriétés du triangle (Transversales; pôle et polaire; points remarquables; cercle des neuf points; cercles de Lemoine, de Taylor, de Tucker, de Brocard). — Chap. VII. Figures rectilignes (Propriétés harmoniques ou involutives du quadrangle ou du quadrilatère, etc.). — Chap. VIII. Figures perspectives (Triangles homologiques; théorème de Pascal, etc). — Chap. IX. Figures semblables (Centre de similitude; système de trois figures directement semblables). — Chap. X. Du cercle (Pôle et polaire; triangles conjugués; quadrilatère inscrit ou circonscrit; théorèmes de Pascal et de Brianchon). — Chap. XI. Polaires réciproques. — Chap. XII. Système de deux cercles (axe radical, centres de similitude, puissance mutuelle de deux cercles). — Chap. XIII. Faisceaux de cercles. — Chap. XIV. Théorie de l'inversion. — Chap. XV. Systèmes de cercles (cercle coupant trois cercles sous des angles donnés; système de quatre cercles touchés par un même cinquième, etc). — Chap. XV. Rapport anharmonique. (Ponctuelles et faisceaux homographiques, etc.). (J. N.).

×NOTES MATHÉMATIQUES.

5. *Théorème de Trigonométrie.* Si x est un arc compris entre 0 et $\frac{1}{5}\pi$, la différence $\operatorname{tg} x - x$ est comprise entre $\frac{1}{3}x^3$ et $\frac{2}{3}x^3$.

Pour démontrer cette proposition, considérons la fonction

$$y = \operatorname{tg} x - x - \tfrac{1}{3} m x^3,$$

m étant un nombre positif donné. Le signe de la dérivée

$$y' = \operatorname{tg}^2 x - m x^2 = (\operatorname{tg} x + x\sqrt{m})(\operatorname{tg} x - x\sqrt{m})$$

est celui du facteur

$$z = \operatorname{tg} x - x\sqrt{m}.$$

Comme

$$z' = \operatorname{tg}^2 x + 1 - \sqrt{m},$$

nous avons à examiner deux cas :

1° Si m est égal ou inférieur à 1, z' a le signe +; z croît avec x et par suite est positive lorsque x varie de 0 à $\frac{1}{2}\pi$; y' étant positive, y croît; donc pour x compris entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$,

$$\operatorname{tg} x - x - \tfrac{1}{3} m x^3 > 0.$$

En particulier

$$\operatorname{tg} x - x - \tfrac{1}{3} x^3 > 0.$$

2° Si l'on a $m > 1$, z' s'annule pour une valeur $x = \alpha$, définie par $\operatorname{tg}^2 \alpha = \sqrt{m} - 1$; donc z' est négative lorsque $0 < x < \alpha$, et positive lorsque $\alpha < x < \pi$. Comme z s'annule avec x, et est décroissante dans l'intervalle $(0, \alpha)$ mais croissante dans l'intervalle $(\alpha, \frac{1}{2}\pi)$, cette fonction est négative dans le premier intervalle et dans une partie (α, β) du second, β étant la racine de l'équation $\operatorname{tg} x - x\sqrt{m} = 0$. Le signe de y' étant celui de z, on voit que y décroît dans l'intervalle $(0, \beta)$ et croît dans l'intervalle $(\beta, \frac{1}{2}\pi)$; donc y est négative depuis $x = 0$ jusqu'à une certaine valeur $x = \gamma$ comprise entre β et $\frac{1}{2}\pi$ et racine de l'équation

$$\operatorname{tg} x - x - \tfrac{1}{3} m x^3 = 0.$$

Si l'on fait $m = 2$, on trouve que y est négative pour $x = \frac{1}{3}\pi$; donc

$$\operatorname{tg} x - x - \tfrac{2}{3} x^3 < 0,$$

pour x inférieur à $\frac{1}{3}\pi$. (P. Delens, professeur au Lycée de Rouen).

×**6.** *Sur le tétraèdre isoscèle.* On appelle *tétraèdre isoscèle* ou *équifacial* tout tétraèdre dont les arêtes opposées sont égales deux à deux.

Un grand nombre de propriétés de ce tétraèdre ont été signalées par MM. E. Lemoine (*Congrès de Nantes*, 1875; *N. A. M.*, 1880, p. 133) et Genty (*N. A. M.*, 1880, p. 403)(*). On les démontre facilement en partant, comme le fait Cayley (*Collected Papers*, vol. V, p. 550), d'un

(*) Voir aussi *Mémoire sur le tétraèdre*, pp. 14 et 25; *Mathesis*, (1), t. IV, p. 143; *Archives de Grunert*, t. 57; N. C. M. t. II, p. 144; *Ed. Times*, janvier, 1894.

parallélipipède rectangle ABCDA'B'C'D' : Les sommets A, C, B', D' (ou A', C', B, D) appartiennent à un tétraèdre isoscèle.

Si α, β, γ sont les arêtes du parallélipède, les arêtes du tétraèdre sont

$$a = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2}, \quad b = \sqrt{\gamma^2 + \alpha^2}, \quad c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Inversement

$$\alpha^2 = \tfrac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2), \quad \beta^2 = \tfrac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2), \quad \gamma^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2).$$

Le centre O du parallélipipède est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ACB'D'. Il est à l'intersection des droites joignant les centres de deux faces opposées du parallélipipède ou les milieux de deux arêtes opposées du tétraèdre ; ces trois droites sont donc perpendiculaires deux à deux. Comme le tétraèdre peut coïncider avec lui-même de quatre manières différentes, O est aussi équidistant des faces du tétraèdre ; c'est dont aussi le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

Les centres des sphères exinscrites au tétraèdre ACB'D' sont les sommets A', C', B, D du parallélipipède. En effet, les tétraèdres qui ont pour sommet commun le point A' par exemple, et pour bases les faces du tétraèdre ACB'D' sont égaux au sixième du parallèlipipède(*). Les faces du tétraèdre ACB'D' étant égales, A' est à égale distance de leurs plans, etc.

×7. *Construction d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués* AA', BB', *en grandeur et en position*. 1° O étant le centre de la courbe, construisons le parallélogramme OACB, et divisons les droites AO, AC en un même nombre de parties égales. Les points de division étant numérotés, à partir de A, sur AO, 1, 2, 3, ..., sur AC par 1', 2', 3', ..., les droites B'1 et B1, B'2 et B2, ... se coupent sur la courbe.

2° Divisons AC en un certain nombre de parties égales aux points 1, 2, 3, ... ; menons les droites B1, B2, B3, ... qui rencontrent la droite CA' en des points que nous numérotons, *à partir de* C, 1', 2', 3', ... Alors les droites B1 et A1', B2 et A2', ... se coupent sur l'ellipse.

La seconde construction est due à M. d'Ocagne (*N. A. M.*, 1893, p. 351), la première se rencontre dans les auteurs anglais.

(*) Le tétraèdre A' ACB' a même hauteur CB que le parallélipipède et pour base le triangle $AA'B' = \frac{1}{2}$ ABB'A', etc.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 634.

(Voir *Mathesis*, t. VIII, p. 279.)

Si m est un nombre entier, on a

$$\frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2.4.6\ldots(2m+2)}=\frac{1}{2}-\frac{m}{1}\frac{1}{2.4}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1.3}{2.4.6}-\cdots \qquad (1)$$

$$\frac{2.4.6\ldots(2m)}{3.5.7\ldots(2m+1)}=1-\frac{m}{1}\frac{1}{3}+\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{5}-\cdots \qquad (2)$$

(Cl. Servais.)

Solution par MM. Cristesco *et* Decamps. Ces égalités se déduisent des formules classiques

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n}x\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{2n}x\,dx=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4\ldots.2n}\frac{\pi}{2}, \qquad (3)$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2n+1}x\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos^{2n+1}x\,dx=\frac{2.4.6\ldots2n}{3.5.7\ldots(2n+1)}. \qquad (4)$$

1° Si l'on remplace n par $m+1$, la formule (3) donne

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2m+2}x\,dx=\frac{1.3.5\ldots(2m+1)}{2.4.6\ldots(2m+2)}\frac{\pi}{2}. \qquad (5)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\sin^{2m+2}x&=(1-\cos^2x)^m\sin^2x\\&=(1-C_{m,1}\cos^2x+C_{m,2}\cos^4x-\cdots)(1-\cos^2x)\\&=(1-\cos^2x)-C_{m,1}(\cos^2x-\cos^4x)+C_{m,2}(\cos^4x-\cos^6x)-\cdots\end{aligned}$$

Multiplions par dx et intégrons entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$ en faisant usage de la formule (3) pour les intégrales du second membre ; il vient

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{2m+2}x\,dx&=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-C_{m,1}\left(\frac{1}{2}-\frac{1.3}{2.4}\right)\frac{\pi}{2}+C_{m,2}\left(\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)\frac{\pi}{2}\cdots\\&=\frac{\pi}{4}-C_{m,1}\frac{1}{2.4}\frac{\pi}{2}+C_{m,2}\frac{1.3}{2.4.6}\frac{\pi}{2}-\cdots\end{aligned}$$

Égalons les deux valeurs de $\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n+2} x\,dx$, etc.

2° De l'égalité (4), on tire

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-\sin^2 x)^m \cos x\,dx = \frac{2.4.6\ldots 2m}{3.5.7\ldots(2m+1)}.$$

Remplaçons $(1-\sin^2 x)^m$ par son développement ; le premier membre

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos x\,dx - C_{m,1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x \cos x\,dx + C_{m,2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 x \cos x\,dx \ldots$$

$$= \left[\sin x - C_{m,1}\frac{\sin^3 x}{3} + C_{m,2}\frac{\sin^5 x}{5} - \ldots\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}$$

$$= 1 - \frac{m}{1}\frac{1}{3} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{1}{5} - \ldots,$$

La formule (2) est donc démontrée.

M. Joachimescu démontre les égalités (1) et (2) en intégrant les deux membres des formules

$$\frac{1}{(x^2+1)^{m+2}} = \frac{1}{(x^2+1)^2} - \frac{m}{1}\frac{x^2}{(x^2+1)^3} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{x^4}{(x^2+1)^4} - \ldots,$$

$$(1-x^2)^m = 1 - \frac{m}{1}x^2 + \frac{m(m-1)}{1.2}x^4 - \ldots,$$

respectivement entre 0 et ∞, 0 et 1.

M. Déprez observe que la formule (2) est un cas particulier de la suivante, de M. Hermite, démontrée dans le tome VI de la *N. C. M.*, p. 420 :

$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n+1)}\left[1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}x^n\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{3}C_{n,1}(x-1) + \frac{1}{5}C_{n,2}(x-1)^2 + \cdots + \frac{1}{2n+1}(x-1)^n.$$

×Question 838.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 103).

Dans une pile de boulets rectangulaire, quel est le nombre des points de contact de deux boulets? (E. Lemoine.)

Solution par M. Soons (Tirlemont). Soit $p+1$ le nombre de boulets de la file supérieure, chaque file de la $n^{ième}$ tranche contiendra $p+n$ boulets.

Cherchons l'augmentation du nombre de points de contact quand on ajoute une nouvelle tranche, par exemple, la $n^{ième}$.

Tous les boulets de la tranche supérieure, en nombre $(n-1)(p+n-2)$, ont quatre points de contact avec les boulets sur lesquels ils reposent.

Quant aux boulets de la nouvelle tranche, les points de contact qu'ils ont entre eux sont : pour une file en nombre $p+n-1$, ce qui fait pour les n files $n(p+n-1)$ et par suite de la juxtaposition des files $(n-1)$ fois $p+n$ points.

Le nombre total de nouveaux points de contact est donc

$$4(n-1)(p+n-1)+n(p+n-1)+(n-1)(p+n)$$

ou

$$6n^2+6np-10n-5p+4.$$

En faisant n successivement égal à 1, 2, ... on aura les points de la première file, les nouveaux points de contact provenant de l'addition de la 2e, 3e tranche; donc le nombre total sera

$$\Sigma_1^n(6n^2+6np-10n-5p+4)=2n^3+(3p-2)n^2-2pn.$$

×Question 889.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 128.)

x étant un arc moindre que $\frac{1}{2}\pi$, démontrer par des considérations élémentaires que

$$\operatorname{tg} x - x < \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x. \qquad \text{(F. Giudice.)}$$

Solution par M. Absolonne. L'égalité

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \qquad (1)$$

donne

$$\cot x = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}. \qquad (2)$$

Remplaçons x par $\frac{x}{2}, \frac{x}{4}, \cdots, \frac{x}{2^n}$; nous aurons

$$\cot\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{4},$$

$$\cot\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{8} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{8},$$

. . . . . .

$$\cot\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{n+1}}.$$

Ajoutons à l'égalité (2) les suivantes, multipliées respectivement par $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{2^n}$; il vient

$$\cot x = \frac{1}{2^{n+1}}\cot\frac{x}{2^{n+1}} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} \cdots - \frac{1}{2^{n+1}}\operatorname{tg}\frac{x}{2^{n+1}}. \qquad (3)$$

Si n croît indéfinitivement, le terme

$$\frac{1}{2^{n+1}}\cot\frac{x}{2^{n+1}} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{2^{n+1}} : \operatorname{tg}\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

a pour limite x, et l'on trouve le formule connue

$$\frac{1}{x} - \cot x = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \cdots, \qquad (4)$$

dont le second membre se prolonge indéfiniment.

De l'égalité (1), on déduit

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right);$$

par suite, si $\operatorname{tg}\frac{x}{2} < 1$,

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x\,(*).$$

(*) Une figure conduit à la même conclusion. Si N est le milieu d'un arc $AM < \frac{1}{4}\pi$, soient AT, AT′ les tangentes trigonométriques des arcs AN, AM, et soit S le point où la tangente en N coupe le rayon OM. Menons T′Q perpendiculaire sur ON; alors $AT = NS < T'Q < T'T$, ou $AT < \frac{1}{2}AT'$. (J. N.)

On peut donc écrire

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{4} < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} < \frac{1}{4}\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}\frac{x}{8} < \frac{1}{8}\operatorname{tg} x, \cdots;$$

il en résulte que le second membre de (4) est moindre que

$$\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \cdots\right)\operatorname{tg} x \text{ ou } \frac{1}{3}\operatorname{tg} x,$$

Par conséquent,

$$\frac{1}{x} - \cot x < \frac{1}{3}\operatorname{tg} x,$$

ce qui revient à

$$\operatorname{tg} x - x < \frac{1}{3} x \operatorname{tg}^2 x < \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x.$$

Note. La question 839 nous a été suggérée par un article de M. F. Giudice dans le *Periodico di Matematica*, 1893, p. 56. Voici le résumé de cet article.

Dans la formule

$$\operatorname{arc\,tg} p + \operatorname{arc\,tg} q = \operatorname{arc\,tg}\frac{p+q}{1-pq},$$

faisons successivement

$$p = q = \frac{1}{2a}, \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{a}, \quad q = \frac{1}{a(4a^2+3)}$$

nous aurons

$$2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2a} = \operatorname{arc\,tg}\frac{4a}{4a^2-1} = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a(4a^2+3)},$$

ou

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a(4a^2+3)}.$$

Remplaçant a par $2a, 4a, \ldots, 2^n a$, nous obtenons

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2a} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2^2 a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2a(2^4a^2+3)},$$

. . . . . .

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2^n a} = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2^{n+1}a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2^n a(2^{2n+2}a^2+3)}.$$

Additionnons ces égalités après les avoir multipliées respectivement par 1, 2, 2^2, ..., 2^n; il vient

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} = 2^{n+1}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2^{n+1}a} - \sum_0^n 2^i \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2^i a\,(2^{2i+2}a^2+3)}.$$

Faisons croître indéfiniment n; comme

$$\lim 2^{n+1}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2^{n+1}a} = \frac{1}{a}\lim\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2^{n+1}a} : \frac{1}{2^{n+1}a}\right) = \frac{1}{a},$$

nous aurons

$$\frac{1}{a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} = \sum_0^\infty 2^i \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2^i a\,(2^{2i+2}a^2+3)} < \sum_0^\infty \frac{1}{2^{i+2}a^5}$$

ou

$$\frac{1}{a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{a} < \frac{1}{3a^5},$$

ce qui démontre la proposition.

La série (*)

$$\operatorname{arc\,tg}\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \cdots,$$

donne immédiatement

$$\operatorname{arc\,tg}\alpha = \alpha - \theta\frac{\alpha^3}{3},$$

θ étant un nombre compris entre α et 1; un changement de notation conduit ensuite à l'inégalité proposée. (J.N.)

×Question 870.

(Voir *Mathesis*, (2) III, p. 215).

On partage les côtés BC, CA, AB *d'un triangle* ABC, *aux points* A', B', C', *dans un même rapport* $(p : q)$; *soient* A'', B'', C'' *les seconds points de rencontre des droites* AA', BB', CC' *avec la circonférence circonscrite au triangle* ABC. *Calculer en fonction des éléments du triangle* ABC : 1° *les*

(*) Cette série suppose $\alpha < 1$, donc arc tg $\alpha < \frac{1}{4}\pi$. Les démonstrations de MM. Absolonne et Giudice s'appliquent à α compris entre 0 et $\frac{1}{4}\pi$.

On peut rapprocher de la question 839 l'article de M. Delens, p. 72.

longueurs des cordes AA'', BB'', CC''; 2° *les longueurs des cordes* B''C'', C''A'', A''B''. (J. N.)

Solution par MM. Delahaye (Roye) *et* Déprez. 1° Le théorème de Stewart donne

$$c^2 \cdot A'C + b^2 \cdot BA' = a \cdot AA'^2 + a \cdot BA' \cdot A'C;$$

mais

$$A'C = \frac{aq}{p+q}, \quad BA' = \frac{ap}{p+q};$$

donc

$$\overline{AA'}^2 = \frac{(c^2q + b^2p)(p+q) - a^2pq}{(p+q)^2}.$$

D'autre part,

$$A'A'' = \frac{BA' \cdot A'C}{AA'} = \frac{a^2pq}{(p+q)^2 \cdot AA'};$$

on en conclut

$$AA'' = AA' + A'A'' = \frac{(p+q)^2 \overline{AA'}^2 + a^2pq}{(p+q)^2 AA'}$$

$$= \frac{c^2q + b^2p}{\sqrt{(c^2q + b^2p)(p+q) - a^2pq}} = \frac{c^2q + b^2p}{\sqrt{c^2q^2 + b^2p^2 + 2bcpq \cos A}}, \text{ etc.}$$

2° Soit D le point de rencontre de BB'' avec CC''. Les triangles semblables DB''C'', DCB donnent

$$B''C'' = \frac{a.DB''}{DC}.$$

Si l'on considère le triangle ABB' coupé par la transversale C'DC, on trouve facilement

$$\frac{BD}{DB'} \cdot \frac{CB'}{CA} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1, \quad \text{d'où} \quad \frac{BD}{DB'} = \frac{(p+q)q}{p^2};$$

par suite,

$$BD = \frac{(p+q)q}{p^2 + pq + q^2} BB',$$

et par analogie

$$CD = \frac{(p+q)q}{p^2 + pq + q^2} CC'.$$

La valeur de DB″ résulte de

$$DB'' = BB'' - BD$$

$$= \frac{a^2q + c^2p}{\sqrt{c^2p^2 + a^2q^2 + 2acpq\cos B}} - \frac{(p+q)q}{p^2 + pq + q^2}\,BB'.$$

Donc finalement

$$B''C'' = \frac{a(a^2pq + b^2q^2 + c^2p^2)}{\sqrt{a^2q^2 + c^2p^2 + 2acpq\cos B}\,\sqrt{b^2q^2 + a^2p^2 + 2abpq\cos C}}, \text{ etc.}$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

608. Étant donné un parallélipipède rectangle dont les arêtes sont a, b, c, trouver le volume et la surface de l'octaèdre qui a pour sommets les centres des faces du parallélipipède.

Soient ABCD, A′B′C′D′ les bases du parallélipipède; A″, B″, C″, D″ les milieux des arêtes AA′, BB′, CC′, DD′; M, N, P, Q, R, S les centres des faces ABB′A′, BCC′B′, CDD′C′, DAA′D′, ABCD, A′B′C′D′. L'octaèdre se compose de deux pyramides RMNPQ, SMNPQ ayant pour base le parallélogramme MNPQ égal à la moitié du rectangle A″B″C″D″; il a donc pour volume $\frac{1}{6}\,abc$. — La surface de l'octaèdre se compose de huit triangles égaux à RMN; les côtés du triangle RMN sont égaux aux moitiés des diagonales des faces du parallélipipède ou à

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2},\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2},\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{c^2+a^2}.$$

La formule connue,

$$16S^2 = 2\,(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4),$$

donne

$$16\,\overline{RMN}^2 = \tfrac{1}{8}\,\Sigma\,(a^2+b^2)\,(b^2+c^2) - \tfrac{1}{16}\,\Sigma\,(a^2+b^2)^2 = \tfrac{1}{4}\,(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

610. Lorsque m est multiple de p, $x^m - a^m$ est divisible par $x^p - a^p$. Former le quotient. — Lorsque m n'est pas multiple de p, former le quotient et le reste de la division.

611. Résoudre l'équation

$$2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 30.$$

612. A une sphère dont le rayon est de $1^m,15$, on circonscrit un cône droit à base circulaire dont les génératrices sont égales au diamètre de la base. Calculer en décimètres cubes et fraction de décimètre cube le volume du cône.

213. Le nombre $3^{2(n-1)} + 7^n \cdot 2^{2n-1}$ est divisible par 29.

(*Journal de Vuibert.*)

Ce nombre peut s'écrire

$$27^{n-1} + 7^n \cdot 2^{2n} \cdot 2^{n-1}, \quad (29-2)^{n-1} + 28^n \cdot 2^{n-1},$$

$$M \cdot 29 + (-2)^{n-1} + (29-1)^n \cdot 2^{n-1}, \quad M \cdot 29 + (-2)^{n-1} + M \cdot 29 - (-2)^{n-1}.$$

214. Résoudre l'équation

$$\frac{\dfrac{2+x}{1-x} - \dfrac{3-x}{1+x}}{\dfrac{4+x}{1-x}} = \frac{6(4-x)}{16-x^2}.$$

Solution : $x = 7,\ 4,\ -4,\ -1.$

215. Les cercles décrits sur deux médianes BB′, CC′ d'un triangle ABC comme diamètres ont pour axe radical la hauteur AA″. (Rindi.)

Ces cercles passent respectivement par les pieds des hauteurs BB″, CC″, et l'on a

$$AB' \cdot AB'' = AC' \cdot AC'', \quad HB \cdot HB' = HC \cdot HC'.$$

216. On donne une circonférence O et deux points P, Q. Trouver sur la circonférence un point A tel que la corde BC interceptée par les droites AP, AQ soit un maximum ou un minimum.

Le maximum ou le minimum de la corde BC correspond au maximum ou au minimum de l'angle PAQ; A est donc le point de contact de la circonférence O avec une circonférence qui la touche et passe par les points donnés P, Q. (Lampe.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

219. Trouver le lieu d'un point M tels que les points d'incidence des normales abaissées de M sur une parabole donnée et le sommet de cette courbe soient sur une conique ayant M pour centre. (E. N. Barisien.)

220. Résoudre l'équation

$$[\sin(x-\alpha) + \cos(x+2\alpha)\sin\alpha]^2 = 4\sin\alpha\cos x\sin(x+\alpha).$$

(Dickenson.)

221. Soient AH′, BH″, CH‴ les hauteurs d'un triangle ABC, H leur point de concours. On prolonge AB de $BB_1 = AB$, AC de $CC_1 = AC_1$, HB de $BB_1' = HB$, HC de $CC_1' = HC$; de même on prolonge BA de $AB_2 = BA$, CA de $AC_2 = CA$, BH de $HB_2' = BH$, CH de $HC_2' = CH$.

Démontrer : 1° que les points H'', H''', B_1, C_1, B'_1, C'_1 sont sur une même circonférence E_a ; 2° que les points H'', H''', B_2, C_2, B'_2, C'_2 sont sur une même circonférence E'_a ; 3° que la droite $E_aE'_a$ et les deux analogues $E_bE'_b$, $E_cE'_c$ se coupent au centre O_9 du cercle des neuf points de ABC ; 4° que les six points E_a, E'_a, E_b, E'_b, E_c, E'_c sont sur une même circonférence concentrique avec la circonférence O_9 et d'un rayon triple.

(P. J. V.)

922. Étant données deux cissoïdes droites ayant même point de rebroussement et leurs axes perpendiculaires, si les rayons des cercles directeurs des deux cissoïdes ont un produit constant, le lieu du point d'intersection des deux cissoïdes est une lemniscate de Bernoulli.

(E. N. Barisien.)

923. D'un point fixe situé sur la tangente au sommet d'une parabole on mène une sécante quelconque. Les normales aux deux points d'intersection de cette sécante avec la parabole, se coupent sur une autre parabole. (E. N. Barisien.)

924. Le carré de la somme de n carrés est aussi la somme de n carrés. (E. Catalan.)

925. Soit $N = aB^n + bB^{n-1} + cB^{n-2} + \cdots$ un nombre écrit dans le système dont la base est B. Si nous désignons par N_α, N_β, N_γ, ce que devient N quand on remplace B respectivement par α, β, γ, l'expression :

$$\frac{(\beta-\alpha)N_\alpha + (\gamma-\alpha)N_\beta + (\alpha-\beta)N_\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

est un nombre entier, inférieur à B si l'une des quantités α, β, γ est positive. (H. Mandart.)

926. Résoudre l'équation

$$x^4 - 4ax^3 + 2a^2x^2 + 4a^3x + a^4 = 0. \quad \text{(E. N. Barisien.)}$$

927. Trouver pour A et B des valeurs entières telles que les racines des deux équations

$$x^2 + Ax + B = 0, \quad x^2 + Ax - B = 0$$

soient à la fois rationnelles. (Mackenzie.)

APPLICATIONS D'UN THÉORÈME DE CHASLES;

par M. BALITRAND.

(Suite et fin, voir *Mathesis*, (2), IV, pp. 62 à 67.)

VI. Nous allons maintenant exposer quelques applications du théorème suivant (corrélatif de celui que nous venons d'employer) : *Les points d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques se trouvent sur une conique qui passe par les centres des deux faisceaux.*

Mais nous voulons auparavant traiter une question, qui peut être considérée comme une généralisation de la théorie des transversales réciproques dont M. de Longchamps a fait de si multiples et si intéressantes applications. Cette question est la suivante :

On donne deux droites Ox et Oy, et sur ces deux droites deux points M et M', puis l'on prend sur Ox les points A et B, sur Oy les points A' et B' tels que

$$MA = k.M'A', \quad MB = k.M'B'.$$

Les droites AA', BB', MM'' enveloppent une parabole tangente aux axes Ox et Oy. Si les axes se rapprochent indéfiniment et si l'on connaît les positions limites des droites MM', AA', on pourra, au moyen de ce théorème, déterminer la position limite de BB'.

Le problème revient donc à construire une parabole connaissant trois tangentes et le point de contact de l'une d'elles.

Les théorèmes de Pascal et de Brianchon permettent de déterminer cette parabole point par point et tangente par tangente, mais on peut trouver facilement les éléments remarquables de la courbe. Il suffit de remarquer que le théorème de Steiner fournit le moyen de construire la directrice et que le foyer s'en déduit immédiatement(*).

(*) Si une parabole inscrite au triangle ABC touche le côté BC en D, et qu'une droite menée par D coupe AB en B' et AC en C', on peut considérer la parabole comme la limite d'une parabole touchant les quatre droites AB, AC, BC, B'C', lorsque B'C' tournant autour de D tend à se confondre avec BC. La seconde parabole a pour directrice la droite joignant les orthocentres des triangles DBB', DCC' et pour foyer le second point d'intersection des circonférences circonscrites à ces triangles. Passons à la limite, etc. (J. N.)

Ce problème n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du suivant : ***Déterminer les éléments remarquables d'une conique, connaissant quatre tangentes et le point de contact de l'une d'elles.***

On peut trouver le centre de cette conique au moyen de la remarque suivante :

Considérons une conique inscrite à un triangle ABC, le point de contact sur BC étant A'. Dans le quadrilatère ABA'C, dont les côtés BA', A'C font un angle égal à π (ou à zéro), la droite de Newton (lieu des centres des coniques inscrites au quadrilatère) s'obtient en joignant le milieu de BC au milieu de AA'.

Nous pouvons, dans le problème qui nous occupe, employer deux fois cette construction; le centre cherché O est à l'intersection des deux droites de Newton ainsi obtenues.

Nous connaissons alors le diamètre OA' ainsi que la direction du diamètre conjugué de OA'. La longueur de ce dernier peut s'obtenir par le théorème suivant :

Les segments interceptés sur deux tangentes parallèles par une troisième tangente, donnent un produit égal au carré du demi-diamètre parallèle à ces tangentes.

On est alors ramené à un problème classique, puisque l'on connaît deux diamètres conjugués en grandeur et position.

VII. Le théorème cité au début trouve notamment son emploi toutes les fois que, dans une question, s'introduit le déplacement d'un angle de grandeur constante.

On sait, en effet, que les deux côtés d'un angle de grandeur constante forment avec les droites isotropes, issues de son sommet, un faisceau dont le rapport anharmonique est constant. C'est ainsi que ce théorème fournit une démonstration très simple de la proposition fondamentale de la théorie des développoïdes (*).

Si par un point M d'une courbe C, on mène une droite faisant avec la normale un angle constant θ, cette droite, lorsque le point M décrit la courbe C, enveloppe une courbe qui est la développoïde de C sous l'angle θ. On obtient le point où cette droite touche son enveloppe en projetant sur elle le centre de courbure de C au point M. En effet,

(*) Sur les développoïdes, voir N. C. M, t. V, 1879, p. p. 356-363, 398-403, par M. P. Mansion.

pour deux positions infiniment voisines du point M, on a deux angles de même grandeur, et les points d'intersection des côtés homologues sont sur un cercle qui, à la limite, est tangent en M à la courbe C, et qui passe par le centre de courbure de la courbe C relatif au point M et par le point cherché de la développoïde.

VIII. Nous prendrons comme seconde application la question suivante, proposée par M. Neuberg (*Ed. Times*, question 10926).

On donne une courbe C *et une droite* XX'. *La tangente en* A *à la courbe* C *coupe* XX' *en* M; *trouver le point où la bissectrice* MY *de l'angle* AMX *touche son enveloppe* (*).

Considérons la seconde bissectrice MY'. Le faisceau MX, MY, MA, MY' est harmonique, et pour une seconde position du point M on obtient un second faisceau harmonique ayant avec le premier un rayon homologue commun MX. Les points d'intersection des autres rayons sont donc en ligne droite. D'ailleurs les points de contact des bissectrices avec leur enveloppe sont sur un cercle tangent en M à XX'. D'où la construction suivante pour obtenir les points cherchés :

Mener par A une droite, qui, limitée à MY et MY', ait son milieu sur la perpendiculaire MN à XX'. La droite ainsi obtenue est la normale en A à la courbe C. Car, dans le triangle rectangle MYY', MA étant la symédiane se confond avec la hauteur issue de M. Donc YY' est la normale en A à la courbe C.

Soient Σ, Σ' les courbes enveloppées par MY, MY' ; on remarquera l'analogie entre la question précédente et la transformation orthotangentielle.

D'où le théorème suivant : Si l'on abaisse une perpendiculaire MA, sur la droite YY' qui joint deux points correspondants, le lieu du point A est une courbe qui, en ce point, admet précisément pour tangente la droite MA.

IX. Comme dernière application du théorème de Chasles, prenons le déplacement infiniment petit d'une droite.

Si l'on considère deux positions infiniment voisines de la droite, les lignes qui joignent les points correspondants, c'est-à-dire les tangentes

---

(*) Pour résoudre la question il suffit de faire tourner la droite AM autour du point A supposé fixe. Les droites MY, MY' sont alors tangentes à une parabole ayant pour foyer A, pour directrice XX'. (J. N.)

aux trajectoires des points de la droite, enveloppent une parabole. On sait aussi que les normales à ces trajectoires concourent en un point I appelé centre instantané de rotation.

Soient I et I′ deux positions du centre instantané de rotation correspondant à deux positions Δ et Δ′ de la droite. Les normales qui, issues de ces points, aboutissent à des points correspondants sur les droites Δ et Δ′; forment deux faisceaux homographiques; donc le lieu de leurs points de rencontre est une conique passant en I et I′. Si les points I et I′ sont infiniment voisins, les points de rencontre des normales coïncident avec les centres de courbure des trajectoires des points de la droite Δ; et l'on a le théorème suivant : *Dans le déplacement d'une figure plane invariable, le lieu géométrique des centres de courbure des trajectoires des points d'une droite est une conique tangente au centre instantané de rotation à la courbe lieu du centre instantané* (*).

Ce théorème permet de construire le centre de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une figure, quand on connaît les centres de courbure des trajectoires de trois points de cette figure.

Prenons, par exemple, une droite AB de longueur constante, dont les extrémités décrivent deux droites rectangulaires Ox et Oy. Un point quelconque M de la droite décrit une ellipse.

Le centre instantané de rotation est en I, point de rencontre des perpendiculaires élevées en A et B à Ox et Oy; et le lieu du centre instantané est le cercle ayant pour centre O, pour rayon OI. On connaît les centres de courbure des trajectoires des points A et B et du point C milieu de AB.

Ce sont les points à l'infini sur Ox et Oy et l'origine O. Le lieu des centres de courbure des trajectoires des points de la droite AB est donc l'hyperbole équilatère normale en I à la droite OI, passant à l'origine O et ayant ses asymptotes parallèles à Ox et y.

Pour avoir le centre de courbure de la trajectoire du point M, on prend l'intersection de cette hyperbole équilatère avec la droite MI, normale à la trajectoire du point M; ce que permet le théorème de Pascal.

(*) Cette conique porte le nom de conique de Rivals. Les coniques de Rivals pour les différentes droites du plan, ont même cercle osculateur au centre instantané de rotation. Ce cercle osculateur est le symétrique du cercle des inflexions par rapport à la tangente à la courbe lieu du centre instantané.

CONDITIONS POUR QU'UN SYSTÈME DE TROIS AXES SOIT TRIRECTANGLE ;

par M. F. Dauge, professeur à l'Université de Gand.

La livraison de février 1894 des *Nouvelles Annales de Mathématiques* contient une note de M. Appell sur les conditions qui expriment qu'un système de trois axes est trirectangle. La solution de M. Appell est très simple ; néanmoins on peut traiter la même question complètement par une méthode encore plus élémentaire, de la manière suivante :

Soit $Oxyz$ un premier système d'axes et $Ox_1y_1z_1$ un second système, rapporté au premier, ces deux systèmes pouvant d'ailleurs être rectangulaires ou obliques. Désignons par l, m, n *les coefficients de projection* de l'axe Ox_1, c'est-à-dire les coordonnées x, y, z, du point placé sur cet axe à une distance de l'origine égale à l'unité. Soient de même l', m', n' et l'', m'', n'', les coefficients de projection des axes Oy_1, et Oz_1, respectivement. On aura, pour passer du premier système d'axes au second, les formules

$$(1)\quad \begin{cases} x = lx_1 + l'y_1 + l''z_1, \\ y = mx_1 + m'y_1 + m''z_1, \\ z = nx_1 + n'y_1 + n''z_1 ; \end{cases}$$

Les neuf constantes qui entrent dans ces formules sont liées par six équations de condition qui se déduisent immédiatement des expressions, en coordonnées obliques, de la distance d'un point à l'origine et du cosinus de l'angle de deux droites.

Posons :

$$\mathrm{A} = \cos yOz, \quad \mathrm{B} = \cos zOx, \quad \mathrm{C} = \cos xOy,$$
$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{Cos}\, y_1Oz_1, \quad \mathrm{B}_1 = \cos z_1Ox_1, \quad \mathrm{C}_1 = \cos x_1Oy_1 ;$$

on aura les relations :

$$(2)\quad \begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 + 2\mathrm{A}mn + 2\mathrm{B}nl + 2\mathrm{C}lm = 1, \\ l'^2 + m'^2 + n'^2 + 2\mathrm{A}m'n' + 2\mathrm{B}n'l' + 2\mathrm{C}l'm' = 1, \\ l''^2 + m''^2 + n''^2 + 2\mathrm{A}m''n'' + 2\mathrm{B}n''l'' + 2\mathrm{C}l''m'' = 1, \\ l'l'' + m'm'' + n'n'' + \mathrm{A}(m'n'' + n'm'') + \mathrm{B}(n'l'' + l'n'') + \mathrm{C}(l'm'' + m'l'') = \mathrm{A}_1, \\ l''l + m''m + n''n + \mathrm{A}(m''n + n''m) + \mathrm{B}(n''l + l''n) + \mathrm{C}(l''m + m''l) = \mathrm{B}_1, \\ ll' + mm' + nn' + \mathrm{A}(mn' + nm') + \mathrm{B}(ml' + ln') + \mathrm{C}(lm' + ml') = \mathrm{C}_1. \end{cases}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que les axes $Ox_1y_1z_1$ soient rectangulaires, les axes $Oxyz$ étant obliques, s'obtiendront dont en faisant dans les équations (2) $A_1 = B_1 = C_1 = 0$.

Si l'on voulait, comme M. Appell, introduire les neuf cosinus des angles des axes, ce qui est loin de simplifier la question quand il s'agit de coordonnées obliques, on aurait, en désignant ces cosinus par α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$:

$$(3)\quad \begin{cases} \alpha = l + Cm + Bn, \ \alpha' = l' + Cm' + Bn', \ \alpha'' = l'' + Cm'' + Bn'', \\ \beta = Cl + m + An, \ \beta' = Cl' + m' + An', \ \beta'' = Cl'' + m'' + An'', \\ \gamma = Bl + Am + n, \ \gamma' = Bl' + Am' + n', \ \gamma'' = Bl'' + Am'' + n''. \end{cases}$$

Quand les deux systèmes d'axes sont rectangulaires, on doit égaler à zéro les valeurs de A, B, C, en même temps que celles de A_1, B_1, C_1, et l'on retrouve les six relations bien connues relatives à ce cas.

On peut encore écrire les conditions qui viennent d'être établies sous une autre forme.

Désignons les coefficients de projection des axes $Oxyz$, rapportés aux axes $Ox_1y_1z_1$, par λ, μ, ν; λ', μ', ν'; λ'', μ'', ν''; on aura :

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = \lambda x + \lambda' y + \lambda'' z, \\ y_1 = \mu x + \mu' y + \mu'' z, \\ z_1 = \nu x + \nu' y + \nu'' z, \end{cases}$$

avec les équations de condition :

$$(5)\quad \begin{cases} \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 + 2A_1\mu\nu + 2B_1\nu\lambda + 2C_1\lambda\mu = 1, \\ \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 + 2A_1\mu'\nu' + 2B_1\nu'\lambda' + 2C_1\lambda'\mu' = 1, \\ \lambda''^2 + \mu''^2 + \nu''^2 + 2A_1\mu''\nu'' + 2B_1\nu''\lambda'' + 2C_1\lambda''\mu'' = 1, \\ \lambda'\lambda'' + \mu'\mu'' + \nu'\nu'' + A_1(\mu'\nu'' + \nu'\mu'') + B_1(\nu'\lambda'' + \lambda'\nu'') + C_1(\lambda'\mu'' + \mu'\lambda'') = A, \\ \lambda''\lambda + \mu''\mu + \nu''\nu + A_1(\mu''\nu + \nu''\mu) + B_1(\nu''\lambda + \lambda''\nu) + C_1(\lambda''\mu + \mu''\lambda) = B, \\ \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' + A_1(\mu\nu' + \nu\mu') + B_1(\nu\lambda' + \lambda\nu') + C_1(\lambda\mu' + \mu\lambda') = C. \end{cases}$$

Si, dans les équations (5), on fait $A_1 = B_1 = C_1 = 0$, on aura des conditions équivalentes à celles trouvées précédemment. Les coefficients $\lambda, \mu, \nu, \ldots \nu''$, sont d'ailleurs liés à $l, m, n, \ldots n''$, par des relations faciles à trouver.

En effet, si on fait

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

dans les premiers membres des équations (1), les valeurs que prendront

x_1, y_1, z_1, dans les seconds membres de ces équations ne seront autres que λ, μ, ν; on obtient ainsi trois équations d'où l'on peut tirer les coefficients de projection λ, μ, ν, de l'axe Ox en fonction de l, m, n; et en opérant de la même manière pour les axes Oy_1 et Oz_1 on trouve :

$$(6)\begin{cases} l\lambda + l'\mu + l''\nu = 1, & l\lambda' + l'\mu' + l''\nu' = 0, & l\lambda'' + l'\mu'' + l''\nu'' = 0, \\ m\lambda + m'\mu + m''\nu = 0, & m\lambda' + m'\mu' + m''\nu' = 1, & m\lambda'' + m'\mu'' + m''\nu'' = 0, \\ n\lambda + n'\mu + n''\nu = 0, & n\lambda' + n'\mu' + n''\nu' = 0, & n\lambda'' + n'\mu'' + n''\nu'' = 1. \end{cases}$$

On peut, d'une manière analogue, déduire des équations (4) les relations suivantes :

$$(7)\begin{cases} \lambda l + \lambda' m + \lambda'' n = 1, & \lambda l' + \lambda' m' + \lambda'' n' = 0, & \lambda l'' + \lambda' m'' + \lambda'' n'' = 0, \\ \mu l + \mu' m + \mu'' n = 0, & \mu l' + \mu' m' + \mu'' n' = 1, & \mu l'' + \mu' m'' + \mu'' n'' = 0, \\ \nu l + \nu' m + \nu'' n = 0, & \nu l' + \nu' m' + \nu'' n' = 0, & \nu l'' + \nu' m'' + \nu'' n'' = 1. \end{cases}$$

Les relations (7), aussi bien que les relations (6) permettent de calculer les coefficients de projection de l'un des deux systèmes, ceux de l'autre étant donnés.

Enfin, les équations (3) qui déterminent les cosinus des angles des deux systèmes d'axes, peuvent prendre aussi deux formes équivalentes, et l'on peut encore déduire des équations (1) et (2) diverses équations de condition entre les deux systèmes de coefficients de projection, équations qui peuvent d'ailleurs se déduire également des équations (6) et (7) écrites ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE.

Premières leçons d'Algèbre élémentaire. — Nombres positifs et négatifs. — Opérations sur les polynômes; par H. PADÉ, ancien élève de l'École normale supérieure, professeur agrégé de l'Université, avec une préface de J. TANNERY, sous-directeur des études scientifiques à l'École normale supérieure. Paris, Gauthier-Villars et Fils. 1892, XXIII-81 p. in-8°). Prix : 2 fr. 50 c.

Nous ne pouvons donner une meilleure idée de cette importante étude de méthodologie algébrique qu'en en reproduisant l'introduction et la table des matières. Le livre de M. Padé est évidemment destiné aux professeurs; pour les élèves, il vaut mieux qu'ils s'en tiennent à l'exposé de la théorie des quantités négatives comme on la trouve dans l'*Algèbre* de Bertrand.

« *Introduction.* Les éléments sur lesquels se développent tout d'abord les théories de l'Arithmétique sont les *nombres entiers*. Ils constituent le premier ensemble qui

soit l'objet de nos spéculations mathématiques; nous pouvons l'appeler l'ensemble du premier ordre.

Mais déjà, dès la théorie de la division, on se trouve amené à étendre cet ensemble, à adjoindre aux nombres entiers toute une nouvelle catégorie de nombres, les nombres fractionnaires; on obtient ainsi l'ensemble des *nombres rationnels*. C'est l'ensemble du second ordre, dont l'ensemble du premier ordre, celui des nombres entiers ne constitue qu'une partie.

Cet ensemble du second ordre devient de nouveau insuffisant, dès que l'on aborde l'extraction des racines, et l'on doit alors procéder à une nouvelle extension, adjoindre aux éléments déjà introduits une nouvelle catégorie de nombres, les nombres irrationnels ou incommensurables. Ainsi s'obtient l'ensemble du troisième ordre, celui des *nombres rationnels et irrationnels*, qui embrasse celui du second ordre et par suite celui du premier.

L'étude de ces trois premiers ensembles constitue ce que l'on a coutume d'appeler proprement l'*Arithmétique*.

Et cependant on peut aller plus loin et faire voir comment l'ensemble du troisième ordre devient lui aussi insuffisant, comment on est amené à adjoindre à ses éléments toute une nouvelle catégorie de nombres, les nombres négatifs; par cette annexe s'obtient l'ensemble du quatrième ordre, celui des *nombres positifs et négatifs;* c'est le premier de ceux dont l'étude constitue, à proprement parler, l'*Algèbre*, qui apparaît bien ainsi comme l'Arithmétique généralisée, l'*Arithmétique universelle* de Newton.

Cette nécessité d'introduire les nombres négatifs se rencontre lorsque l'on cherche à résoudre les problèmes les plus simples de l'Arithmétique en les *mettant en équations;* on s'aperçoit vite qu'en se bornant au seul ensemble des nombres rationnels et irrationnels, on est dans l'impossibilité d'arriver à des règles générales pour résoudre ces équations; on reconnaît en même temps quelle est la nature des nouveaux éléments qu'il faut introduire pour vaincre cette difficulté, et comment on devra alors modifier les définitions des opérations fondamentales.

Avec l'introduction des nombres négatifs ne se clôt pas la suite des généralisations; la même question qui la nécessite conduit, en effet, à une nouvelle extension de l'ensemble des éléments, à l'introduction des quantités complexes. On constitue ainsi l'ensemble du cinquième ordre auquel appartient celui des nombres positifs et négatifs, et, par suite, chacun des précédents.

Enfin, des questions d'un autre ordre, la représentation symbolique de certaines grandeurs, conduisent encore à de nouvelles généralisations, et ainsi se constitue, sans qu'il soit possible d'en apercevoir le terme, la série des ensembles de plus en plus généraux qui s'imposent successivement à notre étude et qui forment la base de toute l'*Analyse*.

Il ne faut cependant pas croire que plus l'ordre de l'ensemble auquel on s'adresse est élevé, plus l'intérêt qu'il présente est considérable. Des propriétés et des applications nouvelles peuvent, il est vrai, apparaître; c'est ainsi que la continuité, qui est appelée à jouer un si grand rôle dans l'étude des ensembles d'ordre plus élevé,

apparaît avec l'ensemble des nombres rationnels ; quand on est en possession de l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels, on peut mesurer toute grandeur mesurable ; avec les nombres positifs et négatifs on arrive à la représentation des grandeurs à deux sens inverses l'un de l'autre, etc. Mais, par contre, à mesure que les ensembles s'élargissent, les opérations fondamentales auxquelles sont soumis leurs éléments peuvent perdre de leurs propriétés. On le conçoit aisément, puisque c'est en introduisant des éléments nouveaux que l'on passe d'un ensemble à ceux d'ordres plus élevés. Ainsi, pour ne citer qu'un exemple simple, dans l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels, l'extraction de la racine carrée est une opération qui conduit à la connaissance d'un seul nombre ; outre qu'elle n'est plus toujours possible, elle conduit à un résultat ambigu dans l'ensemble des nombres positifs et négatifs.

Comment peut-on procéder à l'étude d'un ensemble déterminé? Deux voies semblent naturellement s'offrir. La première consiste à partir de l'ensemble d'ordre immédiatement inférieur ; à annexer à ses éléments les éléments nouveaux qui doivent être introduits pour obtenir l'ensemble que l'on veut étudier, puis à étendre celles des définitions, celles des propriétés qui, applicables pour l'ensemble qui sert de point de départ, peuvent encore convenir à celui auquel on arrive. Ainsi l'on peut passer, par une sorte de synthèse, de l'ensemble d'ordre le moins élevé, successivement, aux ensembles d'ordres plus élevés. C'est la voie toujours suivie pour les ensembles d'ordre inférieur ; c'est ainsi que, des propriétés des nombres entiers, on conclut d'abord à celles des nombres fractionnaires, puis, réunissant les deux catégories de nombres, on se trouve en possession des propriétés des nombres rationnels, qui forment l'ensemble du second ordre ; c'est ainsi encore qu'on passe d'abord des nombres rationnels aux nombres irrationnels pour conclure ensuite aux propriétés de l'ensemble du troisième ordre qui comprend, à la fois, les deux espèces de nombres. C'est aussi la voie que semble avoir suivie la science elle-même dans son développement, allant du simple au composé ; et cependant ce n'est pas celle qui est suivie pour l'étude des ensembles d'ordre plus élevé.

Ici, dès que l'on a reconnu la nature des éléments qui doivent composer l'ensemble à étudier, on les définit de toutes pièces, pour ainsi dire en bloc, sans distinguer ceux d'entre eux qui correspondront aux éléments de l'ensemble d'ordre inférieur. De même se définissent à nouveau, pour tous les éléments sans distinction, les opérations auxquelles ils doivent être soumis, et ainsi peut être faite, entièrement, l'étude de l'ensemble, sans qu'on l'ait rattaché effectivement à aucun autre. Après seulement on distingue parmi ses éléments ceux qui constituent l'ensemble de l'ordre inférieur, et l'on fait remarquer que les opérations que l'on a définies, appliquées en particulier à ces éléments spéciaux, reproduisent certaines des opérations relatives à cet ensemble. Ainsi, quand on a reconnu la nécessité de l'introduction des quantités complexes, on les définit *a priori*, on définit les opérations d'addition, de multiplication, etc., puis l'on remarque que ces opérations appliquées aux quantités complexes où le coefficient de $\sqrt{-1}$ est nul, quantités qui peuvent être regardées comme constituant l'ensemble des nombres positifs et

négatifs, ne sont autres que ces mêmes opérations définies dans l'étude de cet ensemble.

Cette seconde méthode, qui a tous les défauts des qualités de l'autre, a cependant un côté précieux. Elle a l'avantage de mettre tous les éléments qui constituent l'ensemble à étudier sur un même plan, de leur attribuer, dès le début, un rôle équivalent, et par là de placer sous son véritable jour l'étude nouvelle, que l'on entreprend, d'un ensemble nouveau.

C'est celle que nous avons adoptée pour notre étude des propriétés fondamentales des nombres positifs et négatifs. Dans ce cas spécial, l'avantage que nous venons de lui reconnaître emprunte, en effet, à une circonstance toute particulière, une nouvelle importance. La nature des nombres positifs et négatifs est telle que, pour les représenter de la façon la plus simple, il n'est pas besoin de créer de nouveaux symboles : ceux dont on fait usage dans l'étude de l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels suffisent. Mais il faut pour cela attribuer aux signes + et − un double sens. Tandis que dans l'étude de l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels ces signes sont exclusivement des signes d'opérations dans l'étude des nombres positifs et négatifs, ils peuvent être regardés tantôt comme des signes d'opérations, tantôt comme des signes faisant connaître la classe à laquelle appartient le nombre qui en est précédé.

La confusion qui résulte de cette double signification est sans doute la plus grande difficulté que l'on rencontre dans l'exposition de l'addition et de la soustraction algébriques. Elle se trouve évitée, si l'on consent à définir les nombres positifs et négatifs sans faire usage des signes + et −, par exemple, au moyen de deux indices, l'un pour les nombres positifs, l'autre pour les nombres négatifs; il suffit alors de poursuivre les conséquences des propriétés de l'addition pour voir bientôt *s'introduire nécessairement* la nouvelle signification des signes + et −. C'est ainsi que nous avons fait; sans doute on est en droit de dire que ce n'est pas là une méthode naturelle; peut-être trouvera-t-elle indulgence à cause de la clarté qu'elle donne à ces débuts toujours un peu pénibles de la théorie des opérations algébriques.

Table des matières. — Préface. Introduction. — Chapitre I. LES NOMBRES POSITIFS ET NÉGATIFS. — *Propositions empruntées à l'Arithmétique.* Démonstration de quelques propositions relatives à l'addition et à la soustraction arithmétiques. — *Premières définitions.* Nombres positifs et négatifs, zéro. Valeur absolue, nombres égaux, inégaux, symétriques. — *Addition et soustraction.* Définition et notation. Sommes symétriques. Définition de la somme de plus de deux nombres; elle ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les considère. On peut remplacer des termes par leur somme effectuée. Addition d'une somme. Propriété spéciale au nombre zéro. Différence de deux nombres. Notation. Conséquence pour la représentation d'un nombre et de son symétrique. Addition et soustraction d'une somme. Notation usuelle des nombres positifs et négatifs. Nombre plus grand, plus petit. Les nombres positifs, nuls et négatifs forment une suite continue illimitée dans les deux sens. — *Multiplication et division.* Produit de deux nombres, notation.

Produit de plus de deux nombres, propriétés. Notation des exposants. Propriété spéciale au nombre *un*. Quotient de deux nombres, notation. Propriétés des fractions algébriques. Remarque sur le symbole $\frac{a}{b}$, pour $b = 0$. — *Propriétés où interviennent à la fois les deux ordres d'opérations.* Multiplication des sommes; mise en facteur. Nouvelles propriétés des fractions algébriques. — *Représentation des grandeurs continues à deux sens inverses l'un de l'autre.* Mesure d'une grandeur quelconque. Grandeurs susceptibles de deux sens inverses, leur représentation pour les nombres positifs, nuls et négatifs. Nouvelles définitions de l'égalité et de la somme pour ces grandeurs; formule de Möbius. Théorème des projections. Généralisation. Correspondance univoque entre les points d'une droite et l'ensemble des nombres. Formule du mouvement uniforme. — Chapitre II. Les polynômes. *Définitions.* Expression algébrique, valeur numérique. Equivalence. Monôme, forme générale, monômes semblables. Polynôme, polynôme réduit, polynômes identiques, polynôme identiquement nul, degré. — *Applications aux polynômes des opérations fondamentales.* Application aux polynômes des propriétés des sommes. Réduction de l'ensemble des polynômes. Introduction des polynômes ordonnés. Addition et soustraction des polynômes ordonnés. Multiplication de deux polynômes ordonnés, remarques. Multiplication de plus de deux polynômes ordonnés, possibilité d'intervertir l'ordre des facteurs et d'en remplacer par leur produit effectué. Division des polynômes ordonnés. Quotient, reste de la division. Décomposition d'un polynôme ordonné en facteurs du premier degré. Un polynôme ordonné, équivalent à zéro, est identiquement nul. Si deux polynômes ordonnés sont équivalents, ils sont identiques. Conséquences. Polynômes à un nombre quelconque de lettres.

Le petit volume de M. Padé est précédé d'une préface importante de M. J. Tannery qui ne compte pas moins de 14 pages; elle se termine par les lignes suivantes :

« J'espère que le livre de M. Padé sera lu avec un vif intérêt par les élèves et par les maîtres; il est d'une extrême clarté, et tous ceux qui ont réfléchi au sujet qu'il traite, reconnaîtront que ce n'est pas un petit mérite. »

Cours élémentaire de Géométrie descriptive, accompagné d'un atlas comprenant 147 figures, à l'usage des écoles industrielles, des écoles de dessin, des athénées, des collèges, etc. par I. Jacquemin, professeur à l'École moyenne et à l'École industrielle de Seraing. Liége, Miot et Jamar, 1898 (57 in-8°, 12 planches). Prix : fr. 2,50.

Voici le programme de ce cours : Définitions préliminaires. Projections. Différentes positions d'un point dans l'espace. Projections et traces de la droite. Droite de profil Différents moyens de trouver la vraie grandeur d'une droite. Trouver diverses positions du plan. Droites contenues dans un plan et intersections de plans. Droite perpendiculaire à un plan. Rabattement de plans sur les plans de projections. Angle formé par l'intersection de deux droites. Rabattement d'un triangle, d'un toit. Plan mené suivant une inclinaison donnée. Polyèdres. Représentations

des polyèdres. Prismes. Parallélipipèdes, cubes, pyramides. Surfaces courbes. Représentation des trois corps ronds. Développement du cylindre et du cône. Hélice et vis. Intersections et pénétrations des solides précédents.

Cet opuscule est écrit avec clarté et méthode. Chaque section est suivie d'un questionnaire et d'exercices. On peut regretter l'absence de certains problèmes faisant partie de l'enseignement de la descriptive dans les athénées, tels que l'angle de deux plans, la plus courte distance de deux droites, etc.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

8. *Longueur de la bissectrice dans un triangle*, par M. L. Meurice. — J'avais trouvé, il y a déjà longtemps, la relation signalée par M. Lauvernay (*Mathesis*, 1894, p. 40). Voici ma démonstration :

Soient AD la bissectrice de l'angle A dans le triangle ABC; $BB_1 = BA$ une longueur portée sur le prolongement de CB et $CC_1 = CA$ une autre longueur portée sur CB dans la direction CB. La circonférence AB_1C_1 est concentrique au cercle ex-inscrit dans l'angle C, puisque les bissectrices de l'angle C et du supplément de B sont perpendiculaires sur les milieux de AC_1 et de AB_1. Il en résulte que la circonférence AB_1C_1 est tangente à AD. Par suite $\overline{DA}^2 = DB_1 . DC_1$.

On peut remarquer que l'angle $B_1AC_1 = \frac{1}{2}A$. La formule

$$\overline{AD}^2 = (AB + BD)(AC - CD) = (AB - BD)(AC + CD)$$

que nous venons de démontrer, peut servir à prouver qu'*un triangle dont deux bissectrices sont égales est isoscèle*, de la manière suivante(*) :

Soient BE et CH deux bissectrices du triangle ABC et supposons-les égales. On aura :

$$(AB + AE)(BC - CE) = (AC + AH)(BC - BH)$$

ou

$$\frac{AB + AE}{AC + AH} = \frac{BC - BH}{BC - CE} =$$

$$\frac{AB + AE + BC - BH}{AC + AH + BC - CE} = \frac{AH + AE + BC}{AE + AH + BC} = 1.$$

Donc BH = CE, etc.

9. *Note sur un lieu géométrique.* La question d'examen 383 (*Mathesis*, t. VIII, p. 240) est ainsi énoncée.

(*) Il y a des démonstrations de ce théorème qui ne s'appuient que sur le 1er livre de Legendre.

On mène par le foyer F *d'une ellipse une corde quelconque* MN. *La normale en* M *et la tangente en* N *se coupent en un point* R. *Le lieu de ce point a pour équation*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2y^2}{(2a^2-b^2)^2}=1. \qquad \text{(Milne.)}$$

Un abonné qui avait essayé en vain de résoudre ce problème, nous pria de le soumettre de nouveau aux lecteurs de *Mathesis;* un de ses amis en avait bien trouvé une solution, mais à la suite de calculs assez longs, et d'autres avaient fait comme lui des efforts infructueux. C'est ce qui nous engage à publier la solution suivante, due à M. A. C., à qui nous avions communiqué la question.

Soient $(x', y'), (x'', y'')$ les coordonnées des points M et N ; la tangente MR et la normale NR ont respectivement pour équation

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2, \qquad (1)$$
$$b^2yx''-a^2xy''=-c^2x''y''. \qquad (2)$$

On en conclut pour l'abscisse du point R

$$x=\frac{a^2x''(c^2y'y''+b^4)}{a^4y'y''+b^4x'x''}. \qquad (3)$$

Si l'on représente MN par l'équation $y=m(x-c)$, les quantités x' et x'', y' et y'' sont racines des équations

$$x^2(a^2m^2+b^2)-2a^2mcx+a^2(m^2c^2-b^2)=0,$$
$$y^2(a^2m^2+b^2)+2b^2mcy-b^4m^2=0,$$

de sorte que

$$x'x''=\frac{a^2(m^2c^2-b^2)}{a^2m^2+b^2}, \quad y'y''=-\frac{b^4m^2}{a^2m^2+b^2}; \qquad (4)$$

ces relations réduisent l'égalité (3) à

$$x=-x''. \qquad (5)$$

Remplaçant x par $-x''$ dans (2), on obtient

$$y=-\frac{a^2+b^2}{b^2}y''. \qquad (6)$$

Tirant x'' et y'' de (5) et (6) et substituant ces valeurs dans l'égalité

$$\frac{x''^2}{a^2}+\frac{y''^2}{b^2}=1.$$

on trouve l'équation de M. Milne.

Peut-on démontrer géométriquement les formules (5) et (6)?

Nous ne nous rappelons plus à quel recueil nous avons emprunté la question. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 818.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 56).

Le lieu des pieds des normales abaissées d'un point P *sur des quadriques concentriques et homothétiques est aussi le lieu des sommets des tétraèdres autopolaires par rapport à l'une de ces surfaces et à une sphère de centre* P, *dont le rayon est variable.* (Schoute.)

Solution par A. Droz-Farny. La normale en un point A d'une quadrique étant perpendiculaire sur le plan tangent en A, sera perpendiculaire sur le plan diamétral conjugué à la direction OA. Par conséquent, P étant un point donné et A un point quelconque, si PA est perpendiculaire sur le plan diamétral conjugué à la direction OA, A sera le pied de la normale abaissée de P sur la seule quadrique du système concentrique et homothétique passant par A.

Supposons maintenant que ABCD soit un tétraèdre autopolaire par rapport à une des quadriques et à une sphère de centre P; comme on le sait, PA est perpendiculaire au plan BCD et par conséquent au plan parallèle mené par O. Or ce dernier est évidemment conjugué à la direction du diamètre OA.

Le lieu des sommets des tétraèdres est donc identique à celui des pieds des normales.

On démontrerait de la même manière les théorèmes suivants :

I. Les sommets des triangles autopolaires par rapport à une conique fixe et à un cercle de centre fixe P, mais de rayon variable, sont sur l'hyperbole d'Apollonius du point P.

II. Le lieu des centres des coniques d'un faisceau admettant une circonférence de centre P, coïncide avec l'hyperbole d'Apollonius du point P par rapport à une quelconque des coniques.

Question 859.

(Voir *Mathesis*, (2) III, p. 176, IV, p. 53.)

Un cercle coupe une conique (Σ) *en quatre points. Par ces points on fait passer une hyperbole équilatère* (H). *Quel que soit le cercle* (C), *le rapport des distances du centre de* (Σ) *aux centres de* (C) *et de* (H) *est constant.*

(E. N. Barisien.)

Solution géométrique par M. Cl. Servais. Les points d'intersection A, A', B, B' de la conique (Σ) et du cercle (C) sont toujours situés sur deux cordes réelles AA', BB'; soient D et E les milieux de ces cordes, O et C les centres de la conique (Σ) et du cercle (C); a et a' les parallèles menées par les points O et C à la droite AA'. Si le rayon du cercle (C) varie, le centre C restant fixe, les droites OD et a décrivent deux faisceaux involutifs, car ce sont deux diamètres conjugués de la conique (Σ). Il en est de même des droites CD et a'. On conclut de là que les faisceaux engendrés par les droites OD et CD sont projectifs, et que le lieu du point D est une conique (Σ_1) passant par les points O et C et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique (Σ). Cette conique est donc l'hyperbole équilatère, lieu des centres des coniques circonscrites au quadrilatère AA'BB'; son centre est le milieu F de la droite DE. Par conséquent,

Un cercle (C) *coupe une conique* (Σ) *en quatre points* A, A', B, B'. *Si le rayon du cercle varie, le centre restant fixe, le lieu des milieux des cordes* AA' *est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique* (Σ). *La droite qui joint les milieux des deux cordes* AA', BB' *passe par un point fixe.*

Soit H le point diamétralement opposé au point C sur la conique (Σ_1), ce point est à l'intersection des perpendiculaires abaissées des points D et E respectivement sur les droites BB' et AA', et il est le centre d'une conique (H) passant par les points A, A', B, B'. Si c et c' sont les parallèles menées du point H aux droites AA' et BB', les asymptotes de la conique (H) sont les rayons doubles de l'involution déterminée par les couples de diamètres conjugués HD et c, HE et c'. Mais alors ces asymp-

(*) Si l'on suppose les points A, B, B' coïncidents, la construction du point H conduit aisément à des propriétés de la courbure en un point de l'hyperbole équilatère.

totes sont conjuguées dans l'involution orthogonale déterminée par les deux couples de droites HE et c', HD et c. La conique (H) est donc l'hyperbole équilatère passant par les points A, A', B, B'(*). Les points à l'infini de cette hyperbole, sont conjugués dans l'involution déterminée sur la droite de l'infini par les points de la conique (Σ) et par les points cycliques; les points doubles de cette involution sont situés sur les axes de la conique (Σ). Les asymptotes de (H) sont donc parallèles aux bissectrices des angles formés par les axes de la conique (Σ). Par conséquent, *Si des cercles concentriques déterminent sur une conique* Σ, *des groupes de points* A, A', B, B', *les hyperboles équilatères déterminées par ces groupes, sont concentriques et semblables.*

La droite HE est le diamètre conjugué de la corde BB', par rapport à l'hyperbole (H). Ces deux droites sont donc également inclinées sur les asymptotes de (H), c'est-à-dire sur les bissectrices des angles formés par les axes de (Σ). Si les points B et B' coïncident, E est le pied d'une normale menée du point C à la conique (Σ)(*), et la droite HE est perpendiculaire à la corde de courbure au point E. Donc

Si les normales en quatre points d'une conique (Σ) *concourent en un même point, il en est de même des perpendiculaires élevées en ces points sur les cordes de courbure.*

Supposons que le point C décrive une droite l; il existe une corde réelle ou idéale BB' de la conique Σ, perpendiculaire à l et ayant son milieu E sur cette droite. Tous les cercles passant par les points B, B', rencontrent (Σ) en des points A, A', tels que la droite AA' est parallèle à une direction fixe; donc le milieu D de la corde AA' se meut sur le diamètre OD de (Σ) et le point H est sur la perpendiculaire abaissée du point E sur la direction AA'. Les droites CD et HD restant parallèles à elles-mêmes, les ponctuelles décrites par les points C et H sont semblables, et la droite CH enveloppe une parabole (P) tangente aux droites HE et CE, aux points d'intersection de ces droites avec le diamètre OD. La polaire du point O par rapport à (P) passe donc par le point E; et il en résulte que, si du point O on projette les ponctuelles décrites par les points H et C, on obtient deux faisceaux involutifs, ayant pour éléments doubles, les tangentes menées du point O à la parabole (P). Ces tangentes sont les

(*) La conique (Σ_1) est la conique d'Apollonius, considérée dans la théorie des normales à une conique.

axes de la conique (Σ), donc les droites OC et OH sont également inclinées sur ces axes, et *les points* C *et* H *décrivent deux figures inversement semblables ayant pour point double et pour droites doubles, le centre et les axes de la conique* (Σ).

Nous avons démontré(*) que les points correspondants dans deux figures inversement semblables étaient les composantes isotropes des points d'une droite imaginaire définie par von Staudt, c'est-à-dire représentée par une involution de rayons, associée à un sens déterminé; on déduit de là que *Si au point* F *milieu de* CH *on élève une perpendiculaire, sur laquelle on prend deux longueurs* FG *et* FG' *égales à* CF, *les droites* OG *et* OG' *sont conjuguées dans une involution, indépendante de la position du point* C.

Les axes de la conique (Σ) étant conjugués dans cette involution rencontrent FG en deux points K et K' tels que

$$\mathrm{FK}.\,\mathrm{FK}' = \overline{\mathrm{FG}}^2 = \frac{\overline{\mathrm{CH}}^2}{4}.$$

Donc *La circonférence circonscrite au triangle* OCH *rencontre les axes de la conique* (Σ) *en deux points situés sur la perpendiculaire élevée au milieu de* CH.

Question 860.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 176.)

On divise les côtés BC, CA, AB *d'un triangle* ABC, *aux points* A', B', C', *dans le rapport* $m : n$, *et les côtés du triangle* A'B'C', *aux points* A'', B'', C'', *dans le rapport* $n : m$. *Démontrer* 1° *que les côtés du triangle* A''B''C'' *sont parallèles à ceux de* ABC; 2° *que les droites* AA'', BB'', CC'' *sont les médianes de* ABC. *En opérant sur le triangle* A''B''C'' *comme sur le triangle* ABC, *et en continuant ainsi indéfiniment, trouver les limites des sommes*

$$\mathrm{ABC} + \mathrm{A''B''C''} + \mathrm{A^{IV}B^{IV}C^{IV}} + \cdots,\quad \mathrm{AB} + \mathrm{A''B''} + \mathrm{A^{IV}B^{IV}} + \cdots$$

(J. Neuberg.)

Solution par MM. François *et* Déprez. Désignons par h_a, h_b, h_c les

(*) *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, in-8°, 1894. (*Sur les Imaginaires en Géométrie.*)

hauteurs du triangle ABC, par (M, XY) la distance du point M à la droite XY. On trouve facilement

$$(C'', BC) = \frac{n}{m+n}(B', BC), \quad (B', BC) = \frac{m}{m+n} h_a;$$

donc

$$(C'', BC) = \frac{mn}{(m+n)^2} h_a.$$

Comme on trouve la même valeur pour (B'', BC), la droite B''C'' est parallèle à BC.

On voit facilement que les distances des côtés du triangle A''B''C'' aux côtés homologues de ABC sont proportionnelles à h_a, h_b, h_c, ou que les distances du centre de gravité G de ABC à deux côtés homologues quelconques des triangles A''B''C'', ABC sont dans un rapport égal à

$$1 - \frac{3mn}{(m+n)^2} = \frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)^2}.$$

G est donc le centre de similitude de ces deux triangles, et AA'', BB'', CC'' sont leurs médianes communes.

Les droites AB, A''B'', A^{IV}B^{IV},... forment une progression géométrique ayant pour raison $k = \frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)^2}$; par suite,

$$\text{lim.}\,(AB + A''B'' + A^{IV}B^{IV} + \cdots) = \frac{AB}{1-k} = \frac{(m+n)^2}{3mn} AB.$$

Les aires des triangles ABC, A''B''C'', A^{IV}B^{IV}C^{IV},... forment une progression géométrique ayant pour raison k^2; leur somme a donc pour limite

$$\frac{ABC}{1-k^2} = \frac{(m+n)^4}{3mn(2m^2 + mn + 2n^2)} ABC.$$

Solution par M. Droz Farny. Menons par B'' une parallèle à BC qui rencontre AB en x, par C'' une parallèle à BC qui rencontre AC en y.

On trouve facilement

$$\frac{Bx}{BC'} = \frac{m}{m+n}, \quad \frac{BC'}{BA} = \frac{n}{m+n}, \quad \text{d'où} \quad \frac{Bx}{BA} = \frac{mn}{(m+n)^2};$$

de même,

$$\frac{Cy}{CA} = \frac{mn}{(m+n)^2}.$$

Il en résulte que les droites B''x, C''y se confondent, ou que B''C'' est parallèle à BC.

On a

$$\frac{B''x}{A'B}=\frac{C'B''}{C'A'}=\frac{n}{m+n},\quad \frac{A'B}{BC}=\frac{m}{m+n};$$

par suite,

$$\frac{B''x}{BC}=\frac{mn}{m+n}.$$

On obtient de la même manière

$$\frac{C''y}{BC}=\frac{mn}{m+n};\quad \text{donc}\quad B''x=C''y.$$

Soit L le milieu de xy. Comme les droites A''B'', A''C'' sont parallèles à Ax, By et divisent les segments Lx, Ly dans le même rapport, elles se coupent sur AL; donc AA'' est la médiane du triangle Axy, etc.

Soient S, S', S'' les surfaces des triangles ABC, A'B'C', A''B''C''. On a

$$\frac{A'BC'}{ABC}=\frac{BA'}{BC}\cdot\frac{BC'}{BA}=\frac{mn}{(m+n)^2}=\frac{CA'B'}{S}=\frac{AB'C'}{S};$$

il résulte de là

$$S'=S-3BA'C'=S\left(1-\frac{3mn}{(m+n)^2}\right)=\frac{m^2-mn+n^2}{(m+n)^2}S.$$

Par analogie

$$S''=\frac{m^2-mn+n^2}{(m+n)^2}S';$$

donc

$$\frac{S''}{S}=\frac{(m^2-mn+n^2)^2}{(m+n)^2}=\frac{A''B''}{AB},\ \text{etc.}\ (*).$$

Solution par M. Collette. Appliquons aux sommets A, B, C des forces parallèles dont les intensités sont représentées respectivement par m^2+n^2, mn, mn. La résultante des forces n^2 et mn appliquées en A et B est appliquée en C' et égale à $n(m+n)$; de même la résultante des forces m^2 et mn appliquées en A et C passe par B' et a pour valeur $m(m+n)$. Le système considéré se ramène donc à une force unique

(*) Nous ne reproduisons pas la dernière partie des solutions de MM. Droz Farny, Collette et Laisant, parce qu'elle est le même que dans la première solution.

appliquée en un point qui divise B'C' dans le rapport $n : m$, c'est-à-dire au point A''. D'autre part, si l'on compose d'abord les deux forces mn appliquées en B et C, puis leur résultante avec la force $(m^2 + n^2)$ appliquée en A, on trouve une force égale à $m^2 + n^2 + 2mn$ et divisant la médiane AA_1 du triangle dans le rapport $2mn : m^2 + n^2$. On conclut de là que A'' est situé sur AA_1.

Soit G le centre de gravité de ABC. De la proportion

$$\frac{AA''}{A''A_1} = \frac{2mn}{m^2 + n^2},$$

on déduit successivement

$$\frac{AA''}{AA_1} = \frac{2mn}{(m+n)^2}, \quad \frac{A'A''}{AG} = \frac{3mn}{(m+n)^2}, \quad \frac{A''G}{AG} = \frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)^2}.$$

Le rapport de similitude de triangles A''B''C'', ABC est donc

$$k = \frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)}, \text{ etc.}$$

Solution par M. Laisant. Les points A',B',C' sont donnés par les équipollences

$$A' = \frac{nB + mC}{m+n}, \quad \ldots;$$

puis les points A'', B'', C'' par

$$A'' = \frac{nC' + mB'}{m+n}, \quad \ldots;$$

ce qui donne :

$$A'' = \frac{(m^2 + n^2)\,A + mn\,(B + C)}{(m+n)^2}$$

Si on place l'origine en A, il vient

$$AA'' = \frac{mn}{(m+n)^2}(AB + AC),$$

On en conclut que A'' est sur la médiane AA_1 et que le rapport $AA'' : A''A_1$ est $2mn : (m+n)^2$.

Si on fait la différence des expressions de A'' et B'', on trouve

$$A''B'' = \frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)^2} AB;$$

il en résulte que A''B'' est parallèle à AB et que le rapport $A''B'' : AB = (m^2 - mn + n^2) : (m+n)^2$, etc.

Autres solutions par MM. Cl. Thiry, Mandart et N. — M. Déprez énonce la proposition suivante : *On divise les côtés du triangle sphérique* ABC *aux points* A', B', C' *de manière que*

$$\frac{\sin BA'}{\sin A'C}=\frac{\sin CB'}{\sin B'A}=\frac{\sin AC'}{\sin CB'}=\frac{m}{n};$$

on divise les côtés du triangle sphérique A'B'C' *aux points* A''B''C'' *de manière que*

$$\frac{\sin A'B''}{\sin B''C}=\frac{\sin C'A''}{\sin A''B'}=\frac{\sin B'C''}{\sin C''A'}=\frac{m}{n}.$$

Si x, y, z *sont les distances du point de rencontre des arcs* AA'', BB'', CC'' *aux côtés du triangle* ABC, *on a*

$$\frac{\sin x \sin a}{\sqrt{m^2+n^2+2mn\cos a}}=\frac{\sin y \sin b}{\sqrt{m^2+n^2+2mn\cos b}}=\frac{\sin z \sin c}{\sqrt{m^2+n^2+2mn\cos c}}.$$

×Question 861.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 176).

On donne deux circonférences de rayons R, r. ***Quelle doit être la distance des deux centres pour qu'on puisse décrire une circonférence touchant les circonférences données, leur ligne des centres et une tangente commune ?*** (Déprez.)

Solution par M. Barisien. On voit facilement que les circonférences données doivent être extérieures l'une à l'autre et qu'il faut prendre une tangente commune extérieure.

Soient d la distance des centres O, O' des cercles donnés, x le rayon du cercle à déterminer, ω son centre, et A, B, B', C ses points de contact avec la droite OO', les cercles O et O', et la tangente commune TT'.

On a

$$d=OA+O'A=\sqrt{O\omega^2-\overline{\omega A}^2}+\sqrt{O\omega^2-\overline{\omega A}^2},$$

$$TT'=\sqrt{d^2-(R-r)^2}=TC+CT'=2\sqrt{Rx}+\sqrt{2rx};$$

les équations du problème sont donc

$$d=\sqrt{R^2+2Rx}+\sqrt{r^2+2rx}, \qquad (1)$$

$$d^2-(R-r)^2=4x(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2. \qquad (2)$$

La première donne

$$d^2=R^2+r^2+2x(R+r)+2\sqrt{Rr}\sqrt{Rr+2(R+r)x+4x^2};$$

si l'on remplace d^2 par sa valeur tirée de (2), on trouve d'abord

$$x(R+r+4\sqrt{Rr})-Rr=\sqrt{Rr}\sqrt{Rr+2(R+r)r+4x^2},$$

puis en élevant au carré :

$$x^2[(R+r+4\sqrt{Rr})^2-4Rr]=4Rrx(R+r+2\sqrt{Rr}),$$

Le coefficient de x^2 étant égal à

$$(R+r+4\sqrt{Rr}+2\sqrt{Rr})(R+r+4\sqrt{Rr}-2\sqrt{Rr}),$$

on trouve aisément

$$x=\frac{4Rr}{R+r+6\sqrt{Rr}}. \qquad (3)$$

En écrivant l'équation (2) ainsi :

$$d^2=(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2[4x+(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2]$$

et remplaçant x par la valeur (3), on obtient

$$d^2=\frac{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2[16Rr+(R+r+6\sqrt{Rr})(R+r-2\sqrt{Rr})]}{R+r+6\sqrt{Rr}}.$$

La quantité entre crochets est égale à

$$16Rr+(R+r)^2+4(R+r)\sqrt{Rr}-12Rr;$$

c'est donc le carré de $R+r+2\sqrt{Rr}$ ou la quatrième puissance de $\sqrt{R}+\sqrt{r}$. Il en résulte

$$d^2=\frac{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^4}{R+r+6\sqrt{Rr}}.$$

La même question a été résolue par MM. Barbette et Decamps.

---

*QUESTIONS D'EXAMEN(*).

617. Quels sont les nombres qui, augmentés d'une unité, sont divisibles par 11, et qui, diminués d'une unité, sont divisibles par 25. Trouver la somme des dix premiers nombres de cette espèce.

$N=11x-1=25y+1$; l'équation indéterminée $11x-25y=2$ admet une première solution $x=7$, $y=3$, d'où la solution générale $x=7+25t$, $N=76+11.25t$. La somme des valeurs de N pour $t=0, 1, 2, \ldots, 9$ est 5 (76 + 2551).

(*) Les questions 617-632 ont été posées aux examens de maturité des établissements d'enseignement moyen d'Autriche-Hongrie. Nous les empruntons au *Periodico di matematica*, t. IX.

618. La somme de trois nombres en progression géométrique est 28, le produit du moyen par la somme des extrêmes est égal 160. Trouver ces trois nombres.

Une solution *réelle* est (4, 8, 16).

619. Résoudre le système

$$\sqrt{\left(x+\frac{1}{y}\right)}+\sqrt{(x+y-1)}=\frac{11}{2},$$

$$2x+y+\frac{1}{y}=\frac{65}{4}.$$

Si l'on fait $x+\frac{1}{y}=u$, $u+y-1=v$, le système se ramène à

$$\sqrt{u}+\sqrt{v}=\frac{11}{2},\quad u+v=\frac{61}{4}.$$

620. Résoudre le système

$$\sqrt{72+x^2+4y^2+4xy}=x+2y+2,$$

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=\sqrt{x+y+\sqrt{60+4xy}+3}.$$

Rendant les deux équations rationnelles, on obtient

$$x+2y=17,\quad y+2x=13.$$

621. Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont des nombres entiers; si le plus grand diminue de 14 et que le plus petit augmente de 8, l'hypoténuse ne change pas.

Trouver les côtés. — Solution : $4t+15$, $7t+10$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***622.** Etant donné un cercle O, on trace un diamètre AB et une corde CD parallèle; après avoir prolongé AB de BE = AB, on projette E en F sur CD, F en G sur BC : démontrer que

$$\overline{AD}^3 = DG.\,\overline{AB}^2.$$

Déduire de là un moyen graphique d'extraire la racine cubique d'un nombre. (Biddle.)

***623.** Dans le plan d'un triangle ABC, placer un cercle O de rayon donné, de telle manière que le triangle polaire de ABC par rapport à ce cercle ait une aire minimum. (Miller.)

230. On considère l'hyperbole équilatère qui passe par le point de concours de deux tangentes rectangulaires à une ellipse donnée, par les points de contact M, M′ de ces tangentes et par le centre de l'ellipse. Lorsque les tangentes varient : 1° la seconde corde commune à l'ellipse et à l'hyperbole coupe les axes de l'ellipse en deux points N, N′, tels que le segment NN′ a une longueur constante ; 2° le point de rencontre des droites MM′, NN′ décrit une ellipse. (E. N. Barisien.)

231. D'un point quelconque M, situé sur une des diagonales du rectangle des axes d'une ellipse, on mène les tangentes à cette courbe. Soient t, t' les perpendiculaires abaissées du centre sur les tangentes ; et n, n' les perpendiculaires abaissées du centre sur les normales correspondantes. Démontrer que

$$\frac{t}{t'} = \frac{n}{n'}.$$ (E. N. Barisien.)

232. La tangente MA en un point quelconque M d'une courbe donnée rencontre une droite fixe en A. On porte sur cette droite fixe une longueur constante AN. Déterminer le point où la droite MN touche son enveloppe. (L. Meurice.)

×**233.** 1° Le nombre $4n^4$ est la somme de quatre triangulaires ; 2° les nombres

$$6n^4,\quad 6n^4+1,\quad 6n^4+2n^2+1,\quad 6n^4-4n^2+1,\quad 6n^4+6n^2+1$$

sont, chacun, la somme de trois triangulaires. (de Rocquigny.)

234. Soit ABCD un quadrilatère donné. On joint les sommets A et B à un point quelconque P de la droite CD. Par D et C on mène DM et CM parallèles à AP et BP. On demande : 1° le lieu du point M ; 2° l'enveloppe de la droite MP. (L. Meurice.)

235. Démontrer l'intégrale

$$\int_0^a \sqrt{b^2 - 2x^2 + \sqrt{4(a^2-b^2)x^2 + b^4}}\, dx = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(a^2+b^2).$$

(E. N. Barisien.)

×**236.** La somme de $2m+1$ nombres triangulaires consécutifs est égale à $2m+1$ fois le terme du milieu, plus la somme des carrés des m premiers nombres entiers. (de Rocquigny.)

SOMMATION DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES ENTIERS;

par M. E. Barbette, docteur en sciences physiques et mathématiques.

Désignons par $S_{p,n}$ la somme des $p^{ièmes}$ puissances des n premiers nombres entiers. La formule de récurrence

$$(n+1)[(n+1)^m - 1] = \sum_{p=1}^{p=m} C_{m+1,p}\, S_{m-p+1,n},$$

dans laquelle $C_{m+1,p}$ représente le nombre de combinaisons de $m+1$ lettres prises p à p, montre que $S_{m,n}$ s'exprime par une fonction du $(m+1)^{ième}$ degré en n. Si nous supposons $m = 1, 2, 3, 4\ldots$, il vient successivement :

$$S_{1,n} = \frac{n^2+n}{2},$$

$$S_{2,n} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6},$$

$$S_{3,n} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4},$$

$$S_{4,n} = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30},$$

$$S_{5,n} = \frac{2n^6+6n^5+5n^4-n^2}{12},$$

$$S_{6,n} = \frac{6n^7+21n^6+21n^5-7n^3+n}{42},$$

$$S_{7,n} = \frac{3n^8+12n^7+14n^6-7n^4+2n^2}{24},$$

$$S_{8,n} = \frac{10n^9+45n^8+60n^7-42n^5+20n^3-3n}{90},$$

$$S_{9,n} = \frac{2n^{10}+10n^9+15n^8-14n^6+10n^4-3n^2}{20},$$

$$S_{10,n} = \frac{6n^{11}+33n^{10}+55n^9-66n^7+66n^5-33n^3+5n}{66},$$

$$S_{11,n} = \frac{2n^{12}+12n^{11}+22n^{10}-33n^8+44n^6-33n^4+10n^2}{24},$$

... etc...

Considérons maintenant un damier $D_{r,k}$ de n^2 cases et écrivons dans les r bandes verticales de haut en bas, p variant de 1 à n, les nombres

$$1^r \times p^k, \quad 2^r \times p^k, \quad 3^r \times p^k, \quad \ldots, \quad n^r \times p^k.$$

$D_{r,k} =$

$1^r.1^k$	$2^r.1^k$	$3^r.1^k$		$p^r.1^k$		$n^r.1^k$
$1^r.2^k$	$2^r.2^k$	$3^r.2^k$		$p^r.2^k$		$n^r.2^k$
$1^r.3^k$	$2^r.3^k$	$3^r.3^k$		$p^r.3^k$		$n^r.3^k$
$1^r.p^k$	$2^r.p^k$	$3^r.p^k$		$p^r.p^k$		$n^r.p^k$
$1^r.n^k$	$2^r.n^k$	$3^r.n^k$		$p^r.n^k$		$n^r.n^k$

Pour obtenir la somme S de tous les nombres de ce damier, opérons de deux façons :

1° La $p^{\text{ième}}$ bande horizontale renferme la somme $S_{r,n} \times p^k$; d'où

$$S = S_{r,n} \sum_{p=1}^{p=n} p^k = S_{r,n} \times S_{k,n}.$$

2° Décomposons le damier en bandes horizontales et verticales de même rang, les $p^{\text{ièmes}}$ bandes s'arrêtant à leur intersection $p^r \times p^k$; la $p^{\text{ième}}$ bande verticale ainsi formée renferme la somme $p^r \times S_{k,p}$ et la

$p^{\text{ième}}$ bande horizontale la somme $p^k \times S_{r,p}$, mais le nombre p^{k+r} ayant été pris deux fois,

$$S = \sum_{p=1}^{p=n} (p^r \times S_{k,p} + p^k \times S_{r,p} - p^{k+r}).$$

Si nous égalons les valeurs (1) et (2) de S, nous obtenons la formule(*)

$$S_{r,n} \cdot S_{k,n} = \sum_{p=1}^{p=n} (p^r \cdot S_{k,p}^{s} + p^k \cdot S_{r,p} - p^{k+r}). \qquad (A)$$

Le premier membre constitue une fonction du $(k+r+2)^{\text{ième}}$ degré en n et ainsi le second membre renfermera $S_{k+r+1,n}$.

La formule (A) fournira $S_{2x+1,n}$ de $x+1$ façons différentes par les hypothèses simultanées.

$$r=0 \text{ et } k=2x; \quad r=1 \text{ et } k=2x-1; \quad r=2 \text{ et } k=2x-2$$
$$\ldots; \quad r=x \text{ et } k=x.$$

La formule (A) fournira $S_{2x,n}$ de x façons différentes par les hypothèses simultanées

$$r=0 \text{ et } k=2x-1; \; r=1 \text{ et } k=2x-2; \; r=2 \text{ et } k=2x-3;$$
$$\ldots; \quad r=x-1 \text{ et } k=x.$$

Si nous donnons à r la valeur constante 1 et à k toutes les valeurs entières de 1 à k, nous obtenons un système de k équations à $(k+2)$ inconnues et nous pourrons déterminer les k sommes $S_{3,n}$, $S_{4,n}$, ..., $S_{k+2,n}$ en fonction de $S_{1,n}$ et $S_{2,n}$ respectivement de degrés 2 et 3 en n. De plus $S_{2x+1,n}$ du $2(x+1)^{\text{ième}}$ degré en n, pourra s'exprimer en une fonction du $(x+1)^{\text{ième}}$ degré en $S_{1,n}$; et $\dfrac{S_{2x,n}}{S_{2,n}}$, du $2(x-1)^{\text{ième}}$ degré en n, pourra s'exprimer en une fonction du $(x-1)^{\text{ième}}$ degré en $S_{1,n}$.

(*) Si nous désignons par $S_{p,n}$ la somme des $p^{\text{ièmes}}$ puissances des n grandeurs

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots, a_n,$$

nous trouvons de même la relation

$$S_{r,n} \cdot S_{k,n} = \sum_{p=1}^{p=n} (a_p^r S_{k,p} + a_p^k S_{r,p} - a_p^{k+r}).$$

Relations diverses.

Valeurs de r.	Valeurs de k.	RELATIONS RÉSULTANTES.
0	0	$2S_{1,n} = S_{0,n}^2 + S_{0,n}$.
—	—	
0	1	$3S_{2,n} = 2S_{0,n} \cdot S_{1,n} + S_{0,n}$.
—	—	
0	2	$8S_{3,n} = 6S_{0,n} \cdot S_{2,n} + 3S_{2,n} - S_{1,n}$,
1	1	$S_{3,n} = S_{1,n}^2$.
—	—	
0	3	$5S_{4,n} = 4S_{0,n} \cdot S_{3,n} + 2S_{3,n} - S_{2,n}$,
1	2	$5S_{4,n} = 6S_{1,n} \cdot S_{2,n} - S_{2,n}$.
—	—	
0	4	$36S_{5,n} = 30S_{0,n} \cdot S_{4,n} + 15S_{4,n} - 10S_{3,n} + S_{1,n}$,
1	3	$3S_{5,n} = 4S_{1,n} \cdot S_{3,n} - S_{3,n}$,
2	2	$2S_{5,n} = 3S_{2,n}^2 - S_{3,n}$.
—	—	
0	5	$14S_{6,n} = 12S_{0,n} \cdot S_{5,n} + 6S_{5,n} - 5S_{4,n} + S_{2,n}$,
1	4	$21S_{6,n} = 30S_{1,n} \cdot S_{4,n} - 10S_{4,n} + S_{2,n}$,
2	3	$7S_{6,n} = 12S_{2,n} \cdot S_{3,n} - 5S_{4,n}$.
—	—	
0	6	$48S_{7,n} = 42S_{0,n} \cdot S_{6,n} + 21S_{6,n} - 21S_{5,n} + 7S_{3,n} - S_{1,n}$,
1	5	$8S_{7,n} = 12S_{1,n} \cdot S_{5,n} - 3S_{5,n} - S_{3,n}$,
2	4	$16S_{7,n} = 30S_{2,n} \cdot S_{4,n} - 15S_{5,n} + S_{3,n}$,
3	3	$S_{7,n} = 2S_{3,n}^2 - S_{5,n}$.
—	—	
0	7	$27S_{8,n} = 24S_{0,n} \cdot S_{7,n} + 12S_{7,n} - 14S_{6,n} + 7S_{4,n} - 2S_{2,n}$,
1	6	$27S_{8,n} = 42S_{1,n} \cdot S_{6,n} - 21S_{6,n} + 7S_{4,n} - S_{2,n}$,
2	5	$6S_{8,n} = 12S_{2,n} \cdot S_{5,n} - 7S_{6,n} + S_{4,n}$,
3	4	$27S_{8,n} = 60S_{3,n} \cdot S_{4,n} - 35S_{6,n} + 2S_{1,n}$.
—	—	
0	8	$100S_{9,n} = 90S_{0,n} \cdot S_{8,n} + 45S_{8,n} - 60S_{7,n} + 42S_{5,n} - 20S_{3,n} + 3S_{1,n}$,
1	7	$15S_{9,n} = 24S_{1,n} \cdot S_{7,n} - 14S_{7,n} + 7S_{5,n} - 2S_{3,n}$,
2	6	$20S_{9,n} = 42S_{2,n} \cdot S_{6,n} - 28S_{7,n} + 7S_{5,n} - S_{3,n}$,
3	5	$5S_{9,n} = 12S_{3,n} \cdot S_{5,n} - 8S_{7,n} + S_{5,n}$,
4	4	$6S_{9,n} = 15S_{4,n}^2 - 10S_{7,n} + S_{5,n}$.
—	—	

Valeurs de r.	Valeurs de k.	RELATIONS RÉSULTANTES.
0	9	$22S_{10,n} = 20S_{9,n} \cdot S_{9,n} + 10S_{9,n} - 15S_{8,n} + 14S_{6,n} - 10S_{4,n} + 3S_{2,n}$,
1	8	$55S_{10,n} = 90S_{1,n} \cdot S_{8,n} - 60S_{8,n} + 42S_{6,n} - 20S_{4,n} + 3S_{2,n}$,
2	7	$11S_{10,n} = 24S_{2,n} \cdot S_{7,n} - 18S_{8,n} + 7S_{6,n} - 2S_{4,n}$,
3	6	$33S_{10,n} = 84S_{3,n} \cdot S_{6,n} - 63S_{6,n} + 14S_{6,n} - 2S_{4,n}$,
4	5	$22S_{10,n} = 60S_{4,n} \cdot S_{5,n} - 45S_{6,n} + 7S_{6,n}$.
—	—	
0	10	$72S_{11,n} = 66S_{0,n} \cdot S_{10,n} + 33S_{10,n} - 55S_{9,n} + 66S_{7,n} - 66S_{5,n} + 33S_{3,n} - 5S_{1,n}$,
1	9	$12S_{11,n} = 20S_{1,n} \cdot S_{9,n} - 15S_{9,n} + 14S_{7,n} - 10S_{5,n} + 3S_{3,n}$,
2	8	$40S_{11,n} = 90S_{2,n} \cdot S_{8,n} - 75S_{9,n} + 42S_{7,n} - 20S_{5,n} + 3S_{3,n}$,
3	7	$9S_{11,n} = 24S_{3,n} \cdot S_{7,n} - 20S_{9,n} + 7S_{7,n} - 2S_{5,n}$,
4	6	$72S_{11,n} = 210S_{4,n} \cdot S_{6,n} - 175S_{9,n} + 42S_{7,n} - 5S_{5,n}$,
5	5	$2S_{11,n} = 6S_{5,n}^2 - 5S_{9,n} + S_{7,n}$.
—	—	
0	11	$26S_{12,n} = 24S_{0,n} \cdot S_{11,n} + 12S_{11,n} - 22S_{10,n} + 33S_{8,n} - 44S_{6,n} + 33S_{4,n} - 10S_{2,n}$,
1	10	$39S_{12,n} = 66S_{1,n} \cdot S_{10,n} - 55S_{10,n} + 66S_{8,n} - 66S_{6,n} + 33S_{4,n} - 5S_{2,n}$,
2	9	$26S_{12,n} = 60S_{2,n} \cdot S_{9,n} - 55S_{10,n} + 42S_{8,n} - 30S_{6,n} + 9S_{4,n}$,
3	8	$65S_{12,n} = 180S_{3,n} \cdot S_{8,n} - 165S_{10,n} + 84S_{8,n} - 40S_{6,n} + 6S_{4,n}$,
4	7	$39S_{12,n} = 120S_{4,n} \cdot S_{7,n} - 110S_{10,n} + 39S_{8,n} - 10S_{6,n}$,
5	6	$26S_{12,n} = 84S_{5,n} \cdot S_{6,n} - 77S_{10,n} + 21S_{8,n} - 2S_{6,n}$.
—	—	
etc.		etc.

Si nous voulons obtenir $S_{2x+1,n}$ en fonction de $S_{1,n}$, il sera préférable d'employer les valeurs impaires de r et de k; de plus, dans les cas où x est impair, il vaut mieux prendre $r = k = x$: la relation cherchée, ne renfermant alors aucune fonction paire $S_{2x,n}$, donne plus facilement $S_{2x+1,n}$ en fonction de $S_{1,n}$. De même, pour le calcul de $S_{2x,n}$ les valeurs $r = x - 1$ et $k = x$ conduisent à des résultats beaucoup plus simples.

Nous trouvons ainsi successivement :

$$S_{1,n} = \frac{S_{0,n}(S_{0,n}+1)}{2}, \quad S_{2,n} = \frac{S_{1,n}(2S_{0,n}+1)}{3},$$

$$S_{3,n} = S_{1,n}^2, \quad S_{4,n} = \frac{S_{2,n}(6S_{1,n}-1)}{5}, \quad S_{5,n} = \frac{S_{1,n}^2(4S_{1,n}-1)}{3},$$

$$S_{6,n}=\frac{S_{2,n}(12S_{1,n}^2-6S_{1,n}+1)}{7},$$

$$S_{7,n}=\frac{S_{1,n}^2(6S_{1,n}^2-4S_{1,n}+1)}{3},$$

$$S_{9,n}=\frac{S_{2,n}(40S_{1,n}^3-40S_{1,n}^2+18S_{1,n}-3)}{15},$$

$$S_{9,n}=\frac{S_{1,n}^2(16S_{1,n}^3-20S_{1,n}^2+12S_{1,n}-3)}{5},$$

$$S_{10,n}=\frac{S_{2,n}(48S_{1,n}^4-80S_{1,n}^3+68S_{1,n}^2-30S_{1,n}+5)}{11},$$

$$S_{11,n}=\frac{S_{1,n}^2(16S_{1,n}^4-32S_{1,n}^3+34S_{1,n}^2-20S_{1,n}+5)}{3},$$

$$S_{12,n}=\frac{S_{2,n}(3.360S_{1,n}^5-8.400S_{1,n}^4+11.480S_{1,n}^3-9.440S_{1,n}^2+414.6S_{1,n}-691}{455}$$

etc., etc.

Exemple : *recherche de* $S_{15,n}$. — Posons $y=5$ et $k=7$; la formule (A) donne

$$S_{5,n}.S_{7,n}=\sum_{p=1}^{p=n}(p^5S_{7,p}+p^7S_{5,p}-p^{12})$$

ou bien,

$$S_{5,n}.S_{7,n}=\sum_{p=1}^{p=n}\left(p^5\frac{3p^8+12p^7+14p^6-7p^4+2p^2}{24}+p^7\frac{2p^6+6p^5+5p^4-p^2}{12}-p^{12}\right)$$

$$=\sum_{p=1}^{p=n}\frac{7p^{13}+24p^{11}-9p^9+2p^7}{24}=\frac{7S_{13,n}+24S_{11,n}-9S_{9,n}+2S_{7,n}}{24}.$$

D'où

$$7S_{13,n}=2S_{7,n}(12S_{5,n}-1)-24S_{11,n}+9S_{9,n}.$$

Après avoir remplacé $S_{5,n}$, $S_{7,n}$, $S_{9,n}$ et $S_{11,n}$ en fonction de $S_{1,n}$, effectué les opérations indiquées et divisé les deux membres de l'égalité par le coefficient de $S_{13,n}$, on obtient

$$S_{13,n}=\frac{S_{1,n}^2(960S_{1,n}^5-2.800S_{1,n}^4+4.592S_{1,n}^3-4.720S_{1,n}^2+2.764S_{1,n}-691)}{105}\text{ (*)}.$$

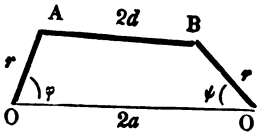
(*) L'article de M. Barbette répond partiellement à la question 28 de l'*Intermédiaire des mathématiciens*. (*Réd.*)

QUELQUES SYSTÈMES DE TIGES ARTICULÉES;

par M. R. Bricard, ingénieur à Dijon.

I. Soit OABO′ un *trois-barres* à manivelles égales. Posons

$$OA = O'B = r, \quad AB = 2d, \quad OO' = 2a.$$



On a, entre les angles $AOO' = \varphi$ et $BO'O = \psi$, la relation :

$$[2a - r(\cos\varphi + \cos\psi)]^2 + r^2(\sin\varphi - \sin\psi)^2 = 4d^2,$$

ou

$$2a^2 + r^2 - 2d^2 - 2ar(\cos\varphi + \cos\psi) + r^2\cos(\varphi + \psi) = 0, \quad (1)$$

que l'on peut écrire, en introduisant les angles $\frac{\varphi+\psi}{2}$ et $\frac{\varphi-\psi}{2}$,

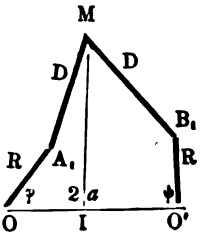
$$2a^2 + r^2 - 2d^2 - 4ar\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} + r^2\left(2\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} - 1\right) = 0,$$

et enfin

$$a^2 - d^2 - 2ar\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} + r^2\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} = 0. \quad (1')$$

Considérons maintenant le système de tiges articulées OA_1MB_1O', dans lequel les points O, O′ sont fixes, les 2 manivelles OA_1 $O'B_1$ égales entre elles, ainsi que les bielles A_1M, B_1M. Posons

$$OA_1 = O'B_1 = R, \quad MA_1 = MB_1 = D, \quad OO' = 2a$$



et cherchons quelle relation doit avoir lieu entre les angles $A_1OO' = \varphi$, $B_1O'O = \psi$ pour que le point M décrive la droite IM, perpendiculaire à OO′ en son milieu I. A cet effet, posons $IM = x$.

On a

$$(x - R\sin\varphi)^2 + (a - R\cos\varphi)^2 = D^2,$$

ou

$$x^2 - 2Rx\sin\varphi + a^2 - 2aR\cos\varphi + R^2 - D^2 = 0; \qquad (a)$$

de même

$$x^2 - 2Rx\sin\psi + a^2 - 2aR\cos\psi + R^2 - D^2 = 0. \qquad (b)$$

Pour éliminer x entre ces équations, retranchons-les d'abord membre à membre; il vient

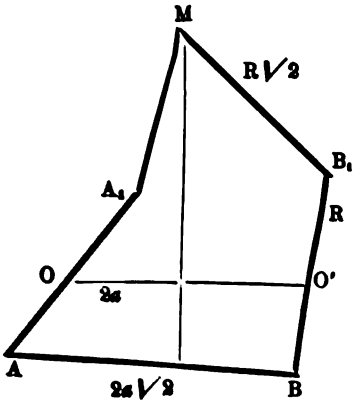
$$x = a\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\sin\varphi - \sin\psi} = a\frac{\sin\dfrac{\varphi+\psi}{2}}{\cos\dfrac{\varphi+\psi}{2}}.$$

Substituons cette valeur de x dans l'équation obtenue en retranchant membre à membre les équations (a) et (b), après multiplication de la première par $\sin\psi$ et de la seconde par $\sin\varphi$. Il vient :

$$(\sin\varphi - \sin\psi)\left[a^2\frac{\sin^2\dfrac{\varphi+\psi}{2}}{\cos^2\dfrac{\varphi+\psi}{2}} + R^2 - D^2\right] - 2aR\sin(\varphi-\psi) = 0$$

et, après une réduction facile

$$a^2 - 2aR\cos\frac{\varphi-\psi}{2}\cos\frac{\varphi+\psi}{2} + (R^2 - D^2)\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} = 0. \qquad (2)$$



Les équations (1') et (2) seront identiques si l'on a :

$$\frac{a^2 - d^2}{a^2} = \frac{r}{R} = \frac{r^2}{R^2 - D^2},$$

ou encore

$$d^2 = \frac{R-r}{R}a^2, \quad D^2 = R(R-r).$$

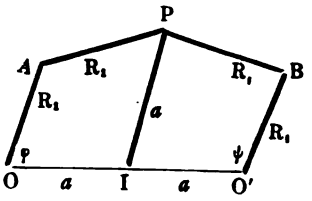
On déduit immédiatement de là un procédé très général de description de la ligne droite au moyen de systèmes de cinq tiges articulées. La figure ci-contre représente l'un d'eux : on a fait $r = -R$, d'où

$$d = a\sqrt{2}, \quad D = R\sqrt{2}.$$

II. Considérons encore le système de tiges articulées représenté ci-dessous. Les points fixes O, I, O′ sont en ligne droite; on a

$$IO = IO' = IP = a, \quad OA = AP = PB = BO' = R_1.$$

Pour obtenir une relation entre les angles $AOI = \varphi$, $BO'I = \psi$, il suffit de remarquer que les droites IA, IB, sont rectangulaires, ce qui donne immédiatement :



$$\frac{R_1 \sin\varphi}{a - R_1\cos\varphi} \cdot \frac{R_1 \sin\psi}{a - R_1\cos\psi} = 1,$$

ou

$$a^2 - aR_1(\cos\varphi + \cos\psi) + R_1^2\cos(\varphi+\psi) = 0,$$

ou encore

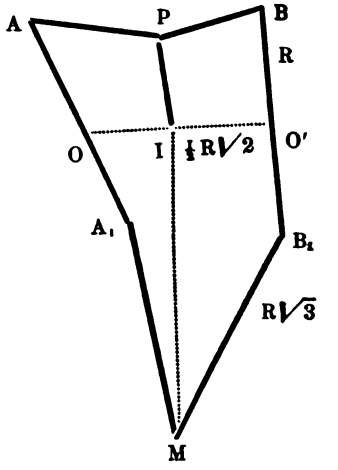
$$a^2 - R_1^2 - 2aR_1\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} + 2R_1^2\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} = 0, \quad (3)$$

relation qui sera identique à la relation (2) si l'on a :

$$\frac{a^2 - R_1^2}{a^2} = \frac{R_1}{R} = \frac{2R_1^2}{R^2 - D^2},$$

ou

$$a^2 = \frac{RR_1^2}{R - R_1}, \quad D^2 = R^2 - 2RR_1.$$



On déduit encore de là divers systèmes articulés à 7 tiges. La figure ci-contre représente l'un deux : on a fait

$$R_1 = -R,$$

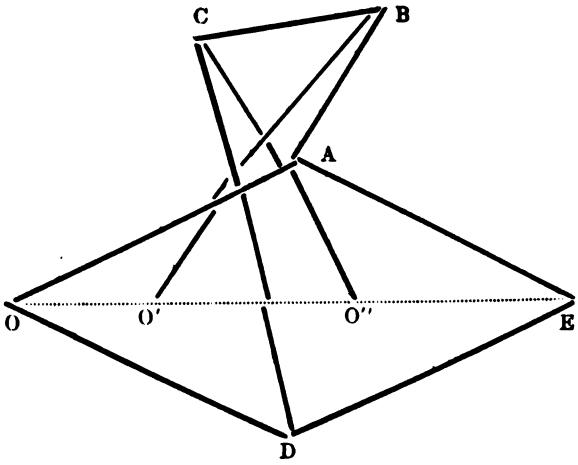
d'où

$$a = \frac{R\sqrt{2}}{2}, \quad D = R\sqrt{3}.$$

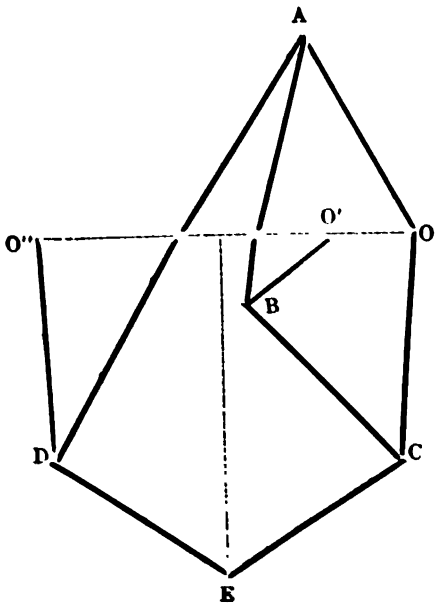
III. J'ajouterai, pour terminer, que l'étude de la relation (1), quand elle devient involutive (il faut pour cela que la longueur d soit égale à la distance a) m'a conduit à d'autres systèmes articulés, moins simples que les précédents, dont voici deux exemples :

1° OA, O′B, O″C, OD, AB, BC, CD, AE, DE, sont 9 tiges articulées

aux points A, B, C, D, E. Les points O, O′, O″ sont fixes et en ligne droite.



On a $OO' = AB = a$, $O'O'' = BC = b$, $OA = O'B = O''C = OD = R$, $CD = OO'' = a + b$, $AE = DE$ (longueur quelconque).



Si l'on a la relation

$$a^2 + ab + b^2 = R^2,$$

le point E décrira la droite OO′O″.

On peut faire par exemple :

$$a = b, \quad R = a\sqrt{3}.$$

2° OA, AB, BC, OC, O′B, O″D, AD, DE, EC sont 9 tiges articulées aux points A, B, C, D, E. Les points O, O′, O″ sont fixes et en ligne droite. On a

$$OA = OC = AB = BC = O''D,$$
$$O'B = O'O,$$

DE = EC (long. quelconque).

Si l'on a la relation :

$$OO' \cdot OO'' = \overline{OA}^2,$$

le point E décrit la perpendiculaire élevée à la droite OO′ en son milieu.

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons sur les coordonnées tangentielles, par C. PAPELIER, ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Orléans; avec une préface de M. Appell, membre de l'Institut. Première partie, Géométrie plane. Paris, librairie Nony, 1894 (In-8°, VI-325 pages). Prix : 5 francs.

Voici comment M. Appell, dans la Préface, fait connaître l'importance de cette publication :

« L'ouvrage de M. Papelier a pour objet le développement de la géométrie tangentielle depuis les premiers éléments jusqu'à la théorie des coniques et des courbes algébriques. L'auteur s'est efforcé de suivre pas à pas les méthodes employées dans la géométrie ponctuelle, de sorte que le lecteur, déjà familiarisé avec cette dernière, n'aura aucun effort nouveau à faire; il n'aura qu'à transposer les méthodes et les éléments qu'il connaît, en remplaçant dans les théorèmes les points par des droites et réciproquement.

« Quant aux commençants, ils suivront avec autant de facilité cette manière de présenter les faits que la manière ordinaire.

« Cet ouvrage, écrit avec clarté et rigueur, renferme des développements sur certaines questions qu'on ne traite pas habituellement en coordonnées tangentielles : telles sont la discussion de la forme d'une courbe dans le voisinage d'une tangente ou d'une asymptote, à l'aide du polygone de Newton, la classification des coniques, les invariants simultanés de deux coniques. De nombreux exercices sont traités dans le texte ou proposés au lecteur avec des indications sur leur solution.

« Le livre de M. Papelier est appelé à rendre de grands services, en familiarisant l'esprit des élèves avec une autre face de la géométrie analytique, et en les mettant à même à tirer de chaque résultat de calcul deux théorèmes corrélatifs. »

Nous ne pouvons que souscrire à ce jugement favorable porté par M. Appell sur les *Leçons sur les coordonnées tangentielles*, et recommander aux professeurs et aux élèves la lecture de ce livre qui vient à son heure. Le défaut d'espace ne nous permettant pas d'entrer dans une analyse détaillée, nous nous contentons de reproduire les titres des différentes chapitres :

Le point et la droite. Généralités sur les courbes et principe de dualité. Position d'une courbe par rapport à ses tangentes. Tangentes et normales. Classification des courbes de deuxième classe. Pôles et polaires. Centre, Diamètres et Axes. Réduction de l'équation générale du second degré. Foyers et Directrices. Tangentes communes à deux coniques. Coniques inscrites dans le quadrilatère des tangentes communes à deux coniques Ombilics et droites qui ont le même pôle par rapport à deux coniques. Coordonnées trilatères. Propriétés de deux et de trois coniques.

NOTE SUR UN LIEU GÉOMÉTRIQUE(*).

(Suite ; voir *Mathesis*, (2), IV, p. 93).

On mène par le foyer F *d'une ellipse une corde quelconque* MN. *La tangente en* M *et la normale en* N *se coupent en un point* R. *Le lieu de ce point a pour équation*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{b^2y^2}{(2a^2 - b^2)^2} = 1. \qquad \text{(Milne.)}$$

Si x, y sont les coordonnées de R, et x', y' celles de N, on a

$$x = -x', \quad y = -\frac{a^2 + c^2}{b^2}\,y'. \qquad (1)$$

Nous avons reçu plusieurs démonstrations géométriques des formules (1), que nous allons communiquer à nos lecteurs.

1. La plus simple nous a été envoyée à la fois par MM. Déprez (Tournay) et Juel (Copenhague). Si F′ est le second foyer de l'ellipse (Fig. 1), R est évidemment le centre d'un cercle exinscrit au triangle MNF′ ; donc la projection NR′ de NR sur NM est égale au demi-périmètre de ce triangle, ou égale à $2a$. Soient P, Q les points où la normale NR rencontre l'axe focal FF′ et le petit axe Oy ; projetons Q en Q′ sur NM, en Q″ sur MNF′. Les triangles QFQ′, QF′Q″ étant égaux (QF = QF′, QQ′ = QQ″),

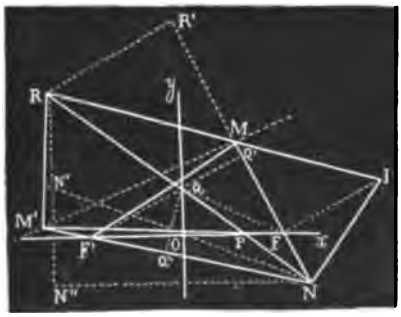


Fig. 1.

on a FQ′ = FQ″ ; il en résulte que

$$NQ' + NQ'' \quad \text{ou} \quad 2NQ' = NF + NF' = 2a,$$

donc

$$NQ' = a = \tfrac{1}{2}\,NR' \text{(**)}, \quad \text{et} \quad NQ = \tfrac{1}{2}\,NR = QR.$$

La première des formules (1) est ainsi démontrée.

(*) Rectification : Page 93, ligne 2, lire *normale en N et tangente en M*, au lieu de normale en M et tangente en N ; dernière ligne, lire $a^2 + c^2$, au lieu de $a^2 + b^2$.

(**) Ainsi, *si l'on arrête la normale au petit axe, la projection de cette droite sur un rayon vecteur du point d'incidence est égale au demi grand axe ;* théorème connu, qui donne aussi une propriété intéressante de la bissectrice d'un angle d'un triangle.

Pour établir la seconde formule, observons que

$$\frac{y}{y'} = -\frac{RP}{PN} = -\frac{RQ+QP}{PN} = -\frac{QN+QP}{PN} = -\frac{2QN-PN}{PN}$$
$$= -\left(2\frac{QN}{PN}-1\right) = -\left(2\frac{a^2}{b^2}-1\right) = -\frac{2a^2-b^2}{b^2}.$$

Les points Q', Q'' et R' décrivent des conchoïdes de l'ellipse proposée; car $NQ' = NQ'' = a$, $NR' = 2a$.

3. M. Lemoine nous a communiqué une démonstration analogue, mais un peu moins simple. Voici les intéressantes remarques qui accompagnent sa solution.

Comme $MF + MF' = NF + NF'$, F est le point de contact de MN avec le cercle exinscrit au triangle MF'N correspondant à l'angle MF'N. En changeant les notations, on peut donc énoncer les propriétés suivantes d'un triangle :

Soient A', B', C', A'_a, B'_a, C'_a, *etc. les points de contact des cercles inscrit et exinscrits à un triangle* ABC *avec les côtés, et soient* I, I_a, I_b, I_c *les centres de ces cercles. La perpendiculaire élevée au milieu de la droite* AA'_a *passe par les milieux des droites* BI_b, CI_c.

Si l'on applique la transformation continue en A à ce dernier théorème, on a la proposition suivante :

La perpendiculaire au milieu de la droite AA' *passe par les milieux des droites* BI_c *et* CI_b(*).

De même la transformation continue en B donne ce théorème :

La perpendiculaire au milieu de la droite AA'_b *passe par le milieu de* BI.

Par analogie, la perpendiculaire au milieu de AA'_b divise CI en deux parties égales.

3. Voici comment M. Cl. Servais démontre la formule $x = -x'$. Soient M', S les points où les droites NF', NR rencontrent une seconde

---

(*) Ces théorèmes de M. Lemoine en donnent d'autres si l'on considère $I_a I_b I_c$ comme étant le triangle primitif :

Soient A B C *un triangle quelconque*, A', B', C' *les pieds des hauteurs*, α *et* α' *les projection de* A *et* H (orthocentre) *sur* B'C'. *La droite qui unit les milieux des hauteurs* BB', CC' *est perpendiculaire au milieu de la droite* Aα ; *celle qui joint les milieux des segments* BC', CB' *est perpendiculaire au milieu* A'α'.

Ces propositions sont contenues dans un article de M. E. Bertrand (*Mathesis*, t. XII, p. 130 et t. XIII, p. 155); elles sont démontrées directement par M. Sollertinsky (n° 5).

fois l'ellipse donnée. Si par N on mène deux cordes quelconques, Nm et Nm', symétriques par rapport à NR, les extrémités m et m' se correspondent dans une involution; donc la corde mm' passe par un point fixe. Trois positions particulières de la droite mm' sont : les tangentes en N et S, et la droite MM'; par suite, la droite MM' passe par le pôle de la corde normale NS, et les tangentes en M et M' se coupent en R sur la corde NS(*).

Cela posé, si l'on mène le diamètre NON' et la corde NN'' parallèle à l'axe focal FF', le faisceau N (MM'N'N'') qui projette la division harmonique (FF'O∞), est harmonique; donc les tangentes aux points M, M' se coupent sur la droite N'N'', ce qui démontre la formule $x = -x'$.

M. Servais démontre ensuite la seconde des formules (1), de la même manière que M. Déprez.

4. La démonstration suivante, due à M. A. C., se rapproche de celle de M. Déprez.

Soient Q le milieu de NR, R' la projection de R sur NM. Les triangles QFR', QF'N sont égaux; en effet,

$$R'Q = QN, \quad \textit{angle}\ QR'F = QNF',$$

et FR' = NF' (F et R' sont les points de contact de MN avec les cercles ex-inscrits au triangle NMF' qui correspondent aux angles F' et N(**)). Il résulte de là que QF = QF'; donc le petit axe de l'ellipse passe au milieu de NR.

5. Voici encore une solution fort intéressante, due à M. Sollertinsky.

Soient α, β, γ les pieds des hauteurs d'un triangle ABC; A' le symétrique de A par rapport à BC (fig. 2).

Les triangles $A\beta\gamma$, A'BC étant directement semblables, les milieux α, β', γ' des jonctions AA', Bβ, Cγ de leurs sommets homologues forment

---

(*) Cette propriété résulte aussi de l'égalité NR' = 2a, établie ci-dessus pour le triangle MNF' et applicable par analogie au triangle M'NF. On peut également observer que si les tangentes en deux points quelconques M, M' d'une ellipse se rencontrent en R, les droites RF, RF' sont les bissectrices des angles MFM', MF'M'.

(**) L'égalité MF' + MF = NF + NF' suffit pour démontrer que F est le point de contact de MN avec le cercle exinscrit au triangle M'NF qui correspond à l'angle F'; le centre I de ce cercle étant à la rencontre des tangentes menées en N M, on voit que IF est perpendiculaire à MN (théorème connu).

le triangle $\alpha\beta'\gamma'$ directement semblable à $A\beta\gamma$. De même, le milieu O de la droite $\alpha'\alpha$ joignant les pieds des hauteurs $A\alpha'$, $A'\alpha$ des premiers triangles est le pied de la hauteur αO du triangle $\alpha\beta'\gamma'$. Ainsi $\alpha'\alpha$, $\beta'\gamma'$ sont perpendiculaires l'une à l'autre.

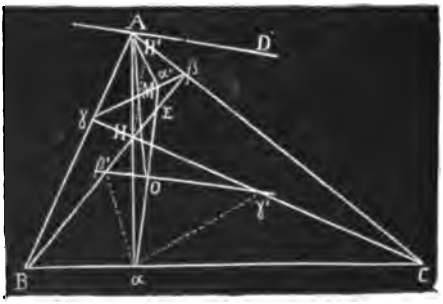


Fig. 2.

H, H' étant les orthocentres de $A\beta\gamma$, ABC, les droites HH', $\alpha\alpha'$ sont évidemment parallèles; mais HH' et $\beta\gamma$ se coupent mutuellement en deux parties égales : donc, la médiane AM de $\beta\gamma$ passe en O.

De plus, AD étant la conjuguée harmonique de $A\alpha'$ par rapport à l'angle BAC, on sait (*) que AD, HH' sont perpendiculaires; $\alpha\alpha'$ est donc perpendiculaire sur AD.

En supposant maintenant que AC, AB sont les tangentes en β, γ à une conique à centre qui a son foyer en α' et par suite AD pour directrice, on voit, d'après ce qui précède, que 1° $\alpha'\alpha$ est l'axe focal de la conique; 2° O est son centre et par suite le point α est le second foyer et $\beta'\gamma'$ est le second axe; 3° cet axe passe par les milieux β', γ' des distances βB, γC; enfin 4° E étant la rencontre de $B\beta$, $\alpha'\alpha$, on sait que

$$\frac{\beta E}{\beta\beta'} = \frac{\pm b^2}{a^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\beta E}{EB} = \frac{\pm b^2}{2a^2 \mp b^2} = \frac{\pm b^2}{a^2 + c^2}.$$

Par suite, si β décrit la conique $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$, le point B parcourt la conique

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{b^2 y^2}{(a^2 + c^2)^2} = 1.$$

●. M. Déprez nous transmet une solution analytique du problème de M. Milne. Si $(a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ sont les coordonnées de N, celles de M sont

$$\frac{a[2ac - (a^2 + c^2)\cos\varphi]}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi}, \quad \frac{-b^2\sin\varphi}{a^2 + c^2 - 2ac\cos\varphi}.$$

(*) Voir, par exemple, J. M. E. 1892, p. 24, qu. 427, où l'on trouve la démonstration suivante : La division harmonique $(\gamma\beta M\infty)$ est projetée à partir de H par un faisceau harmonique dont trois rayons sont respectivement perpendiculaires à $A\gamma$, $A\beta$, $A\alpha'$, etc.

La normale NR et la tangente MR ont respectivement pour équation

$$by\cos\varphi = ax\sin\varphi + c^2\sin\cos\varphi = 0,$$

$$aby\sin\varphi + [(a^2+c^2)\cos\varphi - 2ac]x + a(a^2+c^2-2ac\cos\varphi) = 0.$$

On tire de là les coordonnées de R :

$$x = -a\cos\varphi, \quad y = -\frac{a^2+c^2}{b}\sin\varphi.$$

Éliminons φ entre ces égalités, etc.

La question analogue pour l'hyperbole se traite de la même manière.

(I. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 826.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 104).

On donne un point P *dans le plan d'un triangle* ABC. *Si l'on fait tourner les droites* AP, BP, CP *autour de* A, B, C *d'un même angle* φ *et dans un sens, elles forment un triangle* A' B' C', *dont les sommets parcourent des circonférences lorsque* φ *varie, qui reste toujours semblable à lui-même et dans lequel* P *est toujours son propre homologue. Comment faut-il choisir le point* P *pour qu'il soit l'orthocentre de* A'B'C', *le point de Lemoine, un point de Brocard, le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle inscrit, etc.? Calculer les côtés du triangle* A'B'C' *en fonction des éléments du quadrangle* ABCP *et de l'angle* φ. (Déprez.)

Solution par M. Droz Farny. Les angles PBA', PCA' étant égaux, le quadrilatère BPA'C est inscriptible; donc le point A', lorsque φ varie, se meut sur la circonférence BPC. De même, les points B', C' décrivent les circonférences APC, APB.

L'angle BPC étant égal à BA'C, on voit facilement que les angles du triangle A'B'C' sont les suppléments des angles BPC, CPA, APB. Ce triangle a donc une forme constante.

Dans le quadrilatère inscriptible BPA'C, les angles PA'B, PA'B' sont respectivement égaux aux angles PCB, PBC. De même les *angles*

$$A'B'P = CAP, \quad PB'C' = PCA, \quad B'C'P = PBA, \quad PC'A' = PAB.$$

Ces égalités montrent que le point P est toujours son propre homologue dans le triangle ABC.

Si P est l'orthocentre de A'B'C', les angles PB'A', PC'A' sont égaux;

il en est donc de même des angles PAC, PAB. On en conclut que P est le centre du cercle inscrit à ABC.

Si P est le centre du cercle inscrit à A'B'C', les angles PB'A' et PB'C' sont égaux ; il en résulte que les angles PAC et PCA sont égaux. Donc P est le centre du cercle circonscrit à ABC.

Prenons pour P un point de Brocard de ABC ; les angles PAB, PBC, PCA (ou PAC, PBA, PCB) étant égaux, il en sera de même de PC'A', PA'B', PB'C' (ou de PB'A', PC'B', PA'C'). Donc P est un point de Brocard, de même espèce, du triangle A'B'C'.

Si P est le point de Lemoine du triangle A'B'C', on a

$$\frac{\sin PA'B'}{\sin PA'C'} = \frac{A'B'}{A'C'} = \frac{\sin C'}{\sin B'};$$

par suite,

$$\frac{\sin PBC}{\sin PCB} = \frac{\sin APB}{\sin APC} = \frac{PC}{PB};$$

donc les triangles APB, APC sont équivalents et P est le centre de gravité de ABC.

Enfin, lorsque P est le centre de gravité de A'B'C', il est un des foyers de Steiner de ABC.

Si l'on calcule A'C dans le triangle BA'C, B'C dans le triangle AB'C, on trouve :

$$A'C = \frac{a \sin (PBC - \varphi)}{\sin BPC}, \quad B'C = \frac{b \sin (PAC + \varphi)}{\sin APC};$$

d'où

$$A'B' = \left(\frac{a \cos PBC}{\sin BPC} + \frac{b \cos PAC}{\sin APC} \right) \sin \varphi.$$

Comment tirer de là la proportion :

$$\frac{A'B'}{\sin APB} = \frac{B'C'}{\sin BPC} = \frac{C'A'}{\sin CPA} ? \qquad \text{(J. N.)}$$

Question 837.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 127).

On donne deux droites Ox, Oy *et un point* S. *Une sécante menée par* S *rencontre* Ox *en* M, Oy *en* M'. *On construit le triangle* SMP *directement semblable au triangle* SOM'. *Le lieu de* P *est une conique ayant pour foyer* S. (*Collège d'Aberystwyth*, Examens de 1892.)

Solution par M. Déprez. Les triangles semblables SMP, SOM' donnent

$$SP = \frac{SM.SM'}{SO}. \qquad (1)$$

Pour fixer les idées, supposons les angles xOy et OSM' aigus, et S situé à l'intérieur de l'angle MOM'. Désignons SP par ρ, les angles xOS, yOS, PSO par α, β, ω; la perpendiculaire élevée en S sur MM' étant la bissectrice de l'angle PSO, les angles OSM, OSM' sont égaux à

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\omega}{2}, \quad \frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}.$$

Dans les triangles OSM, OSM', on a

$$\frac{SM}{\sin\alpha} = \frac{SO}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\omega}{2}+\alpha\right)}, \quad \frac{SM'}{\sin\beta} = \frac{SO}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\omega}{2}+\beta\right)}; \qquad (2)$$

tirant de ces égalités les valeurs de SM et SM' pour les porter dans l'équation (1), on trouve

$$\rho = \frac{SO}{\cos\left(\frac{\omega}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\omega}{2}-\beta\right)} = \frac{2SO}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\omega+\alpha-\beta)}.$$

Le lieu de P est donc une hyperbole ayant pour foyer le point S et dont l'axe focal fait avec SO l'angle $\alpha-\beta$; si A et B sont les projections de S sur Ox et Oy, cet axe est la perpendiculaire abaissée de S sur la droite AB. Si l'angle xOy est droit, le point P décrit une droite ayant pour équation $\rho\cos(\omega+\alpha-\beta)=2SO$.

Remarque. Soit D le centre du cercle circonscrit au triangle SPM; le triangle SPD étant de forme constante, le point D décrit une hyperbole.

×Question 866.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 214.)

Soient O *le centre du cercle circonscrit à un triangle,* I *le centre de son cercle inscrit. La perpendiculaire élevée en* I *à* IO *rencontre le cercle inscrit en deux points* K *et* K'. ***Montrer que le périmètre du triangle*** OKK' ***est égal au diamètre du cercle circonscrit.*** (E. N. Barisien.)

Solution par M^lle^ de Haas et MM. Cl. Thiry, Droz-Farny, Collette,

MANDART et DELAHAYE. En appelant x ce périmètre, r et R les rayons des cercles inscrit et circonscrit, on a :

$$x = KK' + OK + OK' = 2r + 2OK.$$

Mais

$$OK = \sqrt{r^2 + \overline{OI}^2} = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr} = R - r;$$

donc

$$x = 2r + 2(R - r) = 2R.$$

REMARQUE. Si l'on remplace le cercle inscrit I par le cercle exinscrit I_a, on trouve $OK + OK' - KK' = 2R$. (DELAHAYE.)

×Question 868.

(Voir *Mathesis* (2), III, p. 215).

Soit T_n *le* n^e *nombre triangulaire, c'est-à-dire*

$$T_n = \tfrac{1}{2} n(n+1).$$

Démontrer que le produit

$$(T_n + T_{n+1})(T_p + T_{p+2})$$

est la somme de trois nombres triangulaires. (DE ROCQUIGNY.)

Solution par M. H. MANDART. Le produit considéré est

$$\left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]\left[\frac{p(p+1)}{2} + \frac{(p+2)(p+3)}{2}\right]$$

$$= (n+1)^2(p^2+3p+3) = \begin{cases} \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} + \\ \dfrac{(np+p+2n+1)^2 + (np+p+2n+2)}{2} + \\ \dfrac{(np+p+n+1)(np+p+n+2)}{2}. \end{cases}$$

Le théorème proposé est donc démontré.

Question 899.

(Voir *Mathesis* (2), t. III, p. 280.)

Les droites telles que le centre des moyennes distances de leurs points d'intersection avec une parabole semi-cubique soit sur l'axe de la courbe, enveloppent une autre parabole semi-cubique. (E. N. Barisien.)

Solution par M. H. Brocard. Une parabole du second degré, de paramètre p, une normale à cette courbe, ayant m pour coefficient d'inclinaison, et la parabole semi-cubique, enveloppe des normales, ont respectivement pour équations

$$y^2 = 2p(x+p)^3, \tag{C}$$

$$y = mx - \frac{pm^3}{2}, \tag{N}$$

$$y^2 = \frac{8x^3}{27p} = \frac{x^3}{a}. \tag{E}$$

Soit

$$y = tx + u \tag{D}$$

l'équation d'une sécante. L'équation aux ordonnées des points de rencontre avec la parabole semi-cubique (E) sera évidemment

$$(y-u)^2 = t^3 a y^2,$$

ou

$$y^3 - (3u + at^3)y^2 + 3u^2 y - u^3 = 0.$$

La condition énoncée exprime que la somme algébrique des ordonnées est nulle. On a donc

$$3u + at^3 = 0$$

de sorte que l'équation (D) devient

$$y = tx - \frac{at^3}{3},$$

de même forme que l'équation (N). Les droites (D) ont donc pour enveloppe la parabole semi-cubique représentée par l'équation

$$4P^3 + 27Q^2 = 0$$

ou

$$y^2 = \frac{4x^3}{9a} = \frac{32x^3}{243p}.$$

Ont résolu la même question MM. Gillet, Hacken, Déprez et Droz-Farny.

QUESTIONS D'EXAMEN.

822. Résoudre le système

$$\frac{y+\sqrt{5}}{x}+\frac{2y+3x}{4(y-\sqrt{5})}=0,$$

$$\frac{x+3y}{5}+\frac{1}{y-x}=0.$$

Les équations se ramènent à

$$4y^2+2xy+3x^2=20,$$
$$3y^2-2xy-x^2=-5;$$

d'où, par soustration, $y+2x=\pm 5$, etc.

823. La surface d'une sphère est égale à 24,576 dm². Trouver un cylindre droit ayant même volume et même surface latérale que la sphère.

824. Une pyramide régulière SABC et un prisme droit ABCA'B'C' ont même base ABC et même hauteur SO. Trouver cette hauteur, sachant que les deux corps ont même surface latérale.

Si M est le milieu de AB, on a SM = 2SO. Si SO = x, AB = a, on trouve aisément $\overline{MO}^2=4x^2-x^2=\frac{a^2}{12}$, $x=\frac{1}{6}a$.

825. On considère un tronc de pyramide rectangulaire, dont la hauteur passe aux centres des bases La somme des aires des deux bases du tronc = a^2; la somme des périmètres de ces bases = $2b$; le rapport des côtés homologues des deux bases = m, et l'arête latérale du tronc = c. Calculer le volume du tronc.

Les dimensions des bases du tronc étant x, y, mx, my, on a

$$xy(1+m^2)=a^2,\quad (x+y)(1+m)=b,$$
$$h^2=c^2-\tfrac{1}{4}(x^2+y^2)(1-m^2),\quad V=\tfrac{1}{3}hxy(1+m+m^2).$$

826. Trouver une progression arithmétique d'un nombre pair de termes, sachant que la somme des termes de rang impair = 70, que celle des termes de rang pair = 85, et que le produit des termes extrêmes = 58.

Désignons x, y, $2n$ le premier terme, la raison et le nombre des termes de la progression; nous aurons

$$n[x+(n-1)r]=70,\quad n(x+nr)=85.$$
$$x[x+(2n-1)r]=58.$$

Les deux premières équations donnent, par soustraction, $nr = 15$; la seconde se réduit donc à $n(x+15) = 85$. On en déduit $n = \frac{85}{x+15}$, $r = \frac{15}{n} = \frac{3(x+15)}{17}$; portant ces valeurs dans la troisième équation, on trouve $14x^2 + 465x - 986 = 0$; d'où deux valeurs de x dont une seule, $x = 2$, convient au problème.

627. On considère trois progressions géométriques, dont les termes initiaux forment une progression géométrique de raison 2, et dont les raisons forment une progression arithmétique de raison 1. Déterminer ces progressions, sachant que leurs seconds termes ont pour somme 24, et que les trois premiers termes de la troisième progression ont pour somme 84.

On représente ces progressions par

$$x, xy, xy^2, xy^3, \quad \cdots$$
$$2x, 2x(y+1), \quad 2x(y+1)^2, \quad \cdots$$
$$4x, 4x(y+2), \quad 4x(y+2)^2, \quad \cdots;$$

alors

$$7xy + 10x = 24, \quad 4x[1 + (y+2) + (y+2)^2] = 84.$$

Éliminons x entre les équations, etc.

628. Les coordonnées rectangulaires des sommets d'un quadrilatère sont (2, 3), (4, 3), (10, 6), (6, 12); calculer les côtés, les angles et la surface.

629. Du point (5, 6) on mène des tangentes à la circonférence ayant pour équation $x^2 + y^2 = 16$. Trouver l'angle de ces tangentes, et la surface du triangle ayant pour côtés ces tangentes et la corde des contacts.

630. Trouver l'aire du triangle formé par l'axe des x avec les deux tangentes menées aux courbes $x^2 + 4x + y^2 = 0$, $y^2 = 4x$ en un de leurs points d'intersection.

631. Trouver l'équation de la circonférence qui passe par le point $(7, -7)$ et touche la droite $5y + 12x = 338$ au point ayant pour abscisse 24.

632. Trouver l'équation du lieu du centre d'une circonférence qui passe par le point (6, 8) et touche la circonférence $x^2 + y^2 = 36$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

937. Soit un triangle ABC, et soient :

A_1, B_1, C_1 les symétriques de l'orthocentre par rapport aux milieux des hauteurs respectives ; A′, B′, C′ les symétriques des pieds des hauteurs par rapport aux milieux des côtés. 1° Il y a une ellipse qui passe par les six points A_1, B_1, C_1, A′, B′, C′. 2° Elle est normale aux hauteurs en A_1, B_1, C_1. 3° Elle est tangente aux côtés en A′, B′, C′. 4° Elle a pour centre le centre du cercle circonscrit. 5° La somme de ses demi-axes égale le rayon du cercle circonscrit. 6° Elle a pour équation en coordonnées normales :

$$\Sigma a \sqrt{\frac{x}{\cos A}} = 0,$$

7° Si le cercle ABC et l'ellipse sont fixés, il y a une infinité de triangles ABC. (E. LEMOINE.)

938. Trouver une conique telle, que les polaires des sommets d'un quadrilatère donné forment un quadrilatère égal à un second quadrilatère donné. (JUEL.)

939. Un triangle ABC se déplace de telle façon que les extrémités du côté BC qui a une longueur constante décrivent deux courbes données et que le côté AB soit tangent à une troisième courbe donnée. On demande de construire la tangente à la trajectoire du point A et de déterminer le point de contact du côté AC avec son enveloppe : 1° si l'angle C reste constant ; 2° si le côté AC a une longueur invariable. (L. MEURICE.)

940. A un triangle donné ABC on circonscrit une ellipse ayant pour centre le centre de gravité du triangle. Démontrer 1° que les rayons de courbure en A, B, C sont entre eux comme les cubes des côtés opposés BC, CA, AB, 2° que le produit de ces rayons est égal au cube du rayon de la circonférence ABC (*).

(*) Cette proposition est peut-être connue ; elle nous a été communiquée par M. Droz-Farny.

×**941.** Dans tout triangle ABC;

$$abc + (a-b)(b-c)(c-a) = 4Rr(a\cos C + b\cos A + c\cos B),$$
$$abc - (a-b)(b-c)(c-a) = 4Rr(b\cos C + c\cos A + a\cos B).$$

(MANDART.)

942. Etant donnés deux faisceaux homographiques de quatre rayons, si une transversale coupe le premier suivant la ponctuelle ABCD, on peut toujours trouver deux transversales réelles qui coupent le second faisceau suivant une ponctuelle A'B'C'D' *égale* à ABCD (DROZ-FARNY.)

943. Trouver le lieu d'un point tel que les axes des deux paraboles menées par les points d'incidence des normales menées de ce point à une ellipse donnée se coupent sur cette ellipse. (E. N. BARISIEN.)

×**944.** Par un point fixe P pris à l'intérieur d'un cercle donné (C), on mène une corde quelconque dont les extrémités sont A et B. On décrit sur PA comme diamètre un cercle (Σ) qui rencontre le cercle (C) en un second point A', et sur PB comme diamètre, un cercle (Σ') qui rencontre (C) en un second point B' :

1° Le lieu du point de rencontre des tangentes communes extérieures à (Σ) et (Σ') est une ligne droite;

2° le lieu des points de rencontre des tangentes communes extérieures avec la tangente intérieure aux mêmes cercles (Σ) et (Σ') est un cercle.

3° La droite A'B' passe par un point fixe.

4° Les deux tangentes communes extérieures et la droite A'B' passent par un même point.

5° Les droites AA' et BB' se coupent sur une droite fixe.

6° Le point de rencontre des droites AB' et BA' est un point fixe.

(E. N. BARISIEN.)

Ces propositions peuvent s'établir synthétiquement ou analytiquement. — La projection du point P sur les tangentes communes extérieures aux cercles (Σ) et (Σ') décrit une quartique.

945. Le lieu des points tels que si l'on mène les trois normales à une parabole, le cercle passant par les seconds points de rencontre des normales avec la parabole ait son centre sur l'axe de la parabole, est une parabole de même paramètre que la parabole donnée. (E. N. BARISIEN.)

Rectifications. Page 103, ligne 8, lire $x + y - 1$, au lieu de $x + y - 1$.
Question 928, lire BG au lieu de DG.

SUR L'ENVELOPPE D'UNE DROITE DE LONGUEUR CONSTANTE

DONT LES

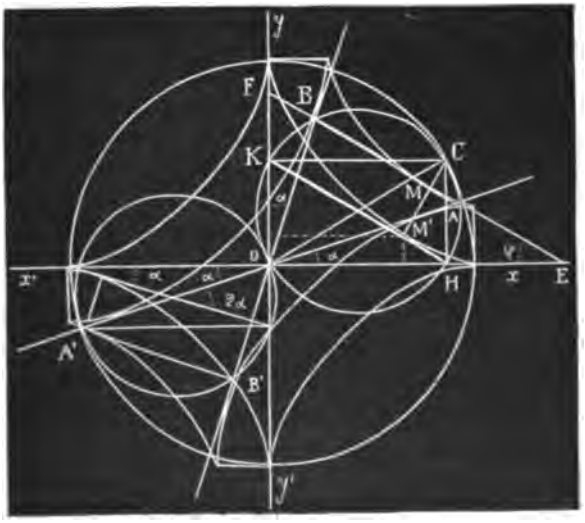
extrémités glissent sur les deux côtés d'un angle quelconque.

Désignons par 2α le complément de l'angle donné AOB, supposé aigu, et prenons pour axes coordonnés deux droites Ox, Oy perpendiculaires entre elles et inclinées de l'angle α sur les deux côtés de l'angle donné.

Les équations des droites OA et OB seront respectivement

$$y = x \operatorname{tang} \alpha, \quad y = x \operatorname{cotg} \alpha. \tag{1}$$

Traçons la droite mobile AB dans une quelconque de ses positions et



soient E, F les points où elle coupe les axes Ox, Oy; désignons par l la longueur donnée AB et par φ l'angle OEF que la droite mobile fait avec l'axe Ox. L'équation de AB sera de la forme

$$y = -x \operatorname{tang} \varphi + m, \tag{2}$$

et on devra déterminer m de manière que la partie AB de cette droite comprise entre les côtés de l'angle AOB soit égale à l.

Les équations (1) et (2) donnent aisément les coordonnées des points

A et B, et, par suite, la distance AB. En égalant cette distance à l et résolvant l'équation résultante par rapport à m, on trouve sans difficulté

$$m = \frac{l}{2\cos\varphi}\operatorname{tang} 2\alpha + \frac{l\sin\varphi\cos\varphi}{\cos\varphi\cos 2\alpha}$$

ou

$$m = \frac{b}{\cos\varphi} + a\sin\varphi, \tag{3}$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$a = \frac{l}{\cos 2\alpha}, \quad b = \frac{1}{2} l \operatorname{tang} 2\alpha. \tag{4}$$

Remplaçons dans l'équation (2) m par la valeur qne nous venons de déterminer, l'équation de la droite mobile AB, dans une quelconque de ses positions, pourra s'écrire sous la forme

$$y\cos\varphi + x\sin\varphi = a\sin\varphi\cos\varphi + b. \tag{5}$$

Pour trouver l'enveloppe des droites représentées par cette équation lorsque l'on donne à l'angle φ toutes les valeurs possibles, différentions-la par rapport à φ; on obtient la suivante :

$$-y\sin\varphi + x\cos\varphi = a\cos^2\varphi - a\sin^2\varphi, \tag{6}$$

et les coordonnées du point où la droite AB touche son enveloppe sont les valeurs de x et de y qui vérifient simultanément les deux équations (5) et (6), savoir :

$$(M)\begin{cases} x = a\cos^2\varphi + b\sin\varphi, \\ y = a\sin^2\varphi + b\cos\varphi. \end{cases} \tag{7}$$

En éliminant φ entre ces deux équations, on obtient l'équation de l'enveloppe sous sa forme ordinaire. Mais il n'y a aucun avantage à faire cette élimination qui, d'ailleurs, ne présente aucune difficulté sérieuse. Il vaut mieux étudier les propriétés de la courbe enveloppe au moyen des équations (7). Si l'on fait cette élimination, on trouve pour l'équation du lieu

$$\left[xy + \frac{b}{3a}\left(\frac{8}{9}b^2 - a^2 - x^2 - y^2\right)\right]^2 = \frac{1}{27a^2}\left[a^2 + \frac{4}{3}b^2 - x^2 - y^2\right]^3.$$

Propriétés de la courbe. Considérons le lieu du point M′ défini par les équations

$$(8) \qquad (M') \begin{cases} x = a\cos^3\varphi, \\ y = a\sin^3\varphi. \end{cases}$$

Ce lieu est une hypocycloïde à quatre rebroussements, enveloppe des droites de longueur a dont les extrémités glissent sur les droites rectangulaires xx', yy'.

Les valeurs (7) et (8) montrent que les deux courbes qu'elles déterminent sont équidistantes de la quantité b. Elles ont même développée et les rayons de courbure aux deux points correspondants M et M′ diffèrent (algébriquement) de la longueur b.

L'angle φ variant de 0 à 2π, *ces deux courbes fermées et équidistantes ont même longueur*. En effet, la différentiation des équations (7) donne :

$$(9) \qquad \begin{cases} dx = (-3a\cos^2\varphi\sin\varphi + b\cos\varphi)\,d\varphi, \\ dy = (3a\sin^2\varphi\cos\varphi - b\sin\varphi)\,d\varphi; \end{cases}$$

ajoutant ces équations après les avoir élevées au carré et extrayant la racine carrée de l'équation ainsi obtenue, on aura

$$(10) \qquad ds = (3a\sin\varphi\cos\varphi - b)\,d\varphi.$$

Comme $d\varphi$ est égal à l'angle de contingence, on en déduit la valeur du rayon de courbure en M :

$$(11) \qquad R = 3a\sin\varphi\cos\varphi - b.$$

Faisons les mêmes calculs pour la courbe (8), lieu du point M′, on trouve

$$(12) \qquad ds' = 3a\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$(13) \qquad R' = 3a\sin\varphi\cos\varphi.$$

Si l'on intègre les équations (10) et (12) entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient les longueurs de deux arcs correspondants des deux courbes, savoir :

$$(14) \qquad \begin{cases} s = \dfrac{3a}{2} - \dfrac{\pi b}{2}, \\ s' = \dfrac{3a}{2}. \end{cases}$$

Lorsque la droite mobile se trouve dans le second angle yox', son équation s'écrit $y = x \operatorname{tang} \varphi + m$; l'angle φ se trouve ainsi remplacé par $-\varphi$, et les coordonnées du point M où la droite touche son enveloppe seront alors

$$(15) \qquad \begin{cases} x = a\cos^3\varphi - b\sin\varphi, \\ y = -a\sin^3\varphi + b\cos\varphi. \end{cases}$$

On en déduit pour la différentielle de l'arc, lieu du point M,

$$(16) \qquad ds = -(3a\sin\varphi\cos\varphi + b)\,d\varphi.$$

En intégrant cette équation entre les limites $\frac{\pi}{2}$ et π, on trouve pour la longueur de l'arc compris entre le deuxième et le troisième point de rebroussement (nous avons pris ds avec le signe — parce que la différentielle $d\varphi$ est négative entre ces limites),

$$(17) \qquad s = \frac{3a}{2} + \frac{\pi b}{2}.$$

Les formules (14) et (17) montrent bien que les deux courbes ont la même longueur totale.

Remarques. I. Il est facile de voir qu'on obtient les deux points correspondants M et M′ par la construction géométrique suivante : Après avoir tracé la droite mobile AB dans une quelconque de ses positions, on fait passer un cercle par les trois points, O, A et B, lequel coupe en H et K les axes Ox, Oy, et l'on tire la droite HK, nécessairement parallèle à AB ; on trace ensuite le rectangle HOKC et l'on projette orthogonalement le point C en M sur AB et en M′ sur HK. Les points M et M′ ainsi obtenus sont ceux où les droites $HK = a$ et $AB = l$ touchent leurs enveloppes. Il est facile de voir que le lieu du point M′ est l'hypocycloïde engendrée par le cercle de diamètre $\frac{1}{2}a$ roulant intérieurement sur le cercle de rayon a.

II. Le lieu des centres de courbure des deux courbes s'obtiendrait évidemment en cherchant l'enveloppe de leurs normales, c'est-à-dire l'enveloppe des droites représentées par l'équation (6), laquelle peut s'écrire

$$y\sin\varphi - x\cos\varphi = a\sin^2\varphi - a\cos^2\varphi.$$

On trouve une seconde hypocycloïde, enveloppe d'une droite de lon-

gueur $2a$ dont les extrémités glissent sur les bissectrices des angles des axes coordonnés.

La démonstration de ce théorème peut être faite soit analytiquement, soit géométriquement (*). (J. M.)

RAYON DE COURBURE D'UNE CONIQUE;

par M. A. Gob, professeur à Hasselt.

Une conique étant circonscrite au triangle ABC, soient ρ le rayon de courbure en un point M, x, y, z les distances de M aux côtés de ABC, α, β, γ les distances de la tangente en M aux sommets A, B, C. Nous nous proposons de démontrer géométriquement la formule

$$\rho = R\frac{xyz}{\alpha\beta\gamma}, \tag{1}$$

R désignant le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC(**).

1. Si ABC, A'B'C' désignent deux triangles inscrits à une même circonférence, on a l'égalité

$$\frac{A'BC \,.\, B'CA \,.\, C'AB}{AB'C' \,.\, BC'A' \,.\, CA'B'} = \frac{ABC}{A'B'C'}. \tag{2}$$

En effet, il suffit de remplacer chacun de ces triangles par le produit de ses trois côtés divisé par le double du diamètre du cercle.

2. Si l'on fait une projection orthogonale de la figure précédente, on voit que l'égalité (2) est aussi applicable à deux triangles ABC et A'B'C', inscrits à une même ellipse. Le principe de continuité montre ensuite que la formule subsiste pour deux triangles inscrits à une conique quelconque.

3. Soient R, R' les rayons des circonférences circonscrites aux triangles

---

(*) Pour la démonstration géométrique de quelques-unes des propriétés que nous venons d'établir voir un intéressant article de M. Mannheim (N. A. M., 1878, p. 321).

(**) Comparer *Mathesis*, (2), III, supplément, et p. 217; Annuaire de l'Association française pour l'avancement des sciences, Congrès de Besançon, 1893.

ABC, A'B'C', et désignons par (M, XY) la perpendiculaire abaissée d'un point M sur la droite XY. Au moyen des relations

$$ABC = \frac{AB.BC.CA}{4R}, \quad A'B'C' = \frac{A'B'.B'C'.C'A'}{4R'},$$

$$A'BC = \tfrac{1}{2}BC.(A', BC), \quad AB'C' = \tfrac{1}{2}B'C'.(A, B'C'), \text{ etc.},$$

l'égalité (2) se transforme en

$$\frac{(A', BC)(B', CA)(C', AB)}{(A, B'C')(B, C'A')(C, A'B')} = \frac{R'}{R}. \tag{3}$$

4. Supposons les points A', B', C' infiniment rapprochés, et désignons par t la tangente en A', par ρ le rayon de courbure en A'; en passant à la limite, on obtient

$$\frac{(A', BC)(A', CA)(A', AB)}{(A, t)(B, t)(C, t)} = \frac{\rho}{R},$$

Ce qui est la formule (1).

5. La relation (2) est également applicable à deux triangles ABC, A'B'C' qui sont circonscrits à une même conique Σ; car de tels triangles sont inscrits à une même seconde conique. Par suite, la formule (3) subsiste également; mais (*Mathesis*, t. IX, p. 136) lorsque le triangle A'B'C' tend à se réduire à un point M de la conique Σ, le rayon R' du cercle circonscrit à A'B'C' a pour limite le quart du rayon de courbure ρ' de Σ en M. Il résulte de là que

$$\rho' = 4R\frac{xyz}{\alpha\beta\gamma}.$$

6. Si une conique est autopolaire par rapport à un triangle ABC, on peut démontrer par un raisonnement analogue au précédent que le rayon de courbure ρ'' en un point M a pour expression

$$\rho'' = 2R\frac{xyz}{\alpha\beta\gamma}.$$

Note. La formule (2) peut se déduire du théorème de Pappus appliqué au quadrilatère BCB'C' et aux points A, A'. (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Les femmes dans la science. Conférence faite au cercle Saint-Simon le 24 février 1894 par A. Rebière, Paris. Nony, 1894, 85 pages in-8°. Prix : 1-50 fr.

Cette conférence complète, sur un point intéressant, le livre *Mathématiques et Mathématiciens* du même auteur. Elle traite des six mathématiciennes les plus célèbres : Hypatie, Emilie du Chatelet, Maria Agnesi, Sophie Germain, Mary Somerville, Sophie Kowalevski. La lecture des biographies de ces femmes savantes est à la fois agréable et instructive.

M. Rebière prépare un autre ouvrage intéressant : *Mathématiciennes et autres savantes;* biographies, portraits, autographes, travaux scientifiques et autres, inventions et découvertes, etc. Il recevrait avec reconnaisance les documents, notes ou indications que les personnes, s'intéressant au sujet, voudraient bien lui adresser (rue Serpente, 28, ou rue des Écoles, 17, à Paris). Ce nouveau livre s'occupera : des *savantes professionnelles*, qui ont consacré aux études scientifiques la plus grande partie de leur vie; des *simples curieuses*, qui, livrées à d'autres travaux, ont touché pourtant aux sciences proprement dites; des *collaboratrices*, qui ont aidé les savants, activement et discrètement; enfin des *protectrices*, qui ont fondé des prix dans les académies ou répandu leurs bienfaits sous d'autres formes.

(J. N.)

Compte rendu préliminaire du Comité « Lobatschefsky » (22 février 1893 — 22 février 1894) (Extrait). Les cotisations reçues par le Comité « Lobatschefsky » ont atteint la somme de 7086 Rb. 38 1/2 Cop. à peu près 19684 francs, dont les dépenses (frais d'impression, de poste, etc.) montent à 155 rb. 10 cop. et en outre le Comité local a employé la somme de 40 roubles pour le renouvellement du monument funéraire de Lobatschefsky.

Conséquemment, défalcation faite, le chiffre du capital vers le 22 février 1894 porte la somme à 6891 Rb. 28 1/2 Cop.

Plus de 800 personnes de la Russie ont pris part à la souscription et plus de 150 à l'étranger. En outre, ont pris part à la souscription :

1. Royal Society of London.
2. Les membres de la Faculté des sciences de Paris.
3. Les membres de la Faculté des sciences de Nancy.
4. La société mathématique de Goettingen.
5. La société mathématique d'Amsterdam.
6. Le membres du congrès mathématique de Chicago.
7. Der Verband alter Herren des mathematischen Vereins der Universität Berlin.
8. La direction de la « Revue de métaphysique et de morale. »
9. La direction de « l'Intermédiaire des mathématiciens »

Comme les souscriptions, grâce au concours bienveillant des membres honoraires du Comité, ne cessent d'affluer, on pourra non seulement fonder un prix

digne de la mémoire de Lobatschefsky (p. ex. un prix triennal de 500 roubles), mais aussi placer un buste du célèbre géomètre dans le jardin portant son nom et situé vis-à-vis de l'Université à laquelle il a consacré sa noble vie.

Le Président de la Société Physico-mathématique, *A. Vassilief.*

I. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik von MORITZ CANTOR. **Erster Band. Von den ältesten Zeiten bis zum Jahre 1200** CHR. **Mit 114 Figuren im Text und 1 lithogr. Tafel. Zweite Auflage. Leipzig, Druck und Verslag von B. G. Teubner. 1894 (VII-883 p. grand in 8°). Prix : 22 marks.**

II. Dritter Band. Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1759. Erste Abtheilung Die Zeit von 1668 bis 1699. Mit 45 Figuren im Text. Ib., 1894 (251 p. gr. in 8°). **Prix : 22 marks.**

La première édition du tome I^er^ de la grande histoire des mathématiques de M. Cantor a paru en 1880; le tome second a été publié en 1892, et, dès 1894, l'illustre professeur de Heidelberg nous donne à la fois une seconde édition du tome I^er^ et un fascicule étendu du tome III (*).

« L'apparition en 1880 du premier volume de cette œuvre magistrale, dit M. Zeuthen, a été le signal de la publication d'un grand nombre d'écrits sur la partie de l'histoire des mathématiques dont elle traite. Ces écrits contiennent des rectifications de faits rapportés dans le livre de M. Cantor, ou d'explications données par lui, ou des compléments aux considérations qu'il a fait valoir. Mais ils sont en même temps des témoignages de la haute valeur de ses *Vorlesungen*. En effet, c'est lui qui a mis beaucoup d'auteurs en état de faire de nouvelles observations, et ceux qui ont eu à communiquer le fruit de recherches plus indépendantes, ont trouvé la place où ils peuvent les faire entrer dans le tableau d'ensemble, si complet et si véridique de toutes les questions de fait, qu'on lui doit. ».

Le second volume dont un juge très compétent, M. P. Tannery a dit qu'il semble impossible qu'on puisse lui adresser aucune critique sérieuse, et aussi le troisième, provoqueront sans doute, un semblable mouvement de recherches historiques.

En attendant qu'il puisse achever ce tome III, M. Cantor s'est vu forcé de publier une nouvelle édition du tome I^er^, la première étant épuisée. Dans cette nouvelle édition, il s'est efforcé d'utiliser ou au moins de citer tout ce qui a paru depuis treize ans dans le domaine de la science à laquelle il a voué sa vie.

Il faudrait plus de temps, de place et d'érudition que nous n'en avons pour indiquer avec précision tous les points où l'auteur a introduit des additions et améliorations dans son livre. Qu'il nous suffise de dire qu'il l'a augmenté d'un dixième environ et de signaler quelques-uns des travaux dont il a tenu compte dans une certaine mesure, soit pour en adopter les idées, soit pour les combattre.

Sur l'interprétation du papyrus Rhind-Eisenlohr, il maintient sa manière de voir contre Rodet; sur la géométrie avant Euclide, il admet partiellement certaines vues

---

(*) Voir sur le tome I, *Mathesis*, 1882, pp. 11-16, sur le tome II, *Mathesis*, 1892, pp. 19-20, 1893, p. 16.

d'Allman; en une foule d'endroits, il cite les articles si remarquables de P. Tannery (mais sans accepter toujours les conceptions parfois trop subjectives du savant ingénieur français); il utilise également ses deux ouvrages *Pour l'histoire de la Science hellène* et ses *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne.*

Les éditions nouvelles d'Archimède, d'Euclide et d'Apollonius dues à Heiberg, de Diophante due à Tannery, celles d'Autolycus par Hultsch et de Rhabdas par Tannery, encore, sont introduites en leur lieu dans la nouvelle édition du beau livre de Cantor. Il en est de même de la traduction de Diophante de Wertheim, de l'analyse du même auteur par Heath, des recherches de Weissenborn sur les mathématiques du haut moyen âge et, dans une mesure trop restreinte, du livre de Zeuthen sur les Coniques. Même sur des points très spéciaux (par exemple, *Bergk* sur les nombres diamétraux de Théon de Smyrne, *Hoernle* sur les mathématiques dans l'Inde), on voit que M. Cantor a lu à peu près tout ce qui a paru depuis quinze ans sur l'histoire des mathématiques. Il n'a pas même dédaigné des manuels, comme celui de Gow, qui ne sont le plus souvent qu'un abrégé ou un écho du sien. Plus d'une fois des découvertes nouvelles sont venues confirmer ses conjectures (Papyrus d'Akhmîm, par exemple).

L'histoire de M. Cantor est un monument durable à cause de la prudence même avec laquelle l'auteur y a mis en œuvre les innombrables documents qu'il a rassemblés depuis plus de trente ans. Ses *Beiträge* étaient plus hardis mais moins sûrs et moins documentés. L'expérience a prouvé que la science plus réservée de la *Geschichte* n'est pas moins suggestive que celle des *Beiträge*. Nous recommandons vivement la nouvelle édition des *Vorlesungen* à tous ceux qui s'intéressent à l'histoire des mathématiques et, en un certain sens, à l'histoire de l'esprit humain.

II. Voici les titres des chapitres du premier fascicule du tome III des *Vorlesungen* 82. Histoire des mathématiques. Éditions des classiques. Géométrie élémentaire, 83. Quelques recherches géométriques. Characteristica geometrica de Leibniz, 84. Calcul. Combinaisons. Rentes viagères, 85-86. Séries: Mercator, Brouncker, Gregory, Newton; Leibniz, Halley, de Moivre, Jacques Bernoulli; fractions continues, 87. Théorie des nombres, algèbre. 88. Coniques. Théorie des courbes. 89. Premières découvertes dans le domaine de l'analyse infinitésimale. 90. Newton et Leibniz jusqu'en 1687. 91. Leibniz 1687-1699. Jacques et Jean Bernoulli jusqu'à leur discussion. 92. Lutte des frères Bernoulli; de l'Hospital. Lettres de Newton de 1693. Adversaires de Leibniz.

Nous n'avons pu jeter que quelques coups de sonde dans le nouveau fascicule du livre de M. Cantor; mais ils ont suffi pour nous convaincre du profond intérêt qu'il présente. Ce qui s'y trouve raconté, c'est l'histoire de l'invention du calcul infinitésimal, c'est-à-dire de la plus grande découverte qui ait jamais été faite en mathématiques, et le récit en est fait, ce semble, avec l'exactitude minutieuse et la sévère impartialité qui caractérise l'Histoire des mathématiques de Cantor. Il y rend justice à la fois à Newton et à Leibniz. Nous avons vu avec plaisir, en particulier, qu'il fait très bien ressortir l'importance capitale de l'algorithme leibnizien.

P. M.

The Mathematical Gazette, a Terminal Journal for Students and Teachers, edited by E. M. LANGLEY, M. A. (Bedford, 16, Adelaïde Square). London, Macmillan and Co. Price Six pence, net.

Ce journal s'occupera principalement de mathématiques élémentaires : Arithmétrique, Algèbre, Géométrie, Trigonométrie et Mécanique. Voici le sommaire de la première livraison qui vient de paraître en avril 1894 :

1. The eccentric circle of Boscovich (Langley). 2. Greek Geometers before Euclid (J. S. Mackay). 3. Approximations and reductions (Lodge). 4. Solutions of Examination Questions. 5. Questions for solution. 6. L'intermédiaire des Mathématiciens.

Nous souhaitons à la *Mathematical Gazette* un succès durable. (*Rédaction*).

Problèmes de Géométrie analytique par E. MOSNAT. Tome troisième (géométrie à trois dimensions) à l'usage des candidats à l'École polytechnique, à l'école normale et à l'agrégation. Paris, Nony et Cie, 1894 (in-8°, de 399 pages). Prix : 7 fr.

Nous avons rendu compte des deux premiers volumes de M. Mosnat, qui se rapportent à la géométrie analytique plane. Le tome III se recommande par les mêmes qualités ; chaque chapitre est précédé d'un bon résumé de la théorie et renferme un excellent choix de problèmes résolus ; la deuxième partie du livre réunit un grand nombre de questions proposées. L'auteur a repris les principales questions posées aux concours généraux, à l'Agrégation, à l'École normale supérieure, etc., et en donne des solutions très-simples ; il s'est aussi attaché à traiter des sujets qui se trouvent à la limite des programmes officiels.

Voici la table des matières ; elle permet de juger de la richesse des matériaux réunis dans l'ouvrage de M. Mosnat ; nous indiquons à la suite de chaque chapitre le nombre des questions résolues et celui des questions proposées, I. Plan et droite (10-35). II. Sphère (10-35). III. Génération des surfaces (14-30). IV. Des quadriques en général (9-25). V. Tangentes et plans tangents (10-33). VI. Normales (7-22). VII. Sections planes et génératrices rectilignes (8-35). VIII. Centre (9-25). IX. Plans diamétraux et diamètres (11-30). X. Plans principaux et axes (10-35). XI Foyers, surfaces homofocales (10-32). XII. Enveloppes et complexes (10-33). XIII. Coordonnées tétraédriques (10-30). (J. N.).

SUR LES STROPHOÏDALES ;

par M. G. DE LONGCHAMPS.

Récemment(*), M. Barbarin a proposé d'appeler *Strophoïdales* les courbes engendrées de la manière suivante :

Soit U une courbe donnée ; on joint un point M de U (fig. 1), à deux pôles fixes O, O′ et sur MO, à partir de M, de part et d'autre, on prend

---

(*) *Revue de mathématiques spéciales*, 1894.

MI = MI′ = MO. Le lieu des points I, I′, est une certaine courbe V ; c'est cette courbe V qui est la strophoïdale de U.

Dans le cas particulier où U représente une droite Δ passant par O′, on retrouve la génération ordinaire de la strophoïde droite, ou de la strophoïde oblique, suivant que OO′ est, ou non, perpendiculaire sur Δ.

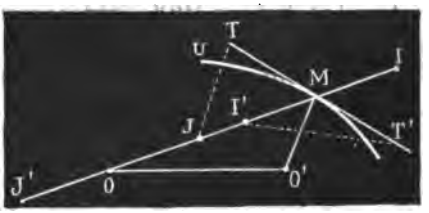


Fig. 1.

On peut se proposer de rechercher le tracé de la tangente en un point d'une strophoïdale ; nous allons rencontrer, en résolvant ce problème, une nouvelle application du *principe des transversales réciproques*.

Prenons OJ = MI; J décrit une certaine courbe W. Le principe rappelé prouve que la tangente en J, à W, et la tangente en I′, à V, coupent la tangente à V, au point M, en deux points T, T′ symétriques par rapport à M.

De même, en prenant OJ′ = JO, la tangente en M sera coupée en deux points symétriques, par rapport à M, par les tangentes en I et en J′.

D'après cette remarque, le tracé des tangentes aux strophoïdales est ramené à la recherche de la tangente à la courbe W, définie comme il a été dit.

Prenons donc, sur U (fig. 2) deux points M, M′, infiniment voisins ; soient μ, μ' les points correspondants, sur W. Ces points ont été obtenus en prenant

$$O\mu = O'M, \quad O\mu' = O'M'.$$

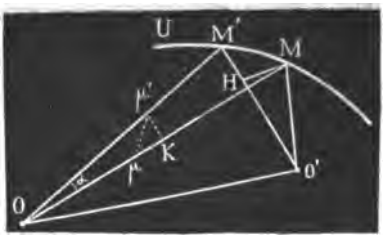


Fig. 2.

Posons

$$MOM' = \alpha,$$

et soient R, R′ les rayons des circonférences circonscrites aux triangles MM′O, $\mu\mu'$O. Lorsque M, M′ viennent se confondre, R, R′ ont pour limites des longueurs ρ, ρ'. On observera que ρ est connu ; c'est, en effet, le rayon de la circonférence qui, passant par O, vient toucher U au point M.

Cela posé, nous avons

$$(1)\qquad \frac{MM'}{\sin\alpha} = 2R, \quad \frac{\mu\mu'}{\sin\alpha} = 2R'.$$

Ayant abaissé sur M'O', MO les perpendiculaires MH, $\mu'K$, on observe que

$$\mu K = \mu\mu' \cos \mu'\mu K, \quad M'H = MM' \cos MM'H.$$

Or μK, M'H représentent respectivement, à des infiniment petits près d'ordre supérieur, les quantités infiniment petites, mais égales, $OM' - OM$, $O\mu' - O\mu$. On a donc

$$\lim \mu\mu' \cos \mu'\mu K = \lim MM' \cos MM'H,$$

ou encore, d'après (1),

$$\lim R' \cos \mu'\mu K = \lim R \cos MM'H.$$

Désignons (fig. 3) par V la limite de MM'H ; par V', celle de $\mu'\mu K$; nous obtenons, finalement, la relation

(A) $R' \cos V' = R \cos V.$

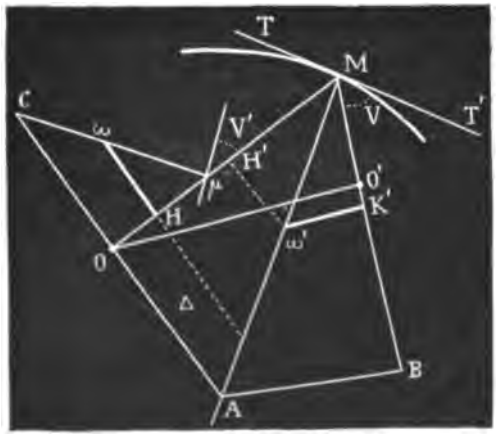


Fig. 3.

De cette égalité on peut déduire pour la détermination de la tangente cherchée, le tracé suivant :

La normale en M rencontre la perpendiculaire élevée au milieu H' de OM en ω' ; $\omega'M = R$;

En abaissant ω'K', perpendiculaire à MO, on a

$$\omega'K' = R \cos V.$$

Or la normale à W, en μ, rencontre la perpendiculaire Δ élevée à $O\mu$ en son milieu H, en un point ω tel que

$$\omega H = R' \cos V'.$$

On a donc

$$\omega H = \omega'K'.$$

En prenant sur Δ, à partir de H, une longueur Hω égale à ω'K', ωμ sera la normale à W.

Note. L'élégante construction que vient de signaler M. G. de Longchamps, peut aussi être établie par la méthode de Roberval.

En effet, pour faire décrire au point M la courbe U (fig. 3) nous pouvons supposer qu'il glisse sur le rayon vecteur OM pendant que celui-ci tourne autour de O, ou qu'il glisse sur le rayon vecteur O'M pendant que ce dernier tourne autour de O'. Représentons la vitesse de M sur sa trajectoire par un segment α de MT, et décomposons α en deux vitesses β et γ dirigées respectivement suivant MO et une perpendiculaire à MO; β sera la vitesse de glissement de M sur OM et γ sera sa vitesse de circulation autour de O. Cherchons de même la vitesse de glissement β' de M sur O'M et sa vitesse de circulation γ' autour de O', en décomposant α suivant MO' et une perpendiculaire. Si nous décomposons aussi la vitesse α'' de μ sur sa trajectoire W en deux autres β'', γ'' dirigées respectivement suivant μO et une perpendiculaire, nous aurons, évidemment, $\gamma'' : \gamma = O\mu : OM$, $\beta'' = \beta'$; connaissant β'' et γ', nous pouvons obtenir facilement la tangente à W en μ.

Pour rendre les constructions plus simples, nous faisons tourner les vitesses $\alpha, \beta, \gamma, \beta', \gamma'$ de $\frac{\pi}{2}$ autour de M, et $\alpha'', \beta'', \gamma''$ de $\frac{\pi}{2}$ autour de μ, dans le même sens. Alors si nous représentons la vitesse de circulation de M autour de O par MO, celle de μ sera représentée par μO. Menons sur MO une perpendiculaire OA qui rencontre en A la normale MA à la courbe U; MA sera la vitesse de M sur V, et en abaissant AB perpendiculaire sur O'M, nous aurons $\beta' = AB$, $\gamma' = MB$. Par suite, si nous menons OC perpendiculaire à MO et égale à BA, μC sera la vitesse de μ sur W. La tangente à W est donc dirigée suivant la perpendiculaire élevée en μ sur μC.

Cette construction ne diffère de celle de M. de Longchamps que par l'échelle.

Conservons (fig. 3) les mêmes notations, sauf à supposer $M\mu = MO'$; nous devrons alors avoir $\beta' = \beta - \beta''$, en considérant les vitesses de glissement comme positives ou comme négatives suivant qu'elles font croître ou décroître le rayon recteur du point. Donc, dans la figure (3), on prolongera OA d'une longueur AD = AB : Dμ sera la normale à la strophoïdale. (J. N.)

CONCOURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS EN 1894 :

Questions proposées le 29 mai 1894.

On donne une sphère S et une droite Δ dont les équations par rapport à un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz sont

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad x = az + p, \quad y = bz + q.$$

Par le diamètre de la sphère qui coïncide avec Oz on fait passer un plan quelconque P et l'on prend relativement au cercle d'intersection de la sphère et du plan la polaire du point où ce plan rencontre Δ.

1° Trouver l'équation et reconnaître la nature du lieu engendré par cette polaire lorsque le plan P tourne autour de Oz.

2° Trouver les séries de plans réels qui coupent la surface Σ ainsi obtenue suivant des cercles ; vérifier que les plans d'une de ces séries sont perpendiculaires à la droite qui joint les points de contact des plans tangents menés à la sphère S par la droite Δ.

3° Faire voir que si on déplace la sphère S sans changer son rayon, de manière à amener son centre en un nouveau point O_1 de l'axe Oz, il est possible de déterminer une nouvelle position Δ_1 de la droite Δ, telle que la nouvelle surface Σ_1 engendrée à l'aide de Δ_1 comme on l'a indiqué ci-dessus coïncide avec Σ.

4° Trouver le lieu des positions de Δ_1 quand le point O, centre de la sphère, se déplace sur Oz.

CORRESPONDANCE.

L'article que nous avons adressé à *Mathesis* ne répond-il que *partiellement* à la question 28 de l'Intermédiaire des mathématiciens, question dont voici l'énoncé :

Si l'on représente par $S_{p,n}$ *la somme des puissances* p *des* n *premiers nombres entiers, on sait que*

$$S_{3,n} = (S_{1,n})^2 ;$$

y a-t-il d'autres égalités de la même nature?

Si nous considérons *le cas particulier* $k = r$ de notre formule, il vient

$$S_{r,n}^2 = \sum_{p=1}^{p=n} p^r (2S_{r,p}^2 - p_r)$$

et nous pouvons conclure les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. Le carré de toute fonction paire ou impaire $S_{r,n}$ égale une somme de fonctions impaires à coefficients réels, entiers ou fractionnaires,

$$S_{r,n}^2 = \sum_{p=1}^{p=r} a_p S_{2p+1,n}.$$

THÉORÈME II. Inversement, toute fonction impaire $S_{2r+1,n}$ égale une somme de carrés de fonctions paires eti mpaires à coefficients réels, entiers ou fractionnaires

$$S_{2r+1,n} = \sum_{p=1}^{p=r} b_p S_{p,n}^2.$$

Valeurs de r	RELATIONS RÉSULTANTES.	RELATIONS INVERSES.
1	$S_{1,n}^2 = S_{3,n}$	$S_{3,n} = S_{1,n}^2$
2	$S_{2,n}^2 = \dfrac{2S_{3,n} + S_{5,n}}{3}$	$S_{5,n} = \dfrac{3S_{2,n}^2 - S_{1,n}^2}{2}$
3	$S_{3,n}^2 = \dfrac{S_{7,n} + S_{5,n}}{2}$	$S_{7,n} = \dfrac{4S_{3,n}^2 - 3S_{2,n}^2 + S_{1,n}^2}{2}$
4	$S_{4,n}^2 = \dfrac{6S_{9,n} + 10S_{7,n} - S_{5,n}}{15}$	$S_{9,n} = \dfrac{30S_{4,n}^2 - 40S_{3,n}^2 + 33S_{2,n}^2 - 11S_{1,n}^2}{12}$
5	$S_{5,n}^2 = \dfrac{2S_{11,n} + 5S_{9,n} - S_{7,n}}{6}$	$S_{11,n} = \dfrac{72S_{5,n}^2 - 150S_{4,n}^2 + 224S_{3,n}^2 - 183S_{2,n}^2 + 61S_{1,n}^2}{24}$
etc.	etc.	etc.

E. BARBETTE.

NOTE. En comparant l'article de M. Barbette à la question 28 de l'*Intermédiaire*, nous avons voulu dire que l'auteur signale ici de nombreuses relations entre les nombres $S_{m,n}$, sans *épuiser* peut-être le sujet.

La nouvelle note de M. Barbette confirme notre appréciation : Les relations qu'elle renferme se rapprochent plus, par la forme, de celle qui est citée par l'*Intermédiaire*; peut-on en trouver d'autres pour lesquelles la similitude est plus complète? (*Rédaction*).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

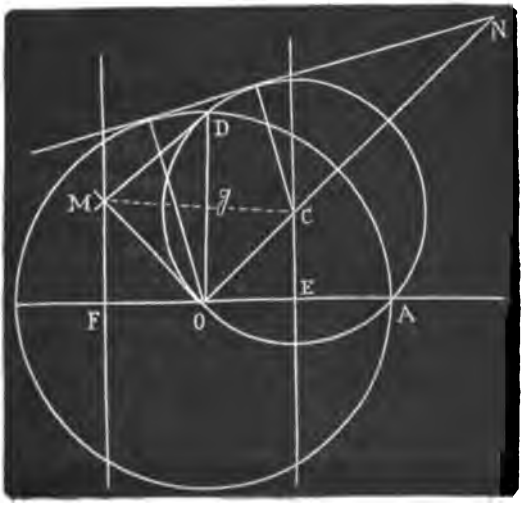
Question 800.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 281).

Étant donnés un cercle O *et un point* A *sur sa circonférence, on décrit un cercle* C *passant par les points* A, O *et coupant le cercle* O *en* D.

Trouver : 1° *le lieu des points de rencontre* M *des tangentes menées en* D *et en* O *au cercle* C; 2° *le lieu des points de rencontre des tangentes communes aux deux cercles;* 3° *l'enveloppe de la droite* MC. (MANDART.)

Solutions par MM. A. DROZ-FARNY *et* DÉPREZ. Abaissons de M la perpendiculaire MF sur OA, et soient g le point d'intersection de CM avec OD, E le milieu de OA. Comme OD = OA, on voit immédiatement que $Og = OE$ et $Cg = CE$. CO étant par conséquent la bissectrice de l'angle gOE, MO sera bissectrice de gOF; d'où :



$$Og = FO = OE = \tfrac{1}{2}R.$$

Le lieu de M est donc la droite symétrique du lieu de C par rapport au point O, et la droite MC est constamment tangente à la circonférence de centre O et de rayon $\frac{1}{2}$ R.

Comme $MF.CE = Mg.gC = \overline{gO}^2 = \frac{1}{4}R^2$ et que CE prend toutes les valeurs de $+\infty$ à $-\infty$, le lieu de M est constitué par la droite MF tout entière.

Soit N le point de rencontre des tangentes communes aux circonférences O et C. On a en représentant ON par ρ et l'angle NOA par φ, pour C intérieur à la circonférence O,

$$\frac{NC}{\rho}=\frac{r}{R},\quad \frac{\rho-r}{\rho}=\frac{r}{R};$$

d'où

$$\rho=\frac{R}{\frac{R}{r}-1}=\frac{R}{2\cos\varphi-1}.$$

Le lieu de N est donc une branche d'hyperbole ayant pour axe transverse OA, pour sommet A et dont le foyer le plus éloigné est O. Le second sommet A′ se trouve sur OA à une distance $OA'=\frac{R}{3}$ et l'angle des asymptotes = 120°. La seconde branche, de sommet A′, sauf la partie intérieure au cercle donné, constitue le lieu des points N correspondants aux centres C extérieurs au cercle O.

M. Brocard nous transmet les remarques suivantes :

1° La tangente en O au cercle C, et la tangente en D au cercle O se coupent en un point M′, qui a pour lieu géométrique la tangente menée au cercle O par le point A′ diamétralement opposé à A ; car OM est la bissectrice de l'angle DOA′.

2° La droite M′C a pour enveloppe une ellipse qui a pour foyer le point O ; en effet, le segment M′C glisse entre deux droites fixes et est vu de O sous un angle constant ; E et A′ sont les extrémités de l'axe focal.

M. Déprez trouve que la droite DM enveloppe une quartique et que le point N décrit encore une conique quand le cercle variable C passe par deux points fixes quelconques du plan du cercle O.

Question 806.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 32.)

Quatre droites a, b, c, d sont coupées par une cinquième e aux points A, B, C, D. *Démontrer que les coniques circonscrites aux triangles bcd, dca, dab, abc et touchant respectivement a, b, c, d en* A, B, C, D *rencontrent e en un même point*(*). (J. N.)

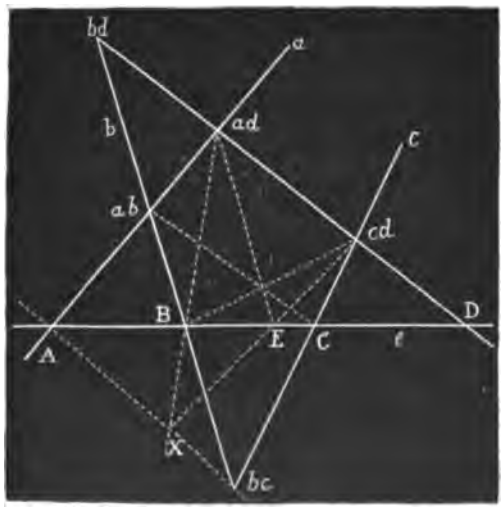
Solutions géométriques par M. Droz-Farny. 1° La proposition résulte des deux théorèmes suivants, cas particuliers des théorèmes de Pascal et de Brianchon :

(*) Ajoutez sur la figure la lettre *d* entre les points *bd*, *ad*.

I. *Si un pentagone a pour sommets cinq points* 1, 2, 3, 4, 5 *d'une conique, la tangente au sommet* 1 *et le côté opposé* 34, *les côtés* 12 *et* 45, *les côtés* 15 *et* 23 *se coupent sur une même droite.*

II. *Si un pentagone ayant pour sommets successifs les points* 1, 2, 3, 4, 5, *est circonscrit à une conique, la droite joignant le sommet* 1 *au point de contact du côté opposé* 34, *et les droites* 24, 35 *concourent en un même point.*

En effet, soit E le second point d'intersection de *e* avec la conique circonscrite au triangle *bcd* et touchant *a* en A. Appliquons le théorème I en prenant pour les points 1, 2, 3, 4, 5 respectivement A, E, *cd*, *db*, *bc*; nous trouvons alors que les droites (A, *bc*) (B, *ad*), (E, *cd*) concourent en un même point X. Les deux triangles ayant respectivement pour sommets les points (*ad*, *ab*, B) et (E, C, *cd*) ont donc un axe d'homologie AX ; par suite, les droites joignant les sommets homologues *ad* et E, *ab* et C, *cd* et B concourent en un même point. Il résulte de là et du théorème II que les points B, C, *cd*, *ad*, *ab* sont les sommets d'un pentagone circonscrit à une conique qui touche BC en E. Autrement dit, E est le point de contact de *e* avec la conique touchant les cinq droites *a*, *b*, *c*, *d*, *e*; c'est donc un point fixe.



2° Si l'on fait une projection centrale de la figure de manière que la droite *e* passe à l'infini, la question proposée se change en celle-ci :

Étant données quatre droites a, b, c, d, si l'on circonscrit aux triangles bcd, cda, dab, abc, des hyperboles, dont une asymptote coïncide respectivement avec a, b, c, d, les secondes asymptotes de ces courbes sont parallèles entre elles.

Cette dernière proposition se démontre aisément. En effet, soient A, B, C les sommets du triangle formé par *a*, *b*, *c* (A opposé à *a*, ...), et

soient B', C' les points de rencontre de d avec b et c. La seconde asymptote de l'hyperbole passant par A, B, C et ayant pour asymptote B'C' est la transversale réciproque B''C'' de B'C' par rapport au triangle ABC; c'est-à-dire qu'elle coupe AB, AC en des points C'', B'' tels que

$$BC'' = -AC', \quad CB'' = -AB'.$$

De même, si l'on construit l'hyperbole passant par A, B', C' et ayant pour asymptote BC, la seconde asymptote de cette courbe est la transversale réciproque B'''C''' de BC par rapport au triangle AB'C'. Comme

$$AC''' = BC' = C'A, \quad AB''' = CB' = B'A,$$

les droites B''C'', B'''C''' sont parallèles.

Solution analytique par M. Delville. Prenons le triangle abc pour triangle de référence, et soient respectivement

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \quad A'\alpha + B'\beta + C'\gamma = 0,$$

les équations des droites a, b, e, c, d.

Une conique circonscrite au triangle abc a pour équation

$$\alpha\beta + (m\alpha + n\beta)(A\alpha + B\beta + C\gamma) = 0.$$

Si elle passe par le point de, dont les coordonnées sont $\alpha = B'$, $\beta = -A'$, $\gamma = 0$, on a

$$-A'B' + (mB' - nA')(AB' - BA') = 0. \qquad (1)$$

L'équation de la tangente en ce point est

$$\alpha[\beta' + m(A\alpha' + B\beta' + C\gamma') + A(m\alpha' + n\beta')]$$
$$+ \beta[\alpha' + n(A\alpha' + B\beta' + C\gamma') + B(m\alpha' + n\beta')] + C\gamma(m\alpha' + n\beta') = 0,$$

où

$$\alpha' = B', \quad \beta' = -A', \quad \gamma' = 0;$$

elle se réduit à

$$\alpha[-A' + m(AB' - BA') + A(mB' - nA')]$$
$$+ \beta[B' + n(AB' - BA') + B(mB' - nA')] + C\gamma(mB' - nA') = 0.$$

Si on l'identifie avec

$$A'\alpha + B'\beta + C'\gamma = 0,$$

on trouve

$$\frac{-A' + m(AB' - BA') + A(mB' - nA')}{A'} = \frac{C(mB' - nA')}{C'};$$

d'où, en remplaçant $mB' - nA'$ par sa valeur tirée de (1),

$$m = \frac{A'^2(B'C - BC')}{C'(AB' - BA')^2}.$$

Par analogie (on échange A et B, A′ et B′) :

$$n = \frac{B'^2(A'C - AC')}{C'(AB' - BA')^2}.$$

Ces valeurs de m et n correspondent à la conique circonscrite au triangle *abc* et touchant *d* en D. Les points d'intersection de la courbe avec la droite *e* vérifient l'équation

$$\alpha\beta + (m\alpha + n\beta)(A\alpha + B\beta) = 0;$$

le produit des deux valeurs du rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ qu'on tire de cette équation étant égal à $\frac{nB}{mA}$, et l'une des valeurs étant $-\frac{B'}{A'}$, l'autre valeur est

$$-\frac{nBA'}{mAB'} = -\frac{BB'(A'C - AC')}{AA'(B'C - BC')}.$$

Comme elle ne change pas quand on intervertit le rôle des droites *c* et *d*, on voit que les deux coniques *abc*D, *abd*C rencontrent *e* au même point.

M. Labenne a donné une très bonne solution géométrique en appliquant le théorème du pentagone de Pascal à deux des coniques considérées, l'un des sommets étant le point de rencontre de la courbe avec *e*.

×Question 862.

(Voir *Mathesis*, (2) III, p. 176.)

Dans tout triangle, le produit de la plus courte distance entre deux des cercles exinscrits par leur plus grande distance est égal au carré du côté opposé à l'angle du triangle relatif au troisième cercle exinscrit.

(E. N. Barisien.)

Solution par M. E. Lemoine. Soient I, I_a, I_b, I_c les centres des cercles tangents aux trois côtés du triangle ABC, et r, r_a, r_b, r_c leurs rayons. Il s'agit de démontrer la formule

$$[I_bI_c - (r_b + r_c)]\,[I_bI_c + (r_b + r_c)] = a^2. \qquad (1)$$

On sait que

$$I_bI_c = \frac{a}{\sin\frac{A}{2}},$$

$$r_b = (p-c)\cot\frac{A}{2}, \quad r_c = (p-b)\cot\frac{A}{2}, \quad \text{d'où} \quad r_b + r_c = a\cot\frac{A}{2};$$

substituant ces valeurs dans (1), on trouve une identité.

La transformation continue en A (voir *Mathesis*, 1892) reproduit la question 863; la transformation continue, soit en B, soit en C, donne le théorème suivant :

Le produit de la plus courte distance et de la plus grande distance entre un cercle exinscrit et le cercle inscrit est égal au carré du côté qui est touché intérieurement par le premier cercle.

La même question a été résolue par Mˡˡᵉ De Haas et MM. Déprez, Ch. Thiry, Droz, François, Delahaye, Mandart, Greenstreet, Verdeyen et Decamps.

La solution la plus simple est peut-être la suivante, indiquée en partie par MM. Droz et Delahaye : si β, γ sont les points de contact de AB avec les cercles I_b, I_c, le triangle rectangle, qui a pour hypoténuse $I_b I_c$ et pour côtés de l'angle droit $I_c\gamma$ et une parallèle à AB par I_b donne :

$$\overline{I_bI_c}^2 = (r_b + r_c)^2 + \overline{\beta\gamma}^2 = (r_b + r_c)^2 + a^2,$$

ce qui revient à la formule proposée.

ˣQuestion 872.

(Voir *Mathesis* (2), III, p. 215).

Etant donné un triangle ABC, *il existe trois autres triangles* A'BC, B'CA, C'AB *ayant un côté commun avec* ABC *et même point de Lemoine* K. *Démontrer que les droites* AA', BB', CC' *concourent en un même point.*

(Schoute.)

Solution par MM. Droz-Farny *et* Déprez. Supposons construit le triangle ABC dans lequel on connaît la base BC et le point de Lemoine K. Soit en outre le centre de gravité G, conjugué isogonal de K. Menons par A les parallèles AD et AE respectivement à BG et CG ; elles coupent le côté BC en D et E de manière que

$$DB = BC = CE = a.$$

On a en outre :

$$\textit{angle}\ DAB = GBA = KBC \quad \text{et} \quad \textit{angle}\ EAC = GCA = KCB.$$

Le sommet cherché A sera donc à l'intersection des circonférences passant par DB et CE et capables respectivement des angles KBC, KCB. La seconde intersection A′ du même côté que A de BC donnera une seconde solution du problème. Soit F le point milieu de BC; comme

$$FB.FD = FC.FE,$$

F appartient à l'axe radical des deux circonférences; la droite AA′ passe donc par F.

Si le triangle ABC est donné, il existera un deuxième triangle A′BC ayant avec le premier le côté BC et le point de Lemoine K en commun; A′ sera le deuxième point d'intersection des circonférences ADB et ACE. AA′ sera médiane du triangle ABC et, par conséquent, les trois droites analogues AA′, BB′, CC′, concourent en un même point, le centre de gravité du triangle primitif.

M. Déprez observe que les circonférences DBA, ECA touchent respectivement les symédianes KB, KC et que les coordonnées normales de A′ sont

$$\frac{3a}{b^2+c^2-a^2}, \quad \frac{1}{b}, \quad \frac{1}{c}.$$

QUESTIONS D'EXAMENS.

633. (Voir (2), III, p. 279). Dans un triangle on donne a, A et le produit $b(b+c) = k^2$. 1° Déterminer par le calcul b et c. — Discussion. — 2° Traiter la même question géométriquement.

Seconde solution. Le solution suivante est empruntée au J. M. E. 1893, p. 275. Nous n'indiquons que la mise en équation.

Des équations

$$b(b+c) = K^2, \quad b^2+c^2-2bc\cos A = a^2,$$

on déduit l'équation homogène en b et c:

$$\frac{b^2+c^2-2bc\cos A}{b(b+c)} = \frac{a^2}{k^2},$$

ou

$$b^2(k^2-a^2) - bc(a^2+2k^2\cos A) + c^2k^2 = 0; \text{ etc.}$$

634. Si $a+b+c=o$, on a aussi

$$a^2-bc = b^2-ca = c^2-ab = a^2+ab+b^2 = b^2+bc+c^2 = c^2+ca+a^2$$
$$= \tfrac{1}{6}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2] = -(ab+bc+ca) = \tfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).$$

De là on conclut des identités remarquables en remplaçant a, b, c par $\beta-\gamma, \gamma-\alpha, \alpha-\beta$. où α, β, γ sont des quantités quelconques.

935. On considère une parabole P et une droite Δ symétrique de la tangente au sommet par rapport au foyer. D'un point quelconque Q de Δ on mène les tangentes à P dont les points de contact sont M et M'. Démontrer que les normales à P en M et M' se rencontrent en un point N de P. (E. N. Barisien.)

Si α, β sont les coordonnées de Q, on trouve pour les coordonnées (X, Y) de M

$$X = p - \alpha + \frac{2\beta^2}{p}, \qquad Y = -\frac{2\alpha\beta}{p}. \tag{1}$$

Faisant $\alpha = p$ et éliminant β entre les équations (1) on obtient $y^2 = 2px$.

Cette question est connue sous la forme suivante :

Si d'un point quelconque M d'une parabole P on abaisse les deux normales à cette courbe, la corde qui passe par les points d'incidence de ces droites tourne autour d'un point fixe de l'axe de P. (J. N.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

946. La tangente en un point M d'une courbe Δ coupe les axes rectangulaires Ox, Oy aux points A, B. Soit N le quatrième sommet du rectangle construit sur OA, OB. On demande 1° l'enveloppe de la droite MN lorsque Δ est une ellipse dont les axes sont dirigés suivant Ox, Oy ; 2° quelle doit être la courbe Δ lorsque la droite MN passe par un point fixe P. (Petit-Bois.)

947. Etant donnés deux faisceaux homographiques S (ABC...), S' (A'B'C'...), faire passer par S et S' une circonférence telle que deux rayons homologues quelconques rencontrent cette courbe en des couples de points en involution. (Droz-Farny.)

***948.** On divise les côtés AB, BC, CD, DA dans un même rapport $\frac{p}{q}$, aux points X, Y, Z, U et dans le rapport inverse $\frac{q}{p}$ aux points X', Y', Z', U'. Soient L, M, N, P les points d'intersection des côtés homologues des deux quadrilatères XYZU, X'Y'Z'U'. Démontrer que les droites L M et NP sont parallèles et proportionnelles aux diagonales du quadrilatère primitif ABCD. (J. N.)

***949.** On sait que l'expression $(a^2 + b^2)^6$ est une somme de deux carrés. Démontrer qu'on peut aussi la mettre sous la forme d'une somme de trois ou de quatre carrés. (E. Fauquembergue.)

*950. On sait que si dans un triangle ABC la longueur de la bissectrice intérieure de l'angle B comprise entre le sommet B et le côté opposé est égale à la longueur de la bissectrice intérieure de l'angle C comprise entre C et le côté opposé, on sait, dis-je, que le triangle ABC est isoscèle.

Le théorème n'est plus toujours vrai pour les bissectrices extérieures ; on demande de démontrer *géométriquement* que a, b, c, R, r_a étant respectivement les trois côtés de ABC, le rayon du cercle circonscrit et le rayon du cercle exinscrit tangent au côté BC, si l'on a $4Rr_a = a^2 + bc$, les longueurs des bissectrices extérieures des angles B et C sont égales.

(ALAUDA.)

Question 129 de l'*Intermédiaire des mathématiciens*.

*951. Soient, dans un même plan, OX, OY, OZ trois droites issues d'un même point. On prend sur OX deux points fixes A et B, sur OY un point variable C. Les droites CA, CB rencontrent OZ aux points A', B'. Démontrer que $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OB'} = \text{const.}$ (J. N.)

952. On donne une ellipse de centre O ; soient F et F' ses foyers, a et b ses demi-axes. Soit M un point de la circonférence de rayon $a + b$ et de centre O ; démontrer que la droite symétrique de OM par rapport à la bissectrice de l'angle FMF' est normale à l'ellipse.

La même propriété a lieu si M est un point de la circonférence de rayon $a - b$ et de centre O. (LEMOINE.)

953. Le lieu des centres des coniques de grandeur constante ($2a$ et $2b$, longueurs des axes) et passant par deux points fixes situés à une distance $2d$, est une courbe dont l'aire est

$$U = \pi (a - b)^2 \left[1 - \frac{d^2(a+b)^2}{2a^2b^2}\right]. \quad \text{(E. N. BARISIEN.)}$$

954. Pour tous les points du plan d'une ellipse, tels que deux des normales abaissées sur l'ellipse soient rectangulaires, 1° la corde joignant les pieds des normales à angle droit enveloppe une ellipse ; 2° la corde joignant les deux autres pieds enveloppe une développée d'ellipse.

(E. N. BARISIEN.)

NOTES SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE;

par M. E. LEMOINE.

Nous avons donné dans ce journal (1892, pp. 81-92), à la suite d'une étude sur la *Transformation continue*, de très nombreuses formules entre les éléments du triangle; elles nous ont souvent servi dans nos mémoires sur la Géométrie du triangle, mais nous n'avons jamais détaillé leurs applications. Comme par leur usage et par celui d'autres formules qu'elles permettent de calculer facilement, on peut arriver simplement à exécuter des opérations qui paraîtraient devoir être d'une longueur fastidieuse, nous croyons utile de présenter un exemple de leur emploi en calculant la longueur des axes de quelques coniques remarquables inscrites ou circonscrites à un triangle. Nous conservons les notations adoptées dans notre étude de 1892.

Dans un travail de M. P. Serret (N. A. M., 1865, p. 208) (*), nous trouvons que, si α, β, γ sont les distances aux trois côtés BC, CA, AB d'une conique inscrite à un triangle, les longueurs des demi-axes du centre de cette conique sont données par l'équation

$$a\sqrt{X^2-\alpha^2}+b\sqrt{X^2-\beta^2}+c\sqrt{X^2-\gamma^2}=0,$$

et si de plus les distances du centre d'une conique circonscrite à un triangle aux sommets de ce triangle sont α', β', γ', α, β, γ étant toujours les distances de ce centre aux côtés, les longueurs des demi-axes de cette conique circonscrite sont données par l'équation

$$a\alpha\sqrt{X^2-\alpha'^2}+b\beta\sqrt{X^2-\beta'^2}+c\gamma\sqrt{X^2-\gamma'^2}=0.$$

Chassons les radicaux et les deux équations se développent respectivement ainsi (S est la surface du triangle, R le rayon du cercle circonscrit) :

$$(1)\qquad 16S^2.X^4-16RS\,(a\alpha^2\cos A+b\beta^2\cos B+c\gamma^2\cos C)\,X^2 + 2\Sigma b^2c^2\beta^2\gamma^2-\Sigma a^4\alpha^4=0,$$

$$(2)\qquad (2\Sigma b^2c^2\beta^2\gamma^2-\Sigma a^4\alpha^4)\,X^4-2X^2\Sigma a^2\alpha^2\alpha'^2\,(b^2\beta^2+c^2\gamma^2-a^2\alpha^2) + 2\Sigma b^2c^2\beta^2\gamma^2\beta'^2\gamma'^2-\Sigma a^4\alpha^4\alpha'^4=0.$$

(*) Voir à la fin de l'article la démonstration de ces formules. (J. N.)

La forme même de ces équations en rend l'usage difficile à cause de l'extrême longueur du calcul de leurs racines; nous allons cependant nous en servir pour arriver à des résultats qu'il ne serait peut-être pas aussi aisé d'obtenir autrement.

1° *Calculer les axes de l'ellipse circonscrite à un triangle qui a pour centre le centre* I *du cercle inscrit.* Appliquons la formule (2) en faisant

$$\alpha = \beta = \gamma = r; \quad \alpha' = \sqrt{\frac{(p-a)\,bc}{p}}, \quad \beta' = \text{etc.};$$

nous aurons en divisant par r^4 :

$$16S^2X^4 - \frac{4a^2b^2c^2}{p}X^2\Sigma(p-a)\cos A$$
$$+\frac{2a^2b^2c^2}{p^2}\Sigma bc\,(p-b)(p-c) - \frac{a^2b^2c^2}{p^2}\Sigma a^2(p-a)^2 = 0. \qquad (2')$$

Mais

$$\Sigma(p-a)\cos A = p\Sigma\cos A - \Sigma a\cos A,$$

ou, d'après les formules (85) et (121),

$$\Sigma(p-a)\cos A = \frac{p(R-r)}{R}.$$

On a aussi

$$\Sigma bc\,(p-b)(p-c) = p^2\Sigma bc - p\Sigma bc\,(b+c) + \Sigma b^2c^2$$
$$= p^2\Sigma bc - p\Sigma bc\,(a+b+c-a) + \Sigma b^2c^2$$

ou

$$\Sigma bc\,(p-b)(p-c) = -p^2\Sigma bc - 3pabc + \Sigma b^2c^2$$

et, d'après les formules (61) et (132), d désignant la distance OI,

$$\Sigma bc\,(p-b)(p-c) = (p^2+d^2)\,r^2.$$

D'ailleurs, d'après la formule (68),

$$\Sigma a^2(p-a)^2 = 2r^2(d^2-p^2)$$

La formule (2') devient alors en remplaçant abc par 4RS, etc.

$$X^4 - 4R(R-r)X^2 + 4R^2r^2 = 0.$$

On en déduit le théorème suivant :

Si d est la distance des centres des cercles inscrit et circonscrit, les carrés des demi-axes sont :

$$2R(R-r\pm d).$$

L'ellipse considérée a pour équation, en coordonnées normales,

$$\Sigma \frac{p-a}{x} = 0.$$

En appliquant à ce résultat *la transformation continue* en A et appelant d_a la distance des centres du cercle circonscrit et du cercle ex-inscrit I_a, on voit que les carrés des demi-axes de l'ellipse circonscrite qui a pour centre I_a, sont :

$$2R(R + r_a \pm d_a),$$

et qu'elle a pour équation

$$\frac{p}{x} + \frac{p-c}{y} + \frac{p-b}{z} = 0.$$

2° *Calculer les axes de l'ellipse inscrite à un triangle dont le centre est le centre du cercle circonscrit.*

Cette ellipse est celle dont les propriétés font l'objet de la question 937 (*Mathesis*, 1894, p. 127).

Appliquons la formule (1) en faisant $\alpha = R \cos A$, etc. et remarquant que le terme indépendant de X peut s'écrire :

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma)(b\beta + c\gamma - a\alpha)(c\gamma + a\alpha - b\beta)(a\alpha + b\beta - c\gamma),$$

il vient :

$$16S^2 X^4 - 16 X^3 R^2 S \Sigma a \cos^2 A$$
$$+ R^4 (a \cos A + b \cos B + c \cos c)(b \cos B + c \cos C - a \cos A)$$
$$(c \cos C + a \cos A - b \cos B)(a \cos A + b \cos B - c \cos C) = 0,$$

ou d'après les formules (121) et (122):

$$SX^4 - X^2 R^2 \Sigma a \cos^2 A + 4SR^4 \cos^2 A \cos^2 B \cos^2 C = 0.$$

Il est facile de calculer

$$\Sigma a \cos^2 A = \Sigma a \cos A (1 - \sin^2 A) = \Sigma a \cos A - \frac{1}{4R^2} \Sigma a^2 \cos A$$

et d'après les formules (121) et (118),

$$\Sigma a \cos^2 A = \frac{2S}{R} - \frac{S}{R^3}(p^2 - rd - 3R^2)$$

ou encore:

$$\Sigma a \cos^2 A = \frac{S}{R^3} - [R^2 - p^2 + (2R + r)^2] = \frac{S}{R}(1 - 4 \cos A \cos B \cos C),$$

puisque l'on sait que $4R \cos A \cos B \cos C = p^2 - (2R + r)^2$.

On a donc enfin :

$$X^4 - X^2R^2(1 - 4\cos A\cos B\cos C) + 4R^4\cos^2 A\cos^2 B\cos^2 C = 0.$$

Les carrés des demi-axes sont donc :

$$\frac{R^2}{2}(1 - 4\cos A\cos B\cos C \pm \sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C})$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{R^2}{4}(1 + (1 - 8\cos A\cos B\cos C) \pm 2\sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}).$$

Les demi-axes sont donc :

$$\frac{R}{2}(1 \pm \sqrt{1 - 8\cos A\cos B\cos C}).$$

Leur somme est R.

3° *Calculer les axes de la conique inscrite à un triangle qui a pour centre le cercle des neuf points.*

En employant la formule (1) comme dans le 2° et en faisant

$$\alpha = \frac{R}{2}\cos(B - C), \text{ etc.}$$

on trouverait, par l'emploi de la formule (1), que les demi-axes sont

$$\frac{R}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{p^2(2R + r)^2}{2}} = R\sqrt{2\cos A\cos B\cos C}.$$

Cette conique présente en outre des propriétés remarquables qu'on peut établir très simplement par la Géométrie ; cette voie fait trouver les longueurs des axes beaucoup plus simplement que la formule (1).

La courbe a pour foyers le centre du cercle circonscrit O et l'orthocentre H.

Le cercle des neuf points de ABC est le cercle décrit sur l'axe focal comme diamètre :

Si A′ est le point où elle touche BC, l'angle HA′O = 2 (B — C).

Si A_1 est le point de contact de cette conique avec sa tangente parallèle à BC, les trois points A, A_1, O sont en ligne droite.

En coordonnées normales elle a pour équation :

$$\Sigma\, a\sqrt{x\cos A} = 0.$$

Son point de Gergonne a pour coordonnées $\frac{1}{\sin A . \sin 2A}$, etc.; ce point a déjà été souvent rencontré.

On peut énoncer les propriétés d'une façon très différente par le théorème suivant :

Étant donnée une conique de foyers F *et* F′ *dont l'axe focal est* 2α, *le lieu des sommets des triangles* ABC *circonscrits à cette conique et tels que*, A′, B′, C′, *étant les points de contact avec cette conique des tangentes respectivement parallèles à* BC, CA, AB, *les points* F, A′, A *soient en ligne droite ainsi que* F, B′, B; F, C′, C, *est le cercle directeur de cette conique qui a pour centre* F *et pour rayon l'axe* 2α. *Tous ces triangles qui ont* F *pour centre du cercle circonscrit ont* F′ *pour orthocentre.*

La première note que j'ai publiée (N. A. M. 1858 p. 240) donne quelques-unes des propriétés de cette conique.

Note. Voici une démonstration des formules de M. P. Serret.

1. Soient

$$x \cos \delta_r + y \sin \delta_r - p_r = 0, \ (r = 1, 2, 3)$$

les équations des côtés d'un triangle ABC circonscrit à l'ellipse

$$A^2 y^2 + B^2 x^2 = A^2 B^2. \qquad (1)$$

On sait que

$$p_r^2 = A^2 \cos^2 \delta_r + B^2 \sin^2 \delta_r = A^2 - (A^2 - B^2) \sin^2 \delta_r. \qquad (2)$$

Les quantités p_1, p_2, p_3 sont les coordonnées normales du centre de l'ellipse par rapport au triangle ABC; les différences $\delta_1 - \delta_2$, $\delta_2 - \delta_3$, $\delta_3 - \delta_1$ sont les suppléments des angles de ce triangle. Or, on a identiquement

$$\sin \delta_1 \sin (\delta_3 - \delta_1) + \sin \delta_2 \sin (\delta_1 - \delta_2) + \sin \delta_3 \sin (\delta_1 - \delta_3) = 0.$$

Si l'on remplace $\sin \delta_1$, $\sin \delta_2$, $\sin \delta_3$ par leurs valeurs tirées de (2) et qu'on écrive X pour A, on trouve

$$\sin A \sqrt{X^2 - p_1^2} + \sin B \sqrt{X^2 - p_2^2} + \sin C \sqrt{X^2 - p_3^2} = 0.$$

2. Soit ABC un triangle inscrit à l'ellipse (1); appelons (ρ_1, ω_1), (ρ_2, ω_2), (ρ_3, ω_3) les coordonnées polaires de ses sommets.

On a

$$\frac{\cos^2 \omega_r}{A^2} + \frac{\sin^2 \omega_r}{B^2} = \frac{1}{\rho_r^2}, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{A^2} + \left(\frac{1}{B^2} - \frac{1}{A^2}\right) \sin^2 \omega_r = \frac{1}{\rho_r^2}.$$

Si l'on tire de là les valeurs de $\sin\omega_1$, $\sin\omega_2$, $\sin\omega_3$ pour les porter dans l'identité

$$\sin\omega_1\sin(\omega_2-\omega_3)+\sin\omega_2\sin(\omega_3-\omega_1)+\sin\omega_3\sin(\omega_1-\omega_2)=0,$$

il vient, après quelques transformations,

$$\rho_1\rho_2\sin(\omega_2-\omega_3)\sqrt{X^2-\rho_1^2}+\cdots=0.$$

Mais $\rho_2\rho_3\sin(\omega_2-\omega_3)$, double de l'aire du triangle BOC, est égal à ap_1, etc.

---

*SUR LA TRANSVERSALE D'UN TRIANGLE;

par M. J. Wastbels, professeur à l'Athénée de Gand.

Soit un triangle ABC; prenons sur les côtés BC, AB, AC respectivement les points D, E et F; menons les droites AD, EF, qui se coupent en G. Posons

$$BD=m,\quad DC=n;\quad \frac{BE}{EA}=r,\quad \frac{CF}{FA}=r',\quad \frac{DG}{GA}=R;$$

on a la relation

$$n\,.\,r+m\,.\,r'=(m+n)\,.\,R.$$

Pour la démontrer, menons par les points B et C des parallèles à DA, rencontrant les prolongements de EF en K et L.

Dans le trapèze BCLK, nous avons successivement

$$n\,.\,BK+m\,.\,LC=(m+n)\,.\,DG,$$

$$n\,.\,\frac{BK}{AG}+m\,.\,\frac{LC}{AG}=(m+n)\,.\,\frac{DG}{AG}.$$

Or,

$$\frac{BK}{AG}=\frac{BE}{EA}=r;\ \text{etc.}$$

Conséquence de la formule précédente. Supposons

$$\frac{r}{r'}=\frac{m^p}{n^p},$$

p étant un nombre entier et *pair*. Alors

$$\frac{m}{n}=\frac{r^{\frac{1}{p}}}{r'^{\frac{1}{p}}},$$

et la formule précédente peut s'écrire

$$r'^{\frac{1}{p}} \times r + r^{\frac{1}{p}} \times r' = \left(r^{\frac{1}{p}} + r'^{\frac{1}{p}}\right) \cdot \mathrm{R};$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{R} = r^{\frac{1}{p}} r'^{\frac{1}{p}} \left[r^{\frac{p-2}{p}} - r^{\frac{p-3}{p}} \cdot r'^{\frac{1}{p}} + \ldots + r'^{\frac{p-2}{p}} \right].$$

Si $p = 2$, on obtient la relation $\mathrm{R} = \sqrt{r \cdot r'}$.

Donc, si $\frac{r}{r'} = \frac{m^2}{n^2}$, R est une moyenne proportionnelle entre r et r'.

UN PROBLÈME SUR LES COURBES GAUCHES;

par M. Balitrand, lieutenant du Génie, à Montpellier.

Étant donnée une courbe gauche, menons au point M le trièdre formé par la tangente MX, la normale principale MY, la binormale MZ, ou *trièdre principal*; portons sur la normale My inclinée d'un angle θ sur la normale principale une longueur $\mathrm{MM}_1 = l$ et cherchons à quelle condition la droite MM_1 sera binormale de la courbe (M_1) (*).

Menons au point M la perpendiculaire Mz au plan XMy de telle façon que le trièdre MXyz soit de même sens que MXYZ, et soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque par rapport au trièdre mobile. On trouve aisément les formules suivantes où ρ et r désignent le rayon de courbure et le rayon de torsion :

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{ds} = \dfrac{dx}{ds} + 1 + \dfrac{1}{\rho}(z \sin\theta - y \cos\theta), \\ \dfrac{\partial y}{ds} = \dfrac{dy}{ds} + \dfrac{x \cos\theta}{\rho} + z\left(\dfrac{1}{r} - \theta'\right), \\ \dfrac{\partial z}{ds} = \dfrac{dz}{ds} - \dfrac{x \sin\theta}{\rho} - y\left(\dfrac{1}{r} - \theta'\right), \end{cases}$$

(*) Le cas où les droites MM_1 doivent être normales principales a été traité par M. Pellet (*Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris*, 1887) et par M. Cesaro (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 1888, p. 147). (B.)

Pour les recherches de M. Cesáro sur les courbes gauches et sur l'équation intrinsèque des courbes, voir *Mathesis*, t. III, pp. 73, 97, 121; t. IV, p. 233; t. V, p. 32; t. VI, 33; t. VII, p. 25; t. VIII, p. 36; t. IX, p. 209; t. XI, p. 284; t. XIII, p. 177, et N. A. M., 1886, pp. 65, 127 et 511; 1888, pp. 152, 147, 171, 209; 1889, p. 116 et 445; 1890, pp. 143, 294. (J. N.)

qui pour $\theta = 0$, se réduisent aux formules employées par M. Cesàro avec tant de succès dans ses études de géométrie intrinsèque. La caractéristique δ se rapporte au déplacement total et la caractéristique d au déplacement relatif.

Appliquons les formules (1) au point $M_1(0, l, 0)$, en observant que θ est constant, on *a :*

$$(2) \qquad \frac{\delta x}{ds} = 1 - \frac{l\cos\theta}{\rho}, \quad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dl}{ds}, \quad \frac{\delta z}{ds} = -\frac{l}{r}.$$

Si l'on veut que MM_1 soit binormale, il faut que $\frac{\delta y}{ds} = 0$ d'où $l =$ *constante*. On a ensuite :

$$\frac{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}{ds^2} = \frac{ds_1^2}{ds^2} = \left(1 - \frac{l\cos\theta^2}{\rho}\right) + \frac{l^2}{r^2} = k^2,$$

et l'on peut poser

$$(3) \qquad 1 - \frac{l\cos\theta}{\rho} = k\cos\varphi, \quad -\frac{l}{r} = k\sin\varphi,$$

$$(4) \qquad a = \cos\varphi, \quad b = 0, \quad c = \sin\varphi,$$

a, b, c désignant les cosinus directeurs de la tangente à la courbe (M_1).

Les formules (1) donnent alors :

$$\frac{\delta a}{ds} = -\sin\varphi.\varphi' + \frac{\sin\varphi\sin\theta}{\rho}, \quad \frac{\delta b}{ds} = \frac{\cos\varphi\sin\theta}{\rho} + \frac{\sin\varphi}{r},$$

$$\frac{\delta c}{ds} = \cos\varphi.\varphi' - \frac{\sin\varphi\sin\theta}{\rho};$$

et l'équation du plan osculateur à la courbe (M_1) est :

$$x\sin\varphi\left(\frac{\cos\varphi\cos\theta}{\rho} + \frac{\sin\varphi}{r}\right) - (y - l)\left[\frac{\sin\varphi\cos\theta}{\rho}(\sin\varphi + \cos\varphi) - \varphi'\right]$$

$$- z\cos\varphi\left(\frac{\cos\varphi\cos\theta}{\rho} + \frac{\sin\varphi}{r}\right) = 0.$$

Pour que MM_1 soit binormale, il faut que

$$(5) \qquad \frac{\cos\varphi\cos\theta}{\rho} + \frac{\sin\varphi}{r} = 0.$$

Cette condition pouvait d'ailleurs s'écrire immédiatement si l'on

remarque que MM_1, étant binormale, doit être perpendiculaire à deux tangentes consécutives et, par suite, que $\partial b = 0$. Quoi qu'il en soit, des relations (5) et (3) on déduit :

$$\frac{l}{r^2} + \frac{l\cos^2\theta}{\rho^2} - \frac{\cos\theta}{\rho} = 0. \tag{6}$$

Telle est la relation qui doit exister entre les rayons de courbure et de torsion de la courbe (M). Cette courbe est donc un cas particulier de celles qui ont été étudiées par M. Cesàro. (Sulle curve di Bertrand. — *Rivista di Matematica*, 1892). Il est bien facile d'obtenir les équations intrinsèques de la courbe M_1. En effet, l'on a tout d'abord, $ds_1 = k\,ds$ et en tenant compte de la relation (6),

$$ds_1 = \sqrt{1 - \frac{l\cos\theta}{\rho}}\,ds; \tag{7}$$

puis, en posant $-\frac{r\cos\theta}{\rho} = u$;

$$\text{tang}\,\varphi = u, \quad d\varphi = \frac{u'\,ds}{1+u^2},$$

et

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{u'}{k(1+u^2)}. \tag{8}$$

En observant que les cosinus directeurs de MM_1, c'est-à-dire de la binormale, sont (0, 1, 0) on trouve aisément

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{k}\sqrt{1+u^2}. \tag{9}$$

Les formules (7), (8), (9) résolvent complètement le problème puisqu'elles expriment s_1, ρ_1 et r_1 en fonction de s.

Que faut-il pour que (M_1) soit une droite? Évidemment que $u' = 0$ et par suite $\frac{r}{\rho}\cos\theta = \textit{Constante}$. La courbe (M) est une hélice. Réciproquement, si (M) est une hélice, $\frac{r}{\rho}\cos\theta = \textit{Constante}$, $u' = 0$ et par suite (M_1) est une droite.

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×10. *Valeurs approchées de* π. Pour multiplier un nombre décimal par $\pi = 3{,}141592\ldots$, on peut se servir avantageusement des valeurs approchées suivantes :

(I) $$3+\frac{1}{7}-\frac{1}{800}=3{,}141\,6\,\frac{1}{14},$$

(II) $$3+\frac{1}{8}+\frac{1}{60}=3{,}141\,6\,\frac{2}{3},$$

(III) $$3+\frac{1}{7}-\frac{1}{800}-\frac{1}{70000}=3{,}141592\,\frac{6}{7},$$

(IV) $$\left(3+\frac{1}{7}\right)(1-0{,}004),$$

(V) $$3\left(1+\frac{1}{20}\right)\left(1-\frac{1}{400}-\frac{1}{6000}\right).$$

Soit, par exemple, à chercher la longueur d'une circonférence ayant pour diamètre 37158. Si l'on emploie la valeur (III), le calcul prend la forme suivante :

$$\begin{array}{r} 37158 \\ \hline 111474 \\ 5308 \\ \hline 116782 \\ 46{,}98 \\ \hline 116735{,}02 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 46{,}447 \\ 0{,}530 \\ \hline 46{,}98 \end{array}$$

Voici des valeurs approchées de $\frac{1}{\pi} = 0{,}318309\ldots$; elles permettent de diviser rapidement par π.

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{100}-\frac{1}{200}=0{,}3183\,\frac{1}{3};$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{100}-\frac{1}{200}-\frac{1}{50000}=0{,}31831\,\frac{1}{3};$$

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{100}-\frac{1}{200}-\frac{1}{40000}=0{,}318308\,\frac{1}{3};$$

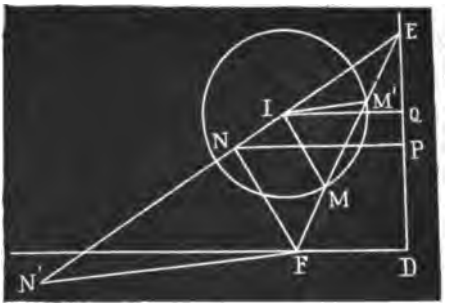
$$\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{22}\right)(1+0{,}0004)=0{,}318309\,\frac{1}{11}.$$

On peut encore remarquer les valeurs approchées :

$$\pi^2 = 10\,(1 - 0{,}01304), \quad \frac{1}{\pi^2} = \frac{1}{10}\,(1 + 0{,}01321).$$

(D'après la *Mathematical Gazette*).

×**11.** ***Sur le cercle de Boscowich.*** On doit au jésuite Boscowich (né à Raguse en 1711, mort à Milan en 1787) une construction très-simple d'une conique par points, au moyen d'un cercle fixe tracé dans son plan.



Soient F un foyer, DE la directrice correspondante, e le rapport constant des distances d'un point de la conique au foyer et à la directrice. D'un point quelconque I abaissons une perpendiculaire IQ sur la directrice, puis décrivons une circonférence ayant pour centre I et pour rayon e.IQ. Joignons un point quelconque E de la directrice aux points I et F; soient M, M' les points de rencontre de la droite EF avec la circonférence I. Les parallèles menées par F aux rayons IM, IM' coupent la droite EI en deux points N, N' appartenant à la conique. En effet, si l'on mène NP perpendiculaire à DE, on trouve facilement

$$\frac{FN}{MI} = \frac{NE}{IE} = \frac{NP}{IQ}, \quad \text{d'où} \quad \frac{FN}{NP} = \frac{MI}{IQ} = e.$$

Cette construction permet de résoudre aisément plusieurs problèmes.

Par exemple, une conique étant donnée par un foyer F, la directrice correspondante et l'excentricité e, soit à trouver les points où elle coupe une droite donnée EI. On construit le cercle de Boscowich relatif à un point quelconque I de la droite, on trace la droite EF qui coupe le cercle en M et M', puis on mène par F des parallèles FN, FN' aux rayons IM, IM'.

Soit encore à mener par un point donné I des tangentes à la conique. On construit le cercle de Boscowich ayant pour centre le point I; de F, on tire à ce cercle deux tangentes, qui coupent la directrice en E et E'; les droites EI, E'I sont les tangentes cherchées. En effet, les rayons IM, IM' coïncident.

La solution du dernier problème montre que le segment d'une tangente, compris entre le point de contact et la directrice, est vu du foyer sous un angle droit.

Cette propriété est un cas particulier de la suivante : Si une sécante coupe la courbe en N et N', et la directrice en E, la droite EF fait des angles égaux avec les rayons vecteurs FN, FN'. Le théorème général résulte de ce que le triangle IMM' est isoscèle. (D'après la *Mathematical Gazette*. Voir aussi J. Casey, *Conic sections* (1885), p. 167).

×12. *Sur les figures semblables.* Soient ABCD..., A'B'C'D'... deux polygones directement semblables, situés dans un même plan. On sait qu'ils admettent un *centre de similitude* O, c'est-à-dire un point O tel que les triangles OAB et OA'B', OBC et OB'C'..., sont semblables.

Il est facile de voir que les triangles OAA', OBB', OCC'..., sont semblables. Réciproquement, *si sur les droites* OA, OB, OC,... *qui vont d'un point fixe* O *aux sommets d'un polygone* ABC ..., *on construit des triangles* OAA', OBB', OCC'..., *semblables entre eux, les polygones* A'B'C'... *et* ABC... *sont semblables* (Théorème connu).

Construisons sur les droites AA', BB', CC'..., des triangles AA'A'', BB'B'', CC'C'', ... directement semblables à un triangle donné; les quadrilatères OAA''A', OBB''B', OCC''C'... seront semblables entre eux et, par suite, il en sera de même des triangles OAA'', OBB'', OCC''... Donc, *si sur les droites* AA', BB', CC',... *qui joignent les sommets de deux polygones semblables* ABC..., A'B'C'..., *on construit des triangles semblables* AA'A'', BB'B'', CC'C''..., *on obtient les sommets d'un polygone* A''B''C''... *semblable aux deux premiers.*

Cette proposition, que nous empruntons à l'ouvrage de M. Laisant : *Théorie et Applications des Equipollences*, généralise un théorème qui nous a été autrefois communiqué par M. H. Van Aubel (*Mathesis*, t. I, pp. 95 et 106), à savoir le cas particulier où les points A'', B'', C''... divisent dans un même rapport les droites AA', BB', CC'...

Menons les droites OA_1, OB_1, OC_1... égales et parallèles aux droites A'A, B'B, C'C...; les triangles OAA_1, OBB_2... étant égaux aux triangles AOA', BOB'... sont directement semblables. Par suite : *Si par un même point on mène des droites égales et parallèles à celles qui unissent les sommets homologues de deux polygones semblables, les secondes extrémités de ces droites sont les sommets d'un troisième polygone, semblable aux deux premiers.*

Ces propriétés peuvent être étendues à deux figures semblables quelconques, situées dans un même plan. (J. N.)

22. ***Sur les Wronskiens.*** M. A. Demoulin a signalé (*Mathesis*, t. IX, p. 136) une propriété des Wronskiens, qui, pour quatre fonctions y, z, u, v de la variable x, se traduit par l'égalité

$$W(y, z, u, v) = y^4 W\left(1, \frac{z}{y}, \frac{u}{y}, \frac{v}{y}\right), \qquad (1)$$

analogue à celle qui caractérise les fonctions homogènes.

Soit α une fonction quelconque de x; on peut aussi écrire

$$W(\alpha y, \alpha z, \alpha u, \alpha v) = \alpha^4 W(y, z, u, v). \qquad (2)$$

En effet, la première colonne du déterminant $W(xy, \alpha z; xu, \alpha t)$ est

$$\begin{aligned} &\alpha y \\ &\alpha y' + \alpha' y \\ &\alpha y'' + 2\alpha' y' + \alpha'' y \\ &\alpha y''' + 3\alpha' y'' + 3\alpha'' y' + \alpha''' y; \end{aligned}$$

si l'on met en évidence le facteur α de la première ligne et que l'on retranche ensuite des trois dernières lignes la première multipliée respectivement par α', α'', α''', la première colonne devient

$$\begin{aligned} &y \\ &\alpha y' \\ &\alpha y'' + 2\alpha' y' \\ &\alpha y''' + 3\alpha' y'' + 3\alpha'' y'. \end{aligned}$$

Faisons sortir le facteur α commun aux éléments de la deuxième ligne, puis retranchons de la troisième et de la quatrième ligne la deuxième multipliée respectivement par $2\alpha'$ et $3\alpha''$, etc. En continuant ainsi, on trouve l'égalité (2), qui comprend, comme cas particulier, le théorème de M. Demoulin, si l'on remplace α par $\frac{1}{y}$.

Soient Y, Z, U, V ce que deviennent les fonctions y, z, u, v par la substitution $x = \varphi(t)$; on démontre facilement que

$$W(Y, Z, U, V) = \varphi'^6(t)\, W(y, z, u, v),$$

car il suffit d'observer que

$$\begin{aligned} Y' &= y'\varphi'(t), \\ Y'' &= y''\varphi'^2(t) + y'\varphi''(t), \\ Y''' &= y'''\varphi'^3(t) + 3y''\varphi'(t)\varphi''(t) + y'\varphi'''(t), \text{ etc.} \end{aligned} \qquad (J.\ N.)$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 841.

(Voir *Mathesis* (2), III, p. 128).

Soient A′, B′, C′ *les points où les symédianes de* ABC *rencontrent le cercle circonscrit* O ; V, W *les centres isodynamiques.*

Démontrer que B′, C′ *sont les centres isodynamiques du triangle* AVW *et que* B, C *sont les centres isodynamiques de* A′VW. (Sollertinsky.)

Solution par M. Sollertinsky. Les tangentes aux points A, B, C de la circonférence O rencontrent les côtés BC, CA, AB aux points O_a, O_b, O_c situés sur la droite de Lemoine ; ces points O_a, O_b, O_c sont les centres des trois cercles d'Apollonius, qui coupent orthogonalement le cercle O respectivement aux points A et A′, B et B′, C et C′, et se coupent mutuellement aux centres isodynamiques V, W sur la droite OK.

Le cercle O est un cercle d'Apollonius du triangle AVW, car il a son centre sur VW et coupe orthogonalement le cercle O_a, circonscrit à ce triangle ; donc AA′ est une symédiane de ce triangle. Le point de Lemoine de AVW est le point de rencontre K′ des droites AA′ et B′C′ ; en effet : 1° le pôle de VW par rapport au cercle O_a est à l'intersection S_a de la polaire AA′ du point O avec le diamètre O_aO_c perpendiculaire à VW ; 2° les cordes AA′, BB′, CC′ du cercle O passant par le point K, pôle de la droite $O_aO_bO_c$, les droites BC, B′C′ se coupent sur cette droite, donc en O_a, et B′C′O_aK′ est une division harmonique ; 3° les droites BA′ et AB′ se rencontrent sur la droite O_aO_b en un point S_c, pôle de la droite KO_c (AB et A′B′ concourent en O_c) et situé, par conséquent, sur la droite CC′, polaire de O_c ; 4° si l'on projette la division harmonique B′C′K′O_a à partir de S_c sur AA′, on obtient la nouvelle division harmonique AKK′S_a. Ainsi, B′C′ est la corde d'un cercle d'Apollonius du triangle AVW, déterminée par le diamètre O_aK′ du cercle circonscrit qui passe par le point de Lemoine K′ ; par conséquent, ses extrémités B′, C′ sont les centres isodynamiques de ce triangle.

La seconde partie du théorème s'établit de la même manière.

M. Déprez démontre la question 841 en vérifiant l'égalité

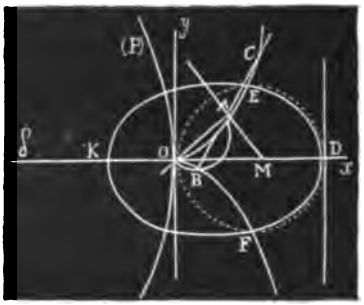
$$AC' \cdot WV = VC' \cdot AW = WC' \cdot AV.$$

Question 844.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 128).

Par le point de rebroussement O *d'une cissoïde droite, on mène un rayon vecteur* OA. *Le cercle de diamètre* OA *rencontre la cissoïde en un autre point* B. *La corde* AB *rencontre la cissoïde en un troisième point* C. *Montrer que:* 1° *La corde* AB *enveloppe une parabole* (P) *quand le vecteur* OA *varie;* 2° *les tangentes à la cissoïde en* A *et* C *se rencontrent sur une ellipse;* 3° *La perpendiculaire élevée en* A *à* OA *enveloppe la parabole* (P). (E. N. Barisien.)

Solution par M. Retali. Décrivons le cercle directeur de la cissoïde : soit D le point de contact de ce cercle avec l'asymptote ; soient E et F les points réels où le même cercle coupe ultérieurement la cissoïde. Comme la cissoïde est la podaire du point O par rapport à la parabole (P) ayant son sommet en O et son foyer au point δ symétrique de D rapport à O; 1° la corde AB, perpendiculaire à l'extrémité du rayon vecteur OB, enveloppe la parabole (P); 3° la perpendiculaire élevée en A à OA enveloppe la même parabole.



Pour démontrer la 2e partie, j'observe d'abord que, sur la cissoïde, les deux points A et C sont conjugués dans une involution quadratique ; car les deux cercles ayant OA et QC pour diamètre, se coupent en B(*). Cette involution a E et F pour points doubles, car le pied de la perpendiculaire abaissée du point O sur la tangente menée à la cissoïde en E appartient à la courbe ; en outre les deux points circulaires à l'infini forment un couple de l'involution, et un autre couple est formé par le point O et le point (à l'infini) d'inflexion de la cissoïde. On peut en conclure que le lieu des intersections des tangentes à la cissoïde en A et C est une conique qui passe par les points D, E, F et par le foyer double de la cissoïde, c'est-à-dire par le milieu du segment compris entre le rebroussement de la cissoïde et le foyer de la parabole (P).

(*) V. p. ex. de Jonquières, *Mélanges de Géométrie pure*, page 155.

Si r est le rayon du cercle directeur, en prenant deux axes orthogonaux menés par O, on obtient pour l'équation de la parabole (P)

$$y^2 + 8rx = 0,$$

et pour celle de l'autre conique

$$\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + 2y^2 = \frac{9r^2}{4};$$

celle-ci représente une ellipse ayant pour centre le point $\left(\frac{r}{2}, 0\right)$ et pour axes $3r, \frac{3r}{\sqrt{2}}$.

Solution par M. Déprez. Soient OD le diamètre du cercle directeur, DD′ la tangente en D, Oy la tangente en O, P et Q les points de rencontre de la droite OA avec le cercle et DD′. La perpendiculaire en A sur OA coupe Oy en U, et la perpendiculaire en U sur UA coupe OD en δ; comme OA = PQ, on a OU = DQ, δO = OD. Donc le point δ est fixe, et la droite AU enveloppe l'antipodaire de δ par rapport à Oy, c'est-à-dire une parabole qui a pour foyer δ, et pour directrice DD′. AB est une tangente à la même parabole(*).

Soient (ρ, ω), (ρ', ω') les coordonnées des points A, B; on sait que

$$\rho = \frac{a \sin^2 \omega}{\cos \omega}, \quad \rho' = \frac{a \sin^2 \omega'}{\cos \omega'}; \qquad (1)$$

le triangle OAB étant rectangle, on a aussi

$$\rho' = \rho \cos(\omega' - \omega).$$

Substituant les valeurs (1) on obtient

$$\sin^2 \omega \cos \omega' = \sin^2 \omega' \cos \omega \cos(\omega' - \omega),$$

d'où, en ajoutant $-\sin \omega \sin \omega' \cos \omega$, aux deux membres,

$$\sin(\omega - \omega')(\sin \omega' + \cos \omega' \sin \omega \cos \omega) = 0.$$

Cette relation peut s'écrire plus simplement

$$\sin 2\omega = -2 \operatorname{tg} \omega'.$$

(*) On connaît depuis longtemps ces deux théorèmes réciproques l'un de l'autre : *La podaire du sommet d'une parabole est une cissoïde*; *l'antipodaire du point de rebroussement d'une cissoïde est une parabole.*

A une même valeur de ω' correspondent deux valeurs complémentaires ω_1, ω_2 de ω, se rapportant respectivement aux points A et C.

L'équation de la tangente au point (x_1, y_1) de la cissoïde est

$$x(3x_1^2 + y_1^2) + y(2x_1y_1 - 2ay_1) - ay_1^2 = 0;$$

en remplaçant x_1, y_1 par $\rho\cos\omega$, $\rho\sin\omega$, et ρ par $\dfrac{a\sin^2\omega}{\cos\omega}$, on trouve :

$$2y\cos^3\omega - x\sin\omega(1 + 2\cos^2\omega) + a\sin^3\omega = 0. \qquad (2)$$

Supposons que ce soit l'équation de la tangente au point A. Nous aurons celle de la tangente en C en changeant ω en $90° - \omega$:

$$2y\sin^3\omega - x\cos\omega(1 + 2\sin^2\omega) + a\cos^3\omega = 0. \qquad (3)$$

En éliminant ω entre ces égalités(*) on trouve

$$4y^2 + (2x + a)(x - a) = 0,$$

équation d'une ellipse.

Question 864.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 214.)

Déterminer n de manière que $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n$ *soit un carré.*

(De Rocquigny.)

Solution par M. Fauquembergue *(Parthenay)*. I. On sait que toute puissance d'un nombre N de la forme $a^2 + nb^2$ est de la même forme $x^2 + ny^2$. Pour trouver x et y, c'est-à-dire pour résoudre l'équation

$$N^\lambda = x^2 + ny^2$$

décomposons N en ses facteurs imaginaires et posons

$$(a + b\sqrt{-n})^\lambda = x + y\sqrt{-n},$$

$$(a - b\sqrt{-n})^\lambda = x - y\sqrt{-n}.$$

Posons aussi

$$a + b\sqrt{-n} = \sqrt{N}(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

d'où

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{N}}, \quad \sin\varphi = \frac{b\sqrt{n}}{\sqrt{N}}, \quad \operatorname{tang}\varphi = \frac{b\sqrt{n}}{a}.$$

(*) Pour faire cette élimination on peut d'abord résoudre (1) et (2) par rapport à x et y, ou soustraire ces équations l'une de l'autre.

L'identité

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\lambda} = \cos\lambda\varphi + i\sin\lambda\varphi$$

nous conduit à prendre

$$x = N^{\frac{\lambda}{2}}\cos\lambda\varphi, \quad y = \frac{N^{\frac{\lambda}{2}}\sin\lambda\varphi}{\sqrt{n}}.$$

II. La somme

$$1 + 3 + 3^2 + \ldots 3^n \quad \text{est égale à} \quad \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Si l'on fait $n + 1 = \lambda$, il faut chercher pour quelles valeurs de λ le nombre 3^{λ} se réduit à la forme $1^2 + 2y^2$, ou pour quelles valeurs de λ l'expression $3^{\frac{\lambda}{2}}\cos\lambda\varphi$ est égale ± 1. Dans ce cas,

$$N = 1^2 + 2.\,1^2, \quad a = b = 1, \quad n = 2, \quad \text{tang}\,\varphi = \sqrt{2}.$$

Le nombre entier x sera minimum en même temps que la valeur absolue de $\cos\lambda\varphi$. Cela arriverait si l'angle $\lambda\varphi$ devenait égal à $\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi$, ou en général à $\frac{1}{2}(2k+1)\pi$; x serait alors nul. Mais l'angle φ, ici égal à 54° 44′ 8″,19 étant incommensurable avec la circonférence, $\lambda\varphi$ ne peut devenir égal à $\frac{1}{2}(2k+1)\pi$. Nous prendrons donc pour $\lambda\varphi$ l'angle qui se rapproche le plus de $\frac{1}{2}(2k+1)\pi$. Posons

$$\lambda\varphi = \tfrac{1}{2}(2k+1)\pi, \quad \text{ou} \quad \frac{2\lambda}{2k+1} = \frac{\pi}{\varphi},$$

et développons $\frac{\pi}{\varphi}$ en fraction continue. Nous choisirons pour 2λ les numérateurs pairs des réduites et pour $2k+1$ les dénominateurs correspondants. Quand

$$\varphi = 54°\,44'\,8'',19 = 197048'',19, \quad \frac{\pi}{\varphi} = \frac{64800000}{19704819},$$

et l'on trouve pour numérateurs pairs 2, 4, 10, 148... Donc

$$\lambda = 1, 2, 5, 74\ldots \text{ et } n = 0, 1, 4, 73\ldots$$

Il en résulte les identités :

$$1 = 1^2, \quad 1 + 3 = 2^2, \quad 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 11^2.$$

En prenant $\lambda = 74$, on obtiendrait pour x un nombre de 16 chiffres. Donc les seules valeurs de n répondant à la question 864 sont 0, 1, et 4.

(E. Fauquembergue.)

×Question 869.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 215.)

Déterminer **m** ***de telle sorte que la somme des*** **m** ***premiers nombres triangulaires soit aussi un nombre triangulaire.*** (De Rocquignie.)

Voici une solution *partielle* qui nous a été adressée par M. César Spino.

La somme des n premiers triangulaires est égale à

$$\tfrac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(n+2)\,;$$

l'équation du problème est donc :

$$\tfrac{1}{3}\,n\,(n+1)\,(n+2) = x\,(x+1).$$

On y satisfait en prenant $n = 3$ ou $n+2 = 3$.

M. Brocard nous communique les solutions suivantes où S_n désigne la somme des n premiers triangulaires :

$$S_3 = 10 = \frac{4.5}{2},\quad S_8 = 120 = \frac{15.16}{2},$$

$$S_{20} = 1540 = \frac{55.56}{2},\quad S_{84} = 7140 = \frac{119.120}{2}.$$

Il reste à trouver la solution générale.

Question 875(*).

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 215).

On donne dans un même plan une conique (C) ***et un cercle*** (O). ***Soit*** **AB** ***la corde des contacts de la conique*** (C) ***avec un des cercles qui lui sont bitangents. L'axe radical de ce cercle et du cercle*** O ***coupe la droite*** **AB** ***en un point*** M ***dont on demande le lieu géométrique. Quelle est l'enveloppe de cet axe radical?*** (V. Jamet.)

Solution par M. Gillet, ***professeur à Maredsous.*** Soient

$$y^2 = 2px + qx^2 \qquad (1)$$

l'équation de la conique (C), et

$$x^2 + y^2 + mx + ny + k = 0 \qquad (2)$$

celle du cercle (O).

(*) Cette question a été reproduite par erreur sous le n° 892.

Toute conique bitangente à (C) a pour équation

$$y^2 - 2px - qx^2 - \lambda(ux + vy - 1)^2 = 0.$$

En égalant les coefficients de x^2 et de y^2, et annulant celui de xy, on trouve

$$\lambda = \frac{1+q}{u^2 - v^2}, \quad \text{et} \quad u = 0 \quad \text{ou} \quad v = 0.$$

Si nous prenons $v = 0$, les cordes de double contact seront perpendiculaires à l'axe focal de la conique. Les cercles variables sont donc représentés par l'équation :

$$x^2 + y^2 - 2px - \frac{2(1+q)}{u}x + \frac{1+q}{u^2} = 0. \tag{3}$$

L'axe radical des cercles (2) et (3) aura pour équation :

$$(mx + 2px + ny + k)u^2 + 2(1+q)ux - (1+q) = 0; \tag{4}$$

il enveloppe la parabole représentée par

$$(1+q)x^2 + (m+2p)x + ny + k = 0. \tag{5}$$

La corde de contact ayant pour équation

$$ux - 1 = 0, \tag{6}$$

on aura le lieu de M en éliminant u entre (4) et (6); on retrouve la parabole (5).

Si, au lieu de $v = 0$, nous avions pris $u = 0$, nous aurions trouvé pour enveloppe la parabole dont l'équation est

$$(1+q)y^2 + (mq - 2p)x + nqy + kq = 0; \tag{7}$$

de sorte que *le lieu complet se compose des deux paraboles* (5), (7) tant que l'on a q différent de 0 (ellipse et hyperbole). Lorsque la conique (1) est une parabole, $q = 0$, et le lieu cherché ne comprend que la parabole (5).

Ont résolu la même question MM. Déprez, Droz, Barisien, Collette, Mandart, Absolonne et H. Brocard.

Pour démontrer l'identité du lieu (M) avec l'enveloppe de l'axe radical, MM. Collette et Droz observent que M est le centre radical du cercle fixe O et de deux cercles bitangents consécutifs, puisque ces derniers ont pour axe radical AB; donc M est aussi l'intersection des axes radicaux consécutifs du cercle O comparé aux cercles bitangents.

M. Déprez trouve que l'intersection de la corde AB avec la ligne joignant le centre du cercle bitangent correspondant et le centre du cercle fixe décrit une hyperbole équilatère.

×Question 882.

(Voir *Mathesis*, (2) III, p. 240.)

***p* étant un nombre premier ; si pN est la somme de $p+1$ carrés, dont *p* soient égaux, N jouit de la même propriété.** (E. CATALAN.)

Solution par MM. FAUQUEMBERGUE, VERHELST, SPINO, VERDEYEN *et* DROZ. Par hypothèse,

$$pN = a^2 + pb^2.$$

Donc le nombre premier p doit diviser a^2 et par suite a.

Soit $a = pc$. En substituant cette valeur de a dans l'égalité précédente et divisant les deux membres par p, on a

$$N = pc^2 + b^2. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

×QUESTIONS D'EXAMENS.

886. Trouver un triangle sphérique équilatéral dont la surface soit complémentaire au périmètre. (BELLACHI.)

On doit avoir

$$3A - \pi = \frac{\pi}{2} - 3a, \quad \text{ou} \quad A + a = \frac{\pi}{2}.$$

Si l'on considère le triangle rectangle ABD déterminé par la hauteur AD, on trouve

$$\sin\frac{a}{2} = \sin a \sin\frac{A}{2}, \quad \text{ou} \quad 1 = 2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{A}{2}.$$

Par conséquent,

$$1 = 2\cos\frac{a}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - a\right) = 1 - \sin\frac{\pi}{4} = 1 - \cos\frac{\pi}{4} = 2\sin^2\frac{\pi}{8},$$

$$a = 27°58'7'',5.$$

887. L'expression

$$P = 2^{3n}.3^{4n} - 4^{3n}.5^{2n}$$

est divisible par 992. (*Journal de Vuibert.*)

Ecrire $P = 2^{3n}(81^n - 50^n) = 32^n(81 - 50)(81^{n-1} + \ldots)$.

Autrement. Le théorème est vrai pour $n = 1$. Or, si l'on change n en $n+1$, P devient

$$2^{3n+3}.3^{4n+4} - 4^{3n+3}.5^{2n+2} = 2^{3n}.3^{4n}.2^3.3^4 - 4^{3n}.5^{2n}.4^3.5^2$$
$$= (2^{3n}.3^{4n} - 4^{3n}.5^{2n})\,1600 + 2^{3n}.3^{4n}.992, \text{ etc.}$$

638. On donne trois parallèles Ax, By, Cz non situées dans un même plan. Les points A, B, C sont fixes, et a, b, c sont trois points variables sur ces droites et tels que la somme *algébrique* des distances Aa, Bb, Cc reste constante. 1° Tous les plans abc passent par un point fixe g. 2° Trouver le lieu des projections d'un point fixe H, sur ces plans. 3° Si H′ est un second point donné, trouver le lieu de la droite d'intersection de deux des plans considérés, tels que la projection de H sur l'un se confonde avec la projection de H′ sur l'autre. 4° Si la somme $Aa + Bb + Cc$ change, quelle est la ligne décrite par g? Déterminer sur cette ligne les positions du point g pour lesquelles l'angle HgH' est égal à un angle donné α; discuter ce dernier problème dans le cas particulier où la droite HH′ est dans un plan perpendiculaire à Ax.

(*Concours général de Rhétorique de Paris en* 1893).

1° Soient G, g les centres de gravité des triangles ABC, abc ; on sait que $gG = \frac{1}{3}(Aa + Bb + Cc)$ et que la droite Gg est parallèle à Aa. Donc g est un point fixe. 2° Le lieu de la projection de H sur le plan abc, est la sphère décrite sur la droite gH comme diamètre. 3° Soient abc, $a'b'c'$ deux positions du plan mobile. telles que la projection I de H sur abc se confonde avec la projection de H′ sur $a'b'c'$; I parcourt la circonférence, intersection des deux sphères décrites respectivement sur les droites gH et gH′ comme diamètres. Cette circonférence passe par g; son centre est la projection de g sur la droite joignant les milieux de gH et gH′, et son plan est perpendiculaire à cette droite. Ce plan est aussi le lieu de l'intersection gI des plans abc, $a'b'c'$. 4° Le point g décrit une parallèle Gu à Aa, lorsque la somme $Aa + Bb + Cc$ varie.

Décrivons sur HH′ un segment capable de l'angle α, et faisons tourner ce segment autour de HH′; on aura un tore qui coupera Gu aux points cherchés. Si la droite HH′ est perpendiculaire à Gu, la droite Gu doit passer à l'intérieur de l'un des deux segments capables de α décrits sur HH′ dans le plan mené par HH′ perpendiculairement à Gu.

639. Soient A′, B′, C′ les points de rencontre des côtés d'un triangle ABC avec les droites AM, BM, CM qui joignent les sommets opposés à un même point. Démontrer que les symédianes des triangles AB′C′, BC′A′, CA′B′, issues des sommets A, B, C, concourent en un même point. (Merante.)

Les rapports des distances d'un point de l'une des symédianes aux côtés adjacents du triangle ABC sont respectivement égaux à

$$\frac{AB'}{AC'},\quad \frac{BC'}{BA'},\quad \frac{CA'}{CB'},$$

et le produit de ces rapports = 1.

QUESTIONS PROPOSÉES.

955. On donne une parabole et un point fixe P de son plan. Par P on mène une corde quelconque AB. Le cercle de diamètre AB rencontre la parabole en deux nouveaux points A_1, B_1. De même, le cercle de diamètre A_1B_1 rencontre la parabole en A_2, B_2. Et ainsi de suite.

1° Chacune des cordes A_1B_1, A_2B_2 ..., A_nB_n passe par un point fixe P_1, P_2, ... P_n.

2° Le lieu du point de rencontre de deux cordes quelconques A_kB_k, $A'_kB'_k$, est une hyperbole équilatère ; en particulier, le lieu du point de rencontre de AB et A_1B_1 est l'hyperbole d'Apollonius relative au point P.

3° Les triangles PP_1P_2, $P_1P_4P_5$, $P_4P_7P_8$, ..., sont équivalents.

4° Lorsque le point P est au foyer de la parabole, les points P_1, P_2, ... sont sur l'axe de la parabole ; les hyperboles, lieux du point de rencontre des cordes A_kB_k et $A_{k'}B_{k'}$, deviennent des droites perpendiculaires à l'axe.

5° Lorsque P est au foyer, le cercle de diamètre AB et la perpendiculaire à AB abaissée du foyer se rencontrent sur deux droites fixes.

6° Dans ce même cas, le lieu des points d'intersection du cercle de diamètre AB avec la perpendiculaire abaissée du sommet de la parabole sur AB, est un cercle. (E. N. Barisien.)

956. Le lieu de la projection d'un foyer d'une ellipse sur les normales à l'ellipse est une courbe fermée dont l'aire est la différence entre l'aire du cercle principal et celle de l'ellipse. (E. N. Barisien.)

957. On considère deux ellipses concentriques et homothétiques. Toute tangente à l'ellipse intérieure rencontre l'ellipse extérieure en deux points A et B. Si du point P de rencontre des normales en A et B, on abaisse les deux autres normales à l'ellipse extérieure, PC et PD, la droite CD enveloppe une développée d'ellipse. (E. N. Barisien.)

***958.** Trouver une valeur de x qui rende l'expression

$$(x + a^2)(x + b^2)(x + c^2)$$

carré parfait. (Thomas.)

***959.** Étant donné un triangle rectangle ABC, on décrit deux circonférences passant par le sommet A de l'angle droit et ayant pour centres, l'une le point B, l'autre le point C. On demande de mener une tangente MT à la première, une tangente NT à la seconde, de telle façon que ces droites soient rectangulaires et que la somme des segments TM, TN

compris entre le point de concours T et les points de contact M, N soit égale à une longueur donnée. Discussion.

×**960**. Par un point fixe O, situé dans le plan d'un parallélogramme donné ABCD, on mène une sécante quelconque, qui rencontre les côtés AB, BC, CD, DA aux points M, N, P, Q. Démontrer que le rapport des produits OM.ON, OP.OQ ne change pas lorsque la sécante tourne autour de O. Généraliser ce théorème par projection centrale. (J. N.)

×**961**. Soient A_1, B_1, C_1 les pieds des hauteurs d'un triangle ABC, A_2, B_2, C_2 les milieux des hauteurs.

1° Les circonférences circonscrites aux triangles $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$ passent par l'orthocentre et respectivement par les milieux des côtés BC, CA, AB. 2° Ces triangles sont inversement semblables à ABC, le rapport de similitude ayant pour valeur

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\cos^2 B + \cos^2 C - 2\cos B \cos C \cos A} =$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2\cos^2 B + 2\cos^2 C - \sin^2 A}, \ldots$$

3° Les centres α, β, γ des cercles circonscrits à ces triangles sont les sommets d'un triangle ayant pour orthocentre le centre du cercle des neuf points de ABC. 4° Les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ concourent en un même point, qui les divise dans le rapport 4 : 1 et qui partage dans le rapport 2 : 3 la droite allant de l'orthocentre H de ABC au centre O du cercle ABC. 5° Le point de Lemoine de ABC est le centre de gravité des points A_2, B_2, C_2 chargés des masses a^2, b^2, c^2. (J. Neuberg.)

La similitude des triangles $A_1B_2C_2$, $A_2B_1C_2$, $A_2B_2C_1$, ABC a été remarquée par M. Sollertinsky (*Mathesis*, (2), IV, p. 117) ; on peut la déduire de la première partie de la question.

962. Étant donnée une parabole (P), d'un point M on mène les normales MA, MB, MC qui rencontrent la courbe pour la deuxième fois en A', B', C'.

On demande 1° le lieu des points M tels que les normales en A', B', C' concourent en un même point M' ; 2° le lieu des points M' ; 3° le lieu du centre et 4° l'enveloppe de la circonférence circonscrite à A'B'C'.

(J. Gillet.)

×**963**. Si, sur les côtés d'un pseudocarré ABCD (quadrilatère dont les diagonales sont égales et perpendiculaires), on construit les triangles ABA', BCB', CDC', DAD' directement semblables à un triangle donné MNP, les points A', B', C', D' sont les sommets d'un pseudocarré.

(H. Van Aubel.)

SUR L'ÉVALUATION APPROCHÉE D'UNE SÉRIE ELLIPTIQUE;

par M. E. Cesàro.

Nous allons montrer que le calcul de la série

$$\theta(q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + 2q^{25} + \cdots$$

pour les valeurs de q, très voisines de l'unité, peut se faire par des moyens purement algébriques, en ne s'appuyant que sur le *théorème de M. Appell*, dont il a été question dans ce *Recueil* (1893, p. 241). Posons d'abord, en désignant par $[x]$ le plus grand entier contenu dans x,

$$a_n = \tfrac{1}{2} - \{\sqrt{n} - [\sqrt{n}]\}, \quad b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n,$$

et tâchons d'évaluer la somme

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = (n+1)\,b_n - (a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n) \quad (1)$$

aux quantités près de l'ordre de $n\sqrt{n}$. On a

$$\sum_1^n [\sqrt{i}] = \sum_1^\nu (i-1)(2i-1) + \nu(n - \nu^2 + 1),$$

où, pour abréger, on a fait $\nu = [\sqrt{n}]$. On en déduit sans peine

$$\sum_1^n [\sqrt{i}] = n\nu - \tfrac{1}{6}\nu(\nu-1)(2\nu+5).$$

On sait d'ailleurs que

$$\sum_1^n \sqrt{i} = \tfrac{2}{3} n\sqrt{n} + \tfrac{1}{2}\sqrt{n},$$

en supprimant les quantités négligeables par rapport à $\sqrt{n}$. Si l'on représente par ρ l'excès de $\sqrt{n}$ sur ν, on peut écrire

$$\sum_1^n \sqrt{i} = n\nu - \tfrac{1}{3}\nu^3 + (\rho^2 + \tfrac{1}{2})\nu.$$

Donc

$$b_n = (\tfrac{1}{3} + \rho - \rho^3)\sqrt{n}. \quad (2)$$

Remarquons, en passant, que le rapport de b_n à n tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Ceci veut dire que l'on a, en moyenne, $a_n = 0$. En d'autres termes, l'excès de $\sqrt{n}$ sur $[\sqrt{n}]$ est égal, en moyenne, à $\frac{1}{2}$.

Considérons, maintenant, la somme

$$\sum_1^n i a_i = \tfrac{1}{4} n(n+1) - \sum_1^n i\sqrt{i} + \sum_1^n i\,[\sqrt{i}].$$

On trouve sans peine que la dernière somme est égale à

$$\tfrac{1}{2}\nu n(n+1) - \tfrac{1}{2}\sum_{1}^{\nu} i^2(i^2-1) = \tfrac{1}{2}\nu n(n+1) - \tfrac{1}{20}\nu(\nu^2-1)(\nu+2)(2\nu+1).$$

D'autre part,

$$\sum_{1}^{n} i\sqrt{i} = \tfrac{2}{5}n^2\sqrt{n} + \tfrac{1}{2}n\sqrt{n},$$

en négligeant des quantités de l'ordre de $\sqrt{n}$. Il en résulte, après des calculs faciles,

$$\sum_{1}^{n} ia_i = (\rho - \rho^2)\, n\sqrt{n}.$$

Si l'on porte ce résultat dans (1), et qu'on tienne compte de (2), on obtient enfin l'égalité rigoureuse

$$\lim_{n=\infty} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n\sqrt{n}} = \tfrac{1}{3}. \tag{3}$$

On peut interpréter ce résultat en écrivant l'égalité moyenne

$$[\sqrt{n}] = \sqrt{n} - \tfrac{1}{2} + \frac{1}{4\sqrt{n}} - \cdots = \frac{n}{\sqrt{n} + \frac{1}{2}} + \cdots.$$

Mais c'est l'égalité (3) qui nous intéresse. Le théorème de M. Appell nous donne immédiatement

$$\lim_{q=1} (1-q)^{\frac{3}{2}} \sum_{1}^{\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_i)\, q^i = \tfrac{1}{3}\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

On a d'ailleurs

$$\sum_{1}^{\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_i)\, q^i = \frac{1}{1-q}\sum_{1}^{\infty} b_i q^i = \frac{1}{(1-q)^2}\sum_{1}^{\infty} a_i q^i.$$

Donc

$$\lim_{q=1} (1-q)^{\frac{1}{2}} \sum_{1}^{\infty} a_i q^i = \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \tag{4}$$

Le même théorème nous donne

$$\lim_{q=1} (1-q)^{\frac{3}{2}} \sum_{1}^{\infty} q^i \sqrt{i} = \Gamma(\tfrac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{5}$$

D'autre part, il est évident que

$$(1-q)\sum_{1}^{\infty} q^i [\sqrt{i}] = q + q^4 + q^9 + \cdots.$$

On a donc

$$\frac{\theta(q)}{1-q} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} a_i q^i + 2\sum_{1}^{\infty} q^i \sqrt{i}. \tag{6}$$

Il en résulte, en vertu des égalités (4) et (5),

$$\lim_{q=1}(1-q)^{\frac{1}{2}}\theta(q)=2\lim_{q=1}(1-q)^{\frac{1}{2}}\Sigma q^{i}\sqrt{i}=\sqrt{\pi}.$$

Maintenant nous pouvons écrire, en vertu de (6) et en tenant compte de (4),

$$\lim_{q=1}\frac{\sqrt{\pi}-(1-q)^{\frac{1}{2}}\theta(q)}{1-q}=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\lim_{q=1}\frac{\sqrt{\pi}-2(1-q)^{\frac{1}{2}}\sum_{1}^{\infty}q^{i}\sqrt{i}}{1-q}. \quad (7)$$

La seconde partie du second membre ne diffère pas de la limite, pour $q=1$, de

$$\frac{d}{dq}[2(1-q)^{\frac{1}{2}}\sum_{1}^{\infty}q^{i}\sqrt{i}]=(1-q)^{\frac{1}{2}}\sum_{0}^{\infty}c_{i}q^{i},$$

où

$$c_{n}=(2n+2)\sqrt{n+1}-(2n+3)\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8n}+\cdots\right).$$

Or on a

$$\lim_{q=1}(1-q)^{\frac{1}{2}}\sum_{0}^{\infty}c_{i}q^{i}=\tfrac{1}{4}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}.$$

Par conséquent, l'égalité (7) devient

$$\lim_{q=1}\frac{\sqrt{\pi}-(1-q)^{\frac{1}{2}}\theta(q)}{1-q}=\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Enfin, asymptotiquement,

$$\theta(q)=\sqrt{\frac{\pi}{1-q}}-\tfrac{1}{4}\sqrt{\pi(1-q)}. \quad (8)$$

On peut toutefois se passer du théorème de M. Appell, pourvu qu'on suppose connue la formule de Cauchy

$$\theta(q)=\sqrt{1+4\sigma(q)},$$

où

$$\sigma(q)=\frac{q}{1-q}-\frac{q^{2}}{1-q^{2}}+\frac{q^{3}}{1-q^{3}}-\frac{q^{7}}{1-q^{7}}+\cdots$$

On trouve, en effet, par un calcul facile,

$$\frac{1}{1-q^{n}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-q}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

puis

$$\sigma(q)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+q}{1-q}\operatorname{arc\,tg}q+\frac{1}{4},$$

en négligeant tout ce qui tend vers zéro pour $q = 1$. Donc

$$\sigma(q) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+q}{1-q}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1-q}{2}\right) + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}\frac{1+q}{1-q} - \frac{1}{4}.$$

On obtient enfin la formule

$$\theta(q) = \sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{1+q}{1-q}},$$

qui ne diffère pas de (8).

P. S. La livraison de mars de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (p. 42) contient deux démonstrations de la formule (8), limitée, dans le second membre, au premier terme. Ces démonstrations, identiques au fond, sont dues à MM. Poincaré et Kluyver. Elles sont fondées sur l'égalité

$$x^{\frac{1}{4}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 x} = y^{\frac{1}{4}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 y},$$

qui a lieu sous la condition $xy = \pi^2$. Lorsque y croît indéfiniment, le second membre est asymptotique à $y^{\frac{1}{4}}$, d'où il suit

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 x} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} = \sqrt{\frac{\pi}{1-q}}.$$

Une troisième solution, par M. Audibert, au fond identique aux précédentes, se trouve dans la livraison de juin du même recueil (p. 105).

SUR LE PRINCIPE FONDAMENTAL DE LA GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE.

La somme des angles d'un triangle sphérique ABC *est supérieure à deux droits*(*). Soit E le milieu de CB; menons AE et prolongeons cette ligne d'une longueur EF = AE ; menons aussi CF, FB. Le triangle CEF sera égal à BEA et EFB à EAC. Supposons le point F à l'intérieur du triangle CBO, O étant le point de rencontre de AC et AB, point diamétralement opposé à A. Soit encore I le milieu de BF, joignons AI et prolongeons cette ligne de IJ = AI. Si le point J est à l'intérieur du triangle BFO,

(*) Le lecteur est prié de faire la figure. Cette démonstration nous a été communiquée par M. De Tilly.

soit L le milieu de BJ, LM = AL. Si le point M est à l'intérieur du triangle BJO, faisons encore une construction analogue sur le triangle ABM et continuons de même indéfiniment.

La somme des angles dans les triangles successifs ABC, ABF, ABJ, ABM, ... est toujours la même, comme il est facile de le voir. Bien entendu, on prend pour l'angle en B des triangles ABF, ABJ, ABM, les sommes

$$ABE + EBF, \quad ABI + IBJ, \quad ABL + LBM, \quad \ldots$$

Si l'un de ces angles B, toujours de plus en plus grands, est obtus ou égal à deux droits, autrement dit, si l'un des points I, L, etc. se trouve en dehors du triangle BCO, le théorème est démontré ; car évidemment cet angle en B, avec les deux autres angles du triangle considéré a une somme supérieure à deux droits.

Or l'un des points I, L, etc. est nécessairement en dehors de BCO. En effet, soit D le milieu de AC ; joignons D, E par un arc de grand cercle. Le triangle CDE est égal au triangle BEI. Par suite, angle CED = angle IEB, EI = DE et en est le prolongement. On démontre de même que IL = EI et que L est aussi sur l'arc de grand cercle DEI. Cet arc de cercle DEI coupe ACO, au-delà de O, en un point P, situé au-delà de O, à une distance OP = AD. Par suite, en portant sur cet arc DEI, indéfiniment des arcs EI, IL, etc. égaux à DE, l'un au moins des points I, L, se trouvera sur l'arc DE, à l'extérieur du triangle BCO (*). Le théorème est donc démontré.

***

On peut déduire, de ce qui précède, la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique et vérifier ainsi l'exactitude d'une assertion célèbre de Lagrange, savoir que cette formule est indépendante du postulatum d'Euclide. Pour cela, on peut imiter les procédés de démonstration de M. Gérard, dans un excellent article publié en février 1893, dans les N. A. M., pp. 74-84, *Sur la géométrie non euclidienne* (de Lobatchefsky). On prouve comme lui que, dans un quadrilatère ABCD, trirectangle en A, B, C et où AB tend vers 0, le rapport (CD : AB) a une limite $\varphi(AC)$ qui ne dépend que de AC ; de plus,

$$\varphi(AC) < (CD : AB) < \varphi(BD),$$

(*) On observera que DE étant inférieur à DEP, est toujours plus petit qu'une demi-circonférence.

et la fonction φ, qui ne surpasse jamais l'unité, vérifie les relations

$$\varphi(x+y)+\varphi(x-y) \leqq 2\varphi x \varphi y, \tag{1}$$

$$\frac{\varphi(x+y)}{\varphi y}+\frac{\varphi(x-y-\alpha)}{\varphi(y+\alpha)} \geqq 2\varphi x, \tag{2}$$

où α est aussi petit qu'on le veut. On en déduit que $\varphi x = x \cos(x : k)$, k étant une constante, après avoir prouvé que la fonction φ est continue (*).

***

La géométrie non euclidienne de Riemann dans le plan étant identique à la géométrie euclidienne de la sphère, on voit, par ce qui précède, qu'elle peut être établie d'une manière élémentaire, sans faire intervenir la théorie des coniques, celle de la courbure des surfaces ou celle des groupes.

La construction employée dans la démonstration donnée plus haut est empruntée à Euclide (*Éléments*, I, 16). En rendant rigoureuse la démonstration donnée par Legendre (*Éléments de Géométrie*, I, 19, 12e édition), on peut aussi déduire de cette même construction à la fois le principe fondamental de la géométrie lobatchefskienne et celui de la géométrie euclidienne.

Les trois géométries peuvent donc être établies d'une manière simple à partir des *Éléments* d'Euclide. Dans toutes trois, on admet le premier des trois postulats d'Euclide : tous les angles droits sont égaux. Dans la géométrie de Lobatchefsky, et dans celle d'Euclide, on en admet un second, savoir que deux droites ne peuvent contenir un espace ; dans la géométrie euclidienne, un troisième, savoir que deux droites qui en rencontrent une autre en faisant avec celle-ci des angles dont la somme est inférieure à deux droits se coupent du côté où se trouvent ces angles.

Pour comprendre la nécessité de ces postulats, on doit interpréter les définitions euclidiennes de la droite et du plan dans le sens qui leur a été attribué par Cauchy et développé par M. De Tilly. La notion de distance

---

(*) Pour établir ce théorème sur la continuité de φ, on considère un triangle OAa birectangle en A et a. Soient B, C, D des points situés entre A et O sur OA, tels que BC = CD, OB > OD; soient ensuite Bb, Cc, Dd des perpendiculaires à AO rencontrant aO en b, c, d. De b et d abaissons bm, dn perpendiculaires sur Cc. On prouve aisément que l'on a $(cm : cb) < (cn : cd) < (cC : Oc)$, relations d'où l'on déduit $\varphi(AB) - \varphi(AD) < (BD : 2OC)$.

étant regardée comme une notion première irréductible, un point M est dit appartenir à une droite AB (ou à un plan ABC) si aucun point de l'espace n'est distant de A et B (ou de A, B et C), comme l'est M. La géométrie idéale, ou métagéométrie, comprend la géométrie euclidienne, la géométrie lobatchefskienne et la géométrie riemannienne, qui sont les seules géométries possibles, d'après les considérations précédentes. Chaque système de géométrie est en réalité une *physique mathématique des distances*. (P. M.)

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×**14.** *La formule de Nicolas de Cusa.* — Il a été fait ici à diverses reprises (IX, X, XII) une étude ou une discussion de la formule trigonométrique

$$\varphi = \frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi}$$

attribuée à Ozanam (IX, 161-164, 181-182, 265-267), puis à Snell, (X, 34-36), enfin à N. de Cusa [(2) II, 230-231].

Il convient de signaler un important mémoire paru en 1875 dans le t. 72 des *Sitzungsberichte* de l'Académie des Sciences de Vienne, dû à M. A. Winckler, sur les déterminations approchées (623-666), dans lequel se trouvent étudiées les formules $x = \sin x \sqrt[3]{\text{séc } x}$, de Maskelyne ; $x = \sin x \text{ séc } \frac{x}{\sqrt{3}}$, et notamment $x = \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$, attribuée, dit l'auteur, au Cardinal de Cusa.

Le degré d'approximation obtenu par l'emploi de ces formules et de plusieurs autres mériterait, croyons-nous, d'être discuté. (H. Brocard.)

×**15.** *Sur le cercle des neuf points.* Si une circonférence rencontre les côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC respectivement aux points A_1 et A_2, B_1 et B_2, C_1 et C_2, on a les égalités :

$$BA_1 . BA_2 = BC_1 . BC_2, \quad CA_1 . CA_2 = CB_1 . CB_2, \quad AB_1 . AB_2 = AC_1 . AC_2.$$

Réciproquement, si ces trois relations sont vérifiées, les six points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont sur une même circonférence. Car, supposons les circonférences $A_1A_2C_1C_2$, $A_1A_2B_1B_2$ différentes; le point A serait d'égale puissance par rapport à deux cercles sans être situé sur la corde commune.

De la réciproque, on déduit aisément, ainsi que l'a fait M. Sharp, que les milieux A_1, B_1, C_1 des côtés d'un triangle, les pieds A_2, B_2, C_2 des trois hauteurs et les milieux A_3, B_3, C_3 des segments AH, BH, CH des hauteurs (H est l'orthocentre) sont sur une même circonférence. En effet, 1° la circonférence décrite sur BC comme diamètre passe par B_2, C_2; donc $AC_2 . AB = AB_2 . AC$, et aussi $AC_2 . AC_1 = AB_2 . AB_1$ et par analogie

$$BC_1 . BC_2 = BA_1 . BA_2, \quad CA_1 . CA_2 = CB_1 . CB_2.$$

Donc les six points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 sont sur une même circonférence ω; et 2° la circonférence ω passe par les pieds des hauteurs du triangle HBC; par suite, elle passe aussi par les milieux A_3, B_3, C_3 des côtés.

La même démonstration peut être appliquée aux cercles de Lemoine, de Tucker, de Taylor. (J. N.)

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES SE RATTACHANT A LA THÉORIE DES TRANSFORMATIONS(*);

par M. Verbessem, Docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur au Collège de Nivelles.

1. Soient A, B deux points fixes d'une conique donnée σ, M un point variable de cette courbe; les droites AM, BM sont des rayons correspondants de deux faisceaux projectifs, que nous convenons de désigner par (A), (B).

Supposons le faisceau (B) fixe et faisons tourner le faisceau (A) autour

---

(*) L'abondance des matières a retardé, à notre grand regret, la publication de cet intéressant article, qui nous a été remis il y a plus d'un an.

On connaît la génération des coniques, due à Newton: Les rayons homologues de deux faisceaux (A) et (B) se coupent sur une droite d; si ces faisceaux tournent autour de leur sommet, le premier de l'angle α, le second de l'angle β, les rayons homologues se couperont sur une conique. Steiner s'en est servi pour engendrer des faisceaux et des réseaux de coniques (Voir, *Steiner-Schröter*, ch. III); le grand géomètre appelait plaisamment cette méthode, la *machine à vapeur*.

La transformation dans laquelle la distance de deux points homologues M, M' est vue de deux points fixes A, B sous des angles constants $MAM' = \alpha$, $MBM' = \beta$ a été étudiée par M. d'Ocagne et par nous (Voir, *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, (2) t. XVI) Elle comprend comme cas particulier celle que M. Verbessem a étudiée dans le présent article; il suffit de supposer l'un des angles α, β nul. J N.)

de A d'un angle α; appelons (A_α) ce faisceau dans sa nouvelle position. Les éléments homologues de (A_α) et (B) se couperont sur une nouvelle conique σ_α passant par A et B.

Représentons par t_a, t_b les tangentes menées à σ en A et B, et par d la droite AB; on sait que t_a et d, d et t_b sont des éléments correspondants des faisceaux (A) et (B). Il résulte de là que la tangente t_a' à σ_α en A s'obtient en faisant tourner t_a de l'angle α autour de A; de même, si AB_1 est la corde de σ qui fait avec AB l'angle $(-\alpha)$ (*), la droite BB_1, que nous désignons par t_b', touchera σ_α en B.

Les faisceaux (A), (A_α) ont pour rayons doubles les droites isotropes menées par A; soient I, I′ les points imaginaires où ces droites rencontrent σ. Les points I, I′ appartiennent à σ_α; car les rayons AI et BI, AI′ et BI′ se correspondent aussi bien dans les faisceaux (A) et (B) que dans les faisceaux (A_α) et (B). On voit que toutes les coniques σ_α obtenues en faisant varier l'angle α forment un faisceau (ABII′), ayant pour points fondamentaux A, B, I, I′. Lorsque le point B se déplace sur σ, les courbes σ_α passent toujours par trois points fixes A, I, I′: elles forment un réseau (AII′).

2. Le système des droites $AB \equiv d$, $II' \equiv \Delta$ constitue une conique σ_0 du faisceau (ABII′). Pour obtenir Δ, il faut faire tourner le faisceau (A) de manière qu'il devienne perspectif avec le faisceau (B), ou que le rayon AB devienne son propre homologue. Comme t_a et d étaient des rayons homologues, il faut prendre pour α l'angle (t_a, d); nous désignons cet angle par θ, et le faisceau (A) tourné de l'angle θ par (A_0).

Soient T_a la symétrique de t_a par rapport à d, P le point où elle rencontre t_b; ce point, qui joue un grand rôle dans la suite, appartient à Δ, car AP et t_b sont des éléments correspondants de (A_0) et (B).

Si l'on considère le système des droites isotropes AI, AI′ comme un cercle de rayon nul, ayant avec σ les sécantes communes t_a et Δ, on conclut, d'une proposition connue, que t_a et Δ sont antiparallèles par rapport à un axe de symétrie de σ; donc Δ est parallèle à la corde de courbure de σ en A(**).

(*) AB_1 est la corde qu'on obtient en faisant tourner AB de l'angle α, mais dans le sens inverse de la rotation qui fait coïncider (A) avec (A_α).

(**) Nous appelons corde de courbure ou corde d'osculation la corde commune à une conique et au cercle osculateur en un point de cette courbe.

La droite Δ dépend uniquement du point A et de la conique σ ; il résulte de là le théorème suivant :

La symétrique T_a *de la tangente menée en un point donné* A *d'une conique* σ, *par rapport à une corde variable* AB *menée par ce point, rencontre la tangente* t_b *menée à la seconde extrémité* B *de cette corde en un point* P *qui a pour lieu géométrique une droite* Δ *parallèle à la corde de courbure au point* A.

Soit AC la corde de σ perpendiculaire AB ; AP étant aussi la symétrique de t_a par rapport à AC, la tangente en C, d'après le théorème précédent, doit rencontrer AP sur Δ, c'est-à-dire en P. Mais lorsque l'angle droit BAC tourne autour de A, ses côtés engendrent une involution orthogonale ; donc la corde BC passe par un point fixe Q *(point de Frégier)*, pôle de l'involution déterminée sur σ par les côtés de l'angle mobile. Par conséquent, Δ *est la polaire du point de Frégier relatif au point* A, ou la polaire de l'involution déterminée par les points B, C.

Soit AN la corde normale à σ en A ; comme elle correspond à t_a dans l'involution orthogonale engendrée par l'angle droit BAC, les tangentes en A et N se coupent sur Δ ; autrement dit, *la droite* Δ *passe par le pôle de la corde normale* AN.

3. Revenons à la transformation qui change σ en σ_α, et cherchons pour quelles valeurs de l'angle α la seconde courbe est une hyperbole, une parabole ou une ellipse.

Pour avoir une hyperbole, deux rayons homologues AM, BM des faisceaux (A), (B) doivent devenir parallèles lorsque le premier tourne de l'angle α autour de A. On en conclut que α doit être égal à l'angle AMB. Donc, si la circonférence du segment capable de l'angle α décrit sur AB rencontre σ en deux points réels J, J', la transformée σ_α est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux droites BJ, BJ'. Si cette circonférence, que nous désignerons par ω, touche σ en un point J, σ_α est une parabole dont les diamètres sont parallèles à la droite BJ. Enfin, on obtient une ellipse lorsque la circonférence ω n'a que deux points réels, A et B, communs avec σ.

Les droites AB, JJ' étant antiparallèles par rapport à un axe de σ, la corde JJ' se déplace parallèlement à elle-même quand l'angle α varie. Le faisceau (ABII') comprend donc deux paraboles réelles s'il existe deux tangentes réelles parallèles à la direction JJ'.

On trouve aisément l'hyperbole équilatère du faisceau (ABII') : la perpendiculaire élevée au milieu de la droite AB rencontre le diamètre conjugué avec la direction des cordes JJ' en un point par lequel on mène une corde J_1J_1' parallèle à cette direction ; les asymptotes sont parallèles aux droites BJ_1, BJ_1' et l'angle $\alpha = AJ_1B$. En particulier, si AB passe par le centre de σ, J_1J_1' est le diamètre de σ symétrique de AB par rapport à un axe, et $\alpha = \frac{\pi}{2}$. On a donc la théorème suivant :

Si l'on construit deux faisceaux de cordes supplémentaires aboutissant aux extrémités d'un même diamètre d'une conique, et que l'on fasse tourner l'un d'eux de 90° autour de son sommet, les rayons homologues se couperont sur une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la première conique.

4. Supposons que la courbe σ soit une hyperbole, et transformons-la en un système σ_0 de deux droites Δ et $d \equiv AB$. Soient t_a, t_b les tangentes menées aux points A, B, et α l'angle $(t_a\, d)$; si le faisceau (A) tourne de cet angle α, on obtient le faisceau (A_0) perspectif avec le faisceau (B). Nous appelons T_a la symétrique de t_a par rapport à d ; cette droite coupe t_b en un point P appartenant à Δ.

Menons par A et B les droites h_a, h_a', h_b, h_b' parallèles aux asymptotes de σ. Si l'on fait tourner h_a, h_a' de l'angle α, ces droites doivent couper h_b, h_b' en deux points J, J' de Δ ; les angles AJB, AJ'B sont donc égaux à α, et la circonférence du segment capable de α et décrit sur AB passe par J, J'. Cette circonférence, que nous désignerons par ω, est tangente à T_a en A et rencontre σ en un point D, extrémité d'une corde BD parallèle à Δ (*).

On peut se servir de ces propriétés pour déterminer la droite Δ, et par suite pour construire la courbe σ au moyen des faisceaux (A_0), (B) dont on fait tourner le premier d'un angle α, lorsqu'on donne la courbe σ par certains éléments. Par exemple, on peut construire une hyperbole dont

---

(*) La droite Δ étant indépendante du point B, on obtient des résultats remarquables en donnant à la corde AB des positions particulières Par exemple, si AB est la corde normale en A, P est le pôle de cette corde ; l'angle α étant droit, on voit que la perpendiculaire BX abaissée sur Δ et la perpendiculaire élevée en A sur AX se rencontrent sur la courbe σ ; la circonférence ABJJ' a maintenant pour diamètre la corde AB.

on connaît : 1° deux points A, B, la tangente t_a en A et la direction des asymptotes; 2° deux points A, B, les tangentes en ces points, et la direction d'une asymptote; 3° deux points A, B, les tangentes en ces points et l'angle des asymptotes, etc.

5. Lorsque l'hyperbole σ est équilatère, le cercle ABJJ' dont il a été question ci-dessus (**4**), a son centre au milieu de JJ'. De là le théorème suivant :

En un point quelconque A *d'une hyperbole équilatère* σ, *on trace la tangente* t_a *et la symétrique* T_a *de* t_a *par rapport à une corde arbitraire* AB; *soit* P *le point de rencontre de* T_a *avec la tangente* t_b *en* B. *On construit le cercle* ω *qui passe par* B *et touche* T'_a *en* A; *le diamètre de ce cercle mené par* P *est parallèle à la corde de courbure en* A, *et les droites qui joignent ses extrémités* J,J' *au point* B *sont parallèles aux asymptotes.*

6. Si l'on prend pour σ une parabole, la parallèle menée par P à la corde de courbure en A touche le cercle ω en un point J du diamètre passant par B.

AJ est la polaire de P par rapport au cercle ω; donc, si BP coupe ce cercle en un second point R, les droites AP, AJ, AB, AR forment un faisceau harmonique; par suite les points A, J, B, R constituent un groupe harmonique sur la circonférence, et sont projetés à partir de B par un faisceau harmonique. Ainsi, *les tangentes en* B *au cercle* ω *et à la parabole séparent harmoniquement la corde* BA *et le diamètre mené par* B.

Si AB est la corde normale en A, on retrouve ce théorème de M. d'Ocagne (*Nouvelles Annales*, 1892, p. 327) :

Si la normale en A *à une parabole rencontre la courbe en B, on a la direction de la tangente en* B *en prenant la conjuguée harmonique de la tangente en* A *par rapport à la normale et au diamètre passant en ce point.*

De même, *si* AB *est la corde de courbure en* A, *cette corde et le diamètre mené par* A *séparent harmoniquement les tangentes menées en* B *à la parabole et au cercle symétrique du cercle de courbure relativement à* AB.

7. Considérons deux coniques quelconques σ et σ' du faisceau (ABII'); si une sécante par B les rencontre aux points M, M', l'angle MAM' a une valeur constante α ; il est égal à celui des tangentes t_a, t'_a menées en A aux deux courbes. Désignons par t_m, t'_m les tangentes en M et M', par μ, μ' les points où ces tangentes rencontrent respectivement t_a, t'_a. Lorsque la droite BM tourne autour de B, les points μ, μ' décrivent

deux séries projectives avec le faisceau des droites BM; ces séries sont même perspectives parce que A en est un élément uni.

Je dis que *le centre de perspective* S *des séries* (μ), (μ') *est situé sur le support* Δ *des points* I, I'. En effet, soient AC, AC' les cordes normales aux deux courbes en A; leurs pôles γ, γ' se trouvent à l'intersection de Δ avec t_0 et t'_0; comme l'angle $CAC' = \gamma A\gamma' = \alpha$, les points C, C' sont deux points homologues de σ, σ'; donc γ, γ' sont deux points homologues des ponctuelles (μ), (μ') et la droite $\gamma\gamma'$ ou Δ passe par S.

3. Nous allons chercher la relation entre les courbures des courbes σ, σ' en deux points correspondants M, M'.

La tangente en M rencontrant t_0 en μ, nous posons

$$A\mu = x, \quad \mu M = t, \quad A\mu M = \theta, \quad \mu AM = \omega, \quad AM\mu = \varphi.$$

Soit N un point de σ infiniment voisin de M; la tangente en N rencontre $A\mu$ en ν, μM en Q. Si s et ρ désignent l'arc de σ terminé en M et le rayon de courbure, les triangles infinitésimaux AMN, $Q\mu\nu$ donnent

$$\frac{ds}{d\omega} = \frac{AM}{\sin\varphi}, \quad \frac{dx}{d\theta} = \frac{t}{\sin\theta},$$

d'où, par multiplication,

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{d\omega}{dx} \cdot \frac{AM}{\sin\theta} \cdot \frac{t}{\sin\varphi}. \tag{1}$$

Mais $d\theta$ est l'angle de contingence en M, et

$$\frac{AM}{\sin\theta} = \frac{t}{\sin\omega} = \frac{x}{\sin\varphi}, \quad \rho = \frac{ds}{d\theta};$$

donc l'égalité (1) prend la forme

$$\rho = \frac{d\omega}{dx} \cdot \frac{x^2 \sin\omega}{\sin^3\varphi}. \tag{2}$$

La courbe σ' donne de même, en observant que $\mu' AM' = \mu AM = \omega$, et en appelant ρ', x', φ' le rayon de courbure en M', la distance $A\mu'$ et l'angle $AM'\mu'$:

$$\rho' = \frac{d\omega}{dx'} \cdot \frac{x'^2 \sin\omega}{\sin^3\varphi'}. \tag{3}$$

Des égalités (2) et (3) on déduit

$$\frac{\rho \sin^3\varphi}{\rho' \sin^3\varphi'} = \frac{dx'}{dx} \cdot \frac{x^2}{x'^2}. \tag{4}$$

Comme les points μ, μ' décrivent deux ponctuelles perspectives, on a une équation de la forme

$$xx' + ax + a'x' = 0, \quad \text{ou} \quad x' = -\frac{ax}{x + a'};$$

par conséquent

$$dx' = -\frac{aa'dx}{(x+a')^2} = -\frac{a'}{a}\frac{x'^2}{x^2}dx,$$

ce qui ramène l'équation (4) à

$$\frac{\rho \sin^5 \varphi}{\rho' \sin^5 \varphi'} = -\frac{a'}{a}.$$

CONCOURS DE 1894 (FRANCE).

École militaire spéciale (7 juin, de 7 h. 1/2 à 10 h. 1/2).

1. On inscrit un cylindre dans une sphère donnée ; étudier la variation du volume solide formé par ce cylindre surmonté, à l'une de ses bases, par l'hémisphère du même rayon que cette base.

Si $2x$, $2y$ représentent le diamètre et la hauteur du cylindre, on a

$$V = \frac{2}{3}\pi x^2 (3y + x), \quad x^2 + y^2 = R^2;$$

pour les valeurs extrêmes $(x = 0, y = R)$, $(x = R, y = 0)$, on a respectivement $V = 0$, $V = \frac{2}{3}\pi R^3$. Si l'on fait $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, la dérivée $\frac{dV}{d\varphi}$ s'annule pour $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}$, qui correspond à un maximum.

2. On donne une circonférence O et la droite TAT' tangente en A à cette circonférence. On considère une seconde tangente qui rencontre la première en C et qui touche la circonférence en B. La première circonférence étant fixe et la seconde variable, on demande :

1° Le lieu géométrique du centre I du cercle inscrit au triangle ABC; 2° le lieu du centre o du cercle circonscrit; 3° le lieu du point de concours H des hauteurs; 4° le lieu du point de rencontre D du rayon OB avec la perpendiculaire en C à la tangente TAT'.

1° Les bissectrices des angles ABC, BAC se coupent au milieu de l'arc AB du cercle O. 2° o est au milieu de OC; 3° OBHB est un parallélogramme, donc AH = R. 4° Les angles DOC, DCO étant égaux, on a OD = CD; donc le lieu de D est une parabole ayant pour foyer O, pour directrice AC.

École navale.

OX et OY étant deux axes rectangulaires, on décrit du centre O une circonférence de rayon a, qui coupe l'axe des x en A et A'.

Soient B un point situé sur OX, OB $= b$, et un point M variable sur la circonférence. On considère la parabole circonscrite au triangle MAB et dont l'axe est parallèle à A'M.

Démontrer géométriquement que l'axe de cette parabole est la droite OP menée par O parallèlement à A'M.

Équation de cette parabole en prenant pour paramètre variable l'angle POX $= \varphi$. Lieu de son second point d'intersection Q avec le rayon OM.

Déterminer les distances de Q au sommet S et au foyer F. En conclure en coordonnées polaires les lieux de S et F.

OP passe par le milieu de la corde AM de la parabole. — Si l'on fait OS $= \delta$, l'axe et la tangente en S ont pour équations

$$y\cos\varphi - x\sin\varphi = 0, \quad y\sin\varphi + x\cos\varphi - \delta = 0,$$

et l'équation classique $y^2 = 2px$ se traduit par

$$(y\cos\varphi - x\sin\varphi)^2 = 2p(y\sin\varphi + x\cos\varphi - \delta).$$

L'équation

$$x^2\sin^2\varphi - 2px\cos\varphi + 2p\delta = 0$$

doit avoir pour racines a et b; donc

$$a + b = \frac{2p\cos\varphi}{\sin^2\varphi}, \quad ab = 2p\delta,$$

d'où p et δ :

$$p = \frac{(a+b)\sin^2\varphi}{2\cos\varphi}, \quad \delta = \frac{ab}{a+b}\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

La dernière égalité représente le lieu de S (parabole); pour le foyer, OF $= \delta - \frac{p}{2}$.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

Lezioni di Analisi infinitesimale del Prof. G. Peano. Torino, Candeletti 1893, (2 vol. in 8° de 319 et 324 p. in 8°). Prix 10 francs.

Sommaire : 1. *Dérivées* (Définition; interprétation géométrique; règles de dérivation pour les fonctions élémentaires; théorème de Rolle; vraies valeurs; applications géométriques : tangente, sous-tangente, etc., en coordonnées rectilignes ou polaires; 85 exercices classés).

2. *Dérivées successives* (Recherche de ces dérivées; formules de Taylor, de Newton, de Wronski; concavité, convexité des courbes; asymptotes; théorie du contact, cercle osculateur; 68 exercices).

3. *Intégrales* (Notion de l'intégrale dans les cas où la fonction et les limites sont finies ou non; règles élémentaires; applications géométriques aux aires planes, aux longueurs des lignes planes, aux volumes).

4. *Méthodes d'intégration* (Fractions rationnelles; fonctions irrationnelles; différentielles binômes; fonctions transcendantes; intégration approchée; formules des trapèzes, de Simpson, de Gauss, avec l'expression du reste; 145 exercices).

5. *Séries* (Notion de limite; convergence des séries; développement en série; séries à termes variables; produits infinis; 17 exercices).

6. *Nombres complexes* (Vecteurs; imaginaires; formes géométriques; système de complexes; limite et séries dans le cas de complexes; exponentielles imaginaires).

7. *Dérivation et intégration des complexes* (Tangente; différentielle de l'arc; formule de Taylor; plan osculateur; courbure; cercle osculateur, sphère osculatrice; intégration).

8. *Fonctions de plusieurs variables* (Dérivées partielles; fonctions implicites; fonctions homogènes; maxima et minima; plan tangent à une surface; paramètres différentiels; plan tangent; enveloppes; courbure des lignes tracées sur la surface; intégrales multiples, formules pour les aires).

9. *Équations différentielles* (Séparation des variables; équations homogènes; équations linéraires; autres équations; applications géométriques; équations différentielles simultanées; variations).

Le livre de M. Peano est écrit pour les élèves qui doivent s'initier rapidement aux principes de l'analyse et aux principales applications de cette science à la géométrie; mais il sera extrêmement utile aussi aux professeurs de mathématiques spéciales : il est clair et rigoureux (*) et contient un grand nombre d'exercices ou d'exemples simples et bien choisis. De plus, on y trouve un assez bon nombre de recherches originales de M. Peano, par exemple, sur le théorème de Taylor et sur la recherche des valeurs approchées des aires. Il faut aussi remarquer qu'aucun autre manuel d'analyse ne renferme un exposé élémentaire du calcul géométrique comparable à celui de Peano.

Beaucoup des théorèmes donnés dans les *Lezioni*, après avoir été énoncés dans le langage habituel des analystes, sont transcrits au moyen des symboles de la logique mathématique dont M. Peano est l'un des promoteurs et dont il a paru un spécimen dans *Mathesis* (1890, X, pp. 73-74). (P. M.)

Cours d'analyse de l'École Polytechnique, par M. C. JORDAN, membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique. Deuxième édition, entièrement refondue. Tome premier. Calcul différentiel. Tome deuxième. Calcul intégral.

(*) Une petite critique : au début du livre, l'auteur indique le sens vague que les infinicoles ont attribué à dy et dx dans la relation $dy = y'dx$. Nous craignons que ce passage n'induise en erreur les élèves inattentifs. N'aurait-il pas été préférable de remarquer, dès l'abord, que cette relation (où dx est quelconque, même indéfiniment croissant si l'on veut, ou imaginaire) est simplement la définition de dy.

Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1893, 1894 (2 vol. in-8° de XVIII-612 et XVIII-627 pages) (*). Prix : 17 + 17 francs.

SOMMAIRE. — *Première partie.* — Calcul différentiel. — I. *Variables réelles.* 1. Limites. 2. Ensembles. 3. Fonctions bornées; fonctions intégrables. 4. Fonctions continues. 5. Fonctions à variation bornée. 6. Dérivées et intégrales des fonctions d'une variable. 7. Dérivées partielles. Différentielles totales. 8. Lignes continues; lignes rectifiables. 9. Fonctions élémentaires 10. Dérivées et différentielles d'ordre supérieur. 11-12. Changement de variables dans les expressions différentielles et dans les intégrales définies. 13. Formation des équations différentielles.

II. *Variables complexes* 1. Fonctions synectiques. 2. Intégration des fonctions synectiques. 3. Fonctions rationnelles. 4. Fonctions algébriques. 5. Transcendantes élementaires.

III. *Séries.* 1. Formule de Taylor. 2. Procédés pour effectuer les développements en série. 3. Séries et produits infinis à termes numériques. 4. Séries de fonctions. 5. Séries de puissances. 6. Applications (série hypergéométrique; fonction gamma). 7. Fractions continues. 8. Maxima et minima.

IV. *Applications géométriques de la formule de Taylor.* 1. Points ordinaires et points singuliers. 2. Théorie du contact. 3. Enveloppes. 4. Courbes planes. 5. Géométrie infinitésimale. 6. Courbes gauches et surfaces développables. 7. Systèmes de droites. 8. Surfaces 9. Coordonnées curvilignes.

V. *Courbes planes algébriques.* 1. Coordonnées homogènes. 2. Cycles. 3. Transformations birationnelles du plan. 4. Transformations birationnelles d'une courbe.

Seconde partie. — Calcul intégral. — I. *Intégrales indéfinies.* 1. Fonctions rationnelles. 2. Différentielles algébriques (intégrales elliptiques et hyperelliptiques). 3. Fonctions transcendantes.

II. *Intégrales définies.* 1. Intégrales définies généralisées. 2. Intégrales multiples. 3. Calcul des intégrales définies (transcendance de e et de π, calcul approximatif des séries). 4. Applications géométriques.

III. *Des fonctions représentées par des intégrales définies.* 1. Dérivation. 2. Intégrales eulériennes. 3. Potentiel.

IV. *Séries de Fourier.* 1. Intégrales de Fourier. 2. Série trigonométrique. 3. Fonctions de Laplace.

V. *Intégrales complexes.* 1. Intégrales des fonctions monodromes. 2. Intégrale de Cauchy. 3. Théorèmes généraux sur les fonctions monodromes.

VI. *Fonctions elliptiques.* 1. Des périodes. 2. Théorèmes généraux sur les fonctions elliptiques. 3-4. Les fonctions pu, ζu, σu, etc. 5. Les fonctions thêta. 6. Les fonctions périodiques de deuxième et de troisième espèce. 7. Dérivées par rapport aux paramètres. 8. Division. 9. Transformation. 10. Intégration des différentielles abéliennes de genre un.

VII. *Intégrales abéliennes.* 1. Surfaces de Riemann. 2. Intégrales abéliennes. Periodicité. 3. Réduction des intégrales abéliennes. 4. Inversion.

(*) La seconde édition du tome III (Equations différentielles) n'a pas encore paru.

La seconde édition du *Cours* de M. Jordan dont nous venons de transcrire la table des matières des deux premiers volumes est le meilleur traité méthodique d'analyse qui existe maintenant en France. Sa place est marquée dans la bibliothèque de tous ceux qui ont à cœur de se tenir au courant des progrès les plus récents dans les méthodes d'exposition de cette partie des mathématiques. Il s'adresse à ceux qui connaissent déjà le calcul différentiel et le calcul intégral, mais il n'en contient pas moins une exposition complète depuis la notion de nombre irrationnel jusqu'à la théorie de l'inversion des abéliennes.

Voici d'après la préface de l'auteur quelles sont les principales modifications qu'il a fait subir à son livre dans cette seconde édition. Dans la première, M. Jordan avait glissé un peu rapidement sur les premiers principes de l'analyse. Dans l'édition actuelle, il les expose avec toute la généralité possible, dût-il en résulter quelques complications(*), il introduit, dès le début, les notions de limite de somme simple ou double et les variables complexes. Le chapitre sur les courbes planes algébriques a été complètement remanié et l'auteur y a introduit les résultats principaux des recherches de Cremona, Halphen et Nöther. La théorie des fonctions elliptiques a été refaite aussi et considérablement étendue; elle est exposée au moyen des notations de Weierstrass. Un chapitre nouveau contient un exposé de la théorie des fonctions abéliennes d'après Riemann, Picard, etc.

Malgré tous les efforts de l'auteur « certains points, dit-il, présentent encore quelque obscurité. Pour en citer un exemple, nous n'avons pu arriver à définir d'une manière satisfaisante l'aire d'une surface gauche que dans le cas où la surface a un plan tangent, variant suivant une loi continue ». Cette citation montre avec quelle conscience M. Jordan a écrit son livre et combien il a été exigeant pour lui-même, au point de vue de la rigueur. (P. M.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 790.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 240).

Si x est un nombre inférieur à l'unité et si P, Q désignent les produits indéfinis

$$(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)\ldots,$$
$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\ldots,$$

1° *le produit* PQ *égale* 1; 2° *le produit indéfini* P, *dont tous les facteurs*

(*) En quelques endroits, il nous semble que l'on pourrait simplifier quelque peu l'exposition de l'auteur, sans rien lui faire perdre de sa rigueur, par exemple, dans la question de l'approximation des intégrales définies et dans celle de l'évaluation des surfaces courbes en s'aidant des travaux de M. Peano.

sont moindres que 1, a une limite positive; 3° ***le produit*** Q, ***dont tous les facteurs surpassent l'unité, a une limite.*** (E. CATALAN.)

Solution par M. E. CESÁRO. La convergence des produits P et Q résulte immédiatement, d'après un théorème connu(*), de la convergence des séries

$$x^2 + x^6 + x^{10} + \cdots \quad \text{et} \quad x^3 + x^4 + x^6 + \cdots$$

Du reste, on voit directement que les produits P et Q ne peuvent tendre vers zéro et l'infini, respectivement, parce que

$$P > 1 - (x + x^3 + x^5 + \cdots) = 1 - \frac{x}{1 - x^2},$$

$$Q < e^{x + x^2 + x^3 + \cdots} = e^{\frac{x}{1-x}}.$$

Il reste à démontrer que $PQ = 1$. Remarquons d'abord que, si l'on prend le logarithme de P, on obtient une suite de développements en série tels que

$$\log(1 - x^p) = -\frac{x^p}{1} - \frac{x^{2p}}{2} - \frac{x^{3p}}{3} - \cdots,$$

où p est impair. Ce développement renferme x^n s'il existe un nombre entier q, tel que $n = pq$, et le coefficient de x^n est alors $-\frac{1}{q}$. Donc le coefficient de x^n dans log P est $-\sigma_n$, en représentant par σ_n la ***somme des inverses des diviseurs conjugués des diviseurs impairs de n.*** Ainsi

$$P = e^{-\sigma_1 x - \sigma_2 x^2 - \sigma_3 x^3 - \cdots}$$

Cherchons Q. Le coefficient de x^n dans

$$\log(1 + x^p) = \frac{x^p}{1} - \frac{x^{2p}}{2} + \frac{x^{3p}}{3} - \cdots,$$

où p est un nombre entier quelconque, est $\frac{(-1)^{q-1}}{q}$ s'il existe un nombre q, tel que $n = pq$. En faisant la somme de tous les coefficients analogues on obtient le coefficient de x^n dans log Q. La partie de cette somme, qui est relative aux diviseurs impairs, n'est autre que $2^\nu \sigma_n$, si 2^ν est la plus haute puissance de 2 qui divise n. En effet, les conjugués des diviseurs impairs de n ne sont autres, abstraction faite de l'ordre, que ces mêmes diviseurs, multipliés par 2^ν. La partie de la somme considérée, qui est relative aux

(*) Voyez, par exemple, JORDAN, *Cours d'analyse* (1re éd., t. I, p. 123).

diviseurs pairs, est négative, et elle se partage en plusieurs autres, suivant que l'on considère les diviseurs qui renferment un seul facteur 2, ou bien ceux qui en renferment deux, ou trois, etc. En général, les diviseurs qui renferment le facteur 2^r ne sont autres que les diviseurs impairs, multipliés par 2^r. Donc le coefficient de x^n dans log Q est

$$(2^\nu - 2^{\nu-1} - 2^{\nu-2} - \dots - 1)\,\sigma_n = \sigma_n.$$

Enfin

$$Q = e^{\sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \sigma_3 x^3 + \cdots} = \frac{1}{P}.$$

Solutien partielle par M. DELVILLE.

Question 817.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 56).

Discuter le lieu de l'équation

$$(x - a)\,y^2 = (y - b)\,x^2.$$

Solution par M. MOREL (Creusot). Supposons d'abord $a > 0$, $b > 0$, $a > b$.

La courbe passe par l'origine O et par le point A (a, b). O est un point double où les tangentes sont $\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$; A est un point simple où la courbe a pour tangente $\frac{y-b}{x-a} = \frac{b^2}{a^2}$. Une première asymptote a pour équation $y = b$; une seconde, $x = a$. Une troisième asymptote représentée par $y + b = x + a$, passe par le symétrique de A par rapport à O et est parallèle à la première bissectrice.

La courbe est une cubique unicursale. Si l'on pose $y = tx$, on trouve pour ses équations paramétriques

$$x = \frac{at^2 - b}{t(t-1)}, \quad y = \frac{at^2 - b}{t - 1},$$

et l'on peut former le tableau suivant où l'on désigne par 1 ± 0 la limite des valeurs de t supérieures ou inférieures à l'unité :

$t = -\infty$,	$-\sqrt{\frac{b}{a}}$,	0,	$\frac{b}{a}$,	$+\sqrt{\frac{b}{a}}$,	1 ± 0,	$+\infty$;	
$x =$ a,	0,	$\mp\infty$,	a,	0,	$\pm\infty$,	a;	
$y = -\infty$,	0,	b,	b,	0,	$\pm\infty$,	$+\infty$.	

Ces valeurs suffisent pour reconnaître les allures de la courbe (fig. 1).

On passe au cas de $a > 0$, $b > 0$, $a < b$ en intervertissant les noms des axes, et à celui de $a < 0$, $b < a$ en prenant la symétrique de la figure précédente par rapport à l'origine.

Fig. 1.

Supposons ensuite $a > 0$, $b < 0$. L'origine est maintenant un point double isolé, et l'on a le tableau suivant en mettant le signe de b en évidence,

$$\begin{array}{llllll} t = -\infty, & -\dfrac{b}{a}, & 0, & 1 \pm 0, & +\infty, \\ x = \quad a, & a, +\infty, & \pm\infty, & a, & \\ y = -\infty, & -b, -b, & \pm\infty, & +\infty. & \end{array}$$

La courbe a maintenant la forme indiquée dans la figure 2. Si l'on résout l'équation proposée par rapport à y ou à x, on trouve

$$y = \frac{x^2 \pm x\sqrt{x^2 - 4bx + 4ab}}{2(x-a)},$$

$$x = \frac{y^2 \pm y\sqrt{y^2 - 4ay + 4ab}}{2(y-b)}.$$

Fig. 2.

Les radicaux s'annulent respectivement pour

$$\begin{cases} x = 2b \pm 2\sqrt{b(b-a)}, \\ y = 2b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2a \pm 2\sqrt{a(a-b)}, \\ x = 2a. \end{cases}$$

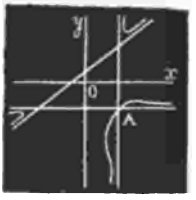


Fig. 3.

On en déduit, dans la figure (1), un point à ordonnée maximum et un point à ordonnée minimum correspondant à $x = 2a$; la figure (2) présente pour $y = 2b$ un point maximum et un point minimum relativement à l'axe $0y$.

Question 849.

(Voir *Mathesis* (2), t. III. p. 152).

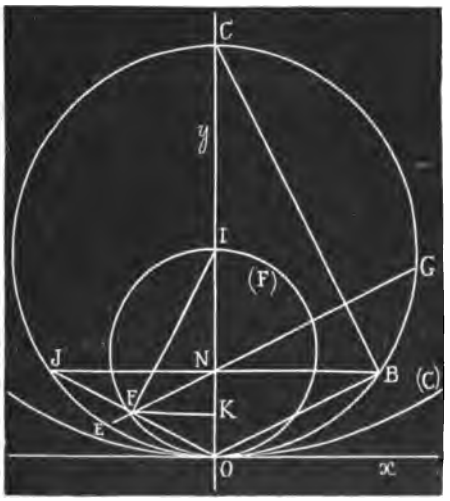
On considère en un point donné d'une circonférence donnée, les paraboles osculatrices à cette circonférence. Montrer que : 1° *le lieu des foyers des paraboles est un cercle;* 2° *le lieu des projections du point donné*

sur l'axe des paraboles est une quartique, courbe fermée dont l'aire totale est le $\frac{1}{32}$ de l'aire du cercle donné. (E. N. Barisien.)

Solution par M. H. Brocard. Cette question n'est pas entièrement nouvelle. En 1863, nous avons reçu communication de la solution d'un problème ainsi énoncé :

On donne une conique et un point O *situé sur cette conique. On construit une série de paraboles ayant en* O *un contact du second ordre avec la conique donnée; on demande :* 1° *le lieu des foyers de ces paraboles :* 2° *la courbe enveloppe de leurs axes.*

Si l'on observe que ces conditions reviennent à remplacer la conique par un cercle fixe, osculateur et de rayon déterminé, la solution analytique qui a été donnée de cette question fait reconnaître que le lieu (F) des foyers est une circonférence tangente en O au cercle (C) de courbure et de rayon quatre fois plus petit.



Quant à l'enveloppe, son équation est assez compliquée, et ne montre pas directement que cette courbe (H) n'est autre qu'une hypocycloïde triangulaire, triplement tangente au cercle (F). O est un sommet et O*y* un axe de symétrie.

La podaire du sommet O, c'est-à-dire la courbe du 2° de la question 849 est donc un *folium double*, et toutes les propositions ci-dessus énoncées se déduisent très simplement de l'étude du *Trifolium*, parue au J. M. S. en 1891 et donnée en *supplément à Mathesis* en 1892.

Nous y renverrons donc le lecteur, en indiquant à la fois les pages du J. M. S. et du supplément, désigné pour abréger par N.

Cette hypocycloïde et le cercle précité se rencontrent dans les questions 898 des N. A. M. et 203 de la N. C. M, et avec plus de généralité dans la question 868 des N. A. M (voir Laisant, *Recueil*, t. IV, n^{os} 1003, 1004, 1010. Voir aussi *Bulletin de la Société math. de France*, I, 1873, 224, et V, 1877, 18). On les retrouve, également, dans les *Exercices*

de Koehler, 1886, t. I, p. 302. Ces différentes indications justifieront, croyons-nous, l'intérêt d'une solution géométrique.

Soient P une parabole de sommet S, F son foyer, FN l'axe, O un point de la courbe, ON la normale.

On sait que le *centre* C *de courbure* s'obtiendra en menant NB perpendiculaire à ON jusqu'à sa rencontre B avec la parallèle à l'axe menée par O, puis achevant le triangle OBC rectangle en B.

Mais, par hypothèse, O est fixe et OC constant pour toutes les paraboles P. Soit donc une circonférence fixe de diamètre donné OC; il suffira de prendre sur cette courbe un point B, projeté en N sur CO et de mener par N la droite ENG parallèle à OB et rencontrant la circonférence en deux points E, G. La droite EG représente l'*axe d'une des paraboles*.

Menons OF; la normale ON en O sera bissectrice de l'angle FOB formé par le rayon vecteur OF et la parallèle OB à l'axe FN.

Donc, si l'on mène la corde BNJ, le foyer F sera à l'intersection de ENG avec OJ.

Mais FN parallèle à OB rencontre OJ en son milieu F. Si donc I est le centre du cercle EOBC, le *lieu des foyers* F sera évidemment la *circonférence* décrite sur OI comme diamètre, *ayant* par conséquent *pour rayon le quart du rayon* OC *de courbure*.

Cela posé, le triangle NFO est isoscèle; autrement dit, si l'on projette F en K sur OI, et que l'on prenne KN = OK, l'*enveloppe des axes* FN est une *hypocycloïde triangulaire* tritangente au cercle OIF et admettant O pour un de ses sommets, OC pour axe et un rebroussement au point C (J. M. S., *loc. cit.* 1891, 57; N. 14).

Si l'on pose IO = a, et l'angle BOx = θ, on aura, pour déterminer la podaire, les équations

$$y = x \operatorname{tang} \theta + 2a \sin^2 \theta, \quad y = -x \operatorname{cotg} \theta,$$

et en éliminant θ,

$$(x^2 + y^2)^2 = 2ayx^2,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$\rho = 2a \sin \omega \cos^2 \omega.$$

Ainsi, *la podaire de l'enveloppe des axes des paraboles est un folium double* (J. M. S. *loc. cit.* 1891, 109; N. 30). Cette courbe, du 4e degré, fermée, se compose de deux folioles égales.

L'aire totale a pour expression

$$A = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\omega\cos^4\omega\,d\omega = 4a^2\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\omega\,d\omega - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6\omega\,d\omega\right].$$

Mais, par une formule connue,

$$2^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\omega\,d\omega = \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}\frac{\pi}{4}$$

pour n pair. On en déduit

$$A = 4a^2\frac{\pi}{32} = \pi\frac{a^2}{8}.$$

Mais le rayon R du cercle donné est double de a. Donc

$$A = \frac{\pi R^2}{32}.$$

Solution par M. V. Jamet. 1° Dans le supplément du numéro de juin 1893 de *Mathesis*, M. Neuberg a bien voulu rappeler une formule qui équivaut à ce théorème :

Étant données une courbe triangulaire d'exposant m, *et une conique circonscrite à son triangle fondamental, si les deux courbes se touchent en un certain point, le rayon de courbure de la conique au point de contact est au rayon de courbure de la triangulaire, au même point, dans un rapport égal à* $\frac{1-m}{2}$.

Si, d'autre part, on considère une parabole et un cercle qui lui est tangent et qui passe par le foyer, ce cercle est une conique circonscrite au triangle dont deux côtés sont dirigés suivant les droites isotropes, issues de ce foyer, tandis que le troisième côté est rejeté à l'infini.

La parabole étant inscrite dans ce triangle, est, par rapport à lui, une triangulaire d'exposant $\frac{1}{2}$; et son rayon de courbure est égal à 4 fois celui du cercle. Si donc on appelle O le point où la parabole variable est osculatrice au cercle donné, F son foyer, C le centre du cercle qui passe par le point F et touche la parabole au point O, la distance CF, égale à CO, doit être égale au quart du rayon du cercle donné. Donc le point C est fixe sur le diamètre du cercle donné, passant par le point O, et la

distance CF est constamment égale à CO, ou au quart du rayon du cercle donné. Donc tous les points du lieu sont à la même distance d'un point fixe.

Voici d'ailleurs, une vérification analytique bien simple de ce fait :

Prenant pour axes deux droites rectangulaires issues du point O, dont l'une, Ox, passe par le centre du cercle donné, on trouve, pour l'équation de ce cercle :

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

et l'on vérifie aisément que l'équation

$$(y + \lambda x)^2 - 2ax = 0 \qquad (1)$$

représente une parabole tangente, à l'origine, à ce cercle, et ayant avec lui deux cordes communes opposées, issues du point O, mais dont l'une est confondue avec Oy. C'est donc l'équation générale des paraboles dont nous avons à nous occuper. Pour trouver les coordonnées du foyer d'une telle parabole, écrivons son équation comme il suit :

$$(1 + \lambda^2)(y^2 + x^2) - 2ax = (x - \lambda y + h)^2 - 2hx + 2h\lambda y - h^2,$$

ou bien :

$$(1 + \lambda^2)(y^2 + x^2) + 2(h - a)x - 2h\lambda y + h^2 = (x - \lambda y + h)^2. \quad (2)$$

En égalant à zéro le premier membre de cette équation, on trouvera l'équation d'un cercle bitangent à la parabole, et le centre de ce cercle coïncidera avec le foyer, si son rayon est nul, c'est-à-dire si l'on a :

$$\frac{(h - a)^2 + h^2\lambda^2}{1 + \lambda^2} = h^2$$

ou bien

$$h = \frac{a}{2}. \qquad (3)$$

Donc les coordonnées x, y, du foyer de la parabole (1) s'exprimeront comme il suit :

$$x = \frac{a}{2(1 + \lambda^2)}, \quad y = \frac{a\lambda}{2(1 + \lambda^2)}.$$

On en déduit, successivement :

$$\lambda = \frac{y}{x}, \quad x = \frac{a}{2\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right)}, \quad x^2 + y^2 - \frac{a}{2}x = 0.$$

Ce qui démontre l'énoncé.

2° L'axe de la parabole, lieu des milieux des cordes de coefficient angulaire $\frac{1}{\lambda}$, a pour équation

$$\lambda(y+\lambda x)-a+\frac{1}{\lambda}(y+\lambda x)=0,$$

ou

$$(1+\lambda^2)(y+\lambda x)-a\lambda=0. \tag{4}$$

et la perpendiculaire menée de l'origine sur cet axe est représentée par

$$y=\frac{x}{\lambda}.$$

Éliminant λ entre ces deux dernières équations, on trouve :

$$(x^2+y^2)^2-axy^2=0. \tag{5}$$

Telle est l'équation du lieu cherché. En coordonnées polaires, elle se transforme comme il suit :

$$\rho=a\cos\omega\sin^2\omega,$$

et en faisant varier ω de 0 à π, on obtient la courbe composée de deux folioles symétriques par rapport à l'axe des x; cet axe est, à l'origine, une tangente de rebroussement, l'axe des y une tangente ordinaire.

L'aire totale de cette courbe est égale à

$$a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\omega\cos^2\omega\,d\omega=a^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\omega\,d\omega-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\omega\,d\omega\right)$$

Mais, en général :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}\omega\,d\omega=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{\pi}{2};$$

donc l'aire cherchée est égale à

$$\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{16}\right)\frac{\pi}{2}a^2,\quad\text{soit}\quad\frac{\pi a^2}{32}.$$

3° Remarques. D'après l'équation (2), jointe à la condition (3), la directrice de la parabole (1) est représentée par l'équation

$$x-\lambda y+\frac{a}{2}=0,$$

donc elle coupe l'axe des x en un point fixe, chose facile à établir par la géométrie. En effet, le point φ, symétrique du foyer F d'une des paraboles (1) par rapport à l'axe des y, décrit un cercle C, symétrique, par rapport au même axe, du lieu du point F. La droite $O\varphi$ est parallèle à l'axe de la parabole, et la directrice, menée du point φ perpendiculairement à $O\varphi$, va couper la circonférence C au point diamétralement opposé au point O.

L'axe de la parabole, représenté par l'équation (4), enveloppe une quartique à trois rebroussements. En effet, pour trouver l'enveloppe de cette droite, on joindra à l'équation (4) l'équation suivante

$$2\lambda(y+\lambda x)+x(1+\lambda^2)-a=0,$$

dont le premier membre est, par rapport à λ, la dérivée du premier membre de (4). On formera de la sorte un système de deux équations équivalent au suivant :

$$x=a\frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2},\quad y=\frac{2a\lambda^3}{(1+\lambda^2)^2}, \tag{5}$$

qui définit une quartique à trois points doubles. Ces points sont de rebroussement, parce que, en vertu de l'équation (4), la courbe est de troisième classe, et peut être regardée, à ce titre, comme la polaire réciproque d'une cubique unicursale : les points de rebroussement de la quartique (5) correspondent alors aux tangentes d'inflexion de cette cubique.

Les podaires de la courbe (5) sont, comme l'indique un calcul facile, des quartiques bicirculaires : chacune d'elles a un point triple, savoir, l'origine même de la podaire. En ce point, les tangentes à cette quartique sont les perpendiculaires aux tangentes menées de ce point à la quartique (5). Parmi ces podaires, figure la courbe trouvée (2^{o}) ; et aussi le lieu des pieds des directrices des paraboles (1), puisque toutes ces directrices passent par un point fixe.

Solution par M. Cl. Servais. Le foyer F d'une parabole ayant un contact du 2e ordre avec le cercle donné au point M, se trouve sur le cercle ayant pour diamètre la moitié du rayon R de ce cercle(*). Soit F_1 le symétrique de F par rapport à la normale au point M, MF_1 sera

(*) Voir *Mathesis*, t. V, p. 179, l'article de M. Bergmans sur la parabole ; id. t. IX, p. 105, notre note *sur un certain cercle analogue au cercle de courbure*.

parallèle à l'axe de la parabole considérée(*). Soient M_1 la projection de M sur cet axe, α l'angle que la droite MM_1 fait avec la normale, α sera aussi l'angle de la tangente avec le rayon MF. On aura

$$MM_1 = MF \cos(90° - 2\alpha) = \frac{R}{2} \sin\alpha \sin 2\alpha;$$

l'équation polaire du lieu (M_1) est donc

$$\rho = R \sin^2\alpha \cos\alpha,$$

ou en coordonnées cartésiennes

$$(x^2 + y^2)^2 = Rxy^2.$$

L'aire est égale à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \, d\alpha = R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\alpha (1 - \cos^2\alpha)^2 \, d\alpha =$$

$$\frac{\pi R^2}{2}\left[\frac{1}{2} - 2.\frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\right] = \frac{\pi R^2}{32}.$$

NOTE. Ont résolu la même question MM. ABSOLONNE, DÉPREZ, DROZ-FARNY, HACKEN, MANDART et VLADIMIRESCU. Le défaut d'espace ne nous permettant pas de reproduire intégralement ces solutions, nous devons nous contenter d'en analyser la première partie ; la seconde partie a été traitée comme ci-dessus.

MM. ABSOLONNE, DÉPREZ et DROZ-FARNY ont trouvé le lieu de F en s'appuyant sur la construction, bien connue, du centre de courbure de la parabole. M. MANDART construit la parabole osculatrice en transformant les tangentes au cercle osculateur par quasi-inversion linéaire, le pôle étant au pôle d'osculation (Voir *Mathesis*, t. VII, p. 190 et t. VIII, p. 28).

Pour résoudre la question par l'analyse, M. ABSOLONNE représente le cercle donné et la parabole osculatrice par les équations

$$y^2 + x^2 - 2Ry = 0, \quad y^2 + cx^2 + 2\sqrt{c}\,xy - 2cRy = 0,$$

et obtient le lieu du foyer (α, β) en exprimant que la fonction

$$y^2 + cx^2 + 2\sqrt{c}\,xy - 2cRy - \lambda[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2]$$

est un carré parfait; l'axe de la parabole ayant pour équation

$$y(1+c) + \sqrt{c}(1+c)x - cR = 0,$$

(*) Cet axe enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. *Mathesis*, t. VIII, p. 236.

on trouve facilement le lieu de la projection de l'origine sur cette droite.

Les solutions de MM. Hacken et Vladimirescu se rapprochent beaucoup de la précédente.

M. Déprez fait les remarques suivantes : 1° L'axe de la parabole enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements (H); la projection du point d'osculation sur cet axe décrit donc une podaire de l'hypocycloïde (H). 2° La directice de la parabole passe par un point fixe K. 3° Le pied de la directrice décrit la podaire de K par rapport à (H). 4° La tangente au sommet de la parabole enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements. (J. N.)

Question 865.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 214).

L'aire comprise entre la courbe

$$y^2(x^2+a^2)^3 = a^6(x^2+b^2)$$

et son asymptote réelle est égale au périmètre de l'ellipse de demi-axes a et b, multiplié par a. (E. N. Barisien.)

Solution par MM. Absolonne *et* Vladimirescu. Cette courbe symétrique par rapport aux axes a pour asymptote l'axe des x et coupe l'axe des y aux points $y = \pm b$.

L'aire considérée est exprimée par

$$S = 2a^3 \int_0^{\infty} \frac{(x^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\,dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Posons $x = a \operatorname{tang} \varphi$, nous aurons :

$$S = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi.$$

Or, le quart du périmètre de l'ellipse dont les demi-axes sont a et b est représenté par l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\,d\varphi;$$

donc l'aire comprise entre l'asymptote et la courbe vaut le demi-périmètre de l'ellipse de demi-axes a et b, multiplié par a.

Question 871.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 215.)

Soient, sur une circonférence O, A *un point fixe,* B *un point variable. La circonférence décrite de* A *comme centre, avec le rayon* AB, *coupe la tangente menée en* B *au cercle* O *en un point* M, *et le rayon* OB *en un point* N. *Trouver les lieux des points* M *et* N. (H. Brocard.)

Solution par MM. Keelhoff, Retali, Collette *et* Déprez. Il est évident que les points M et N sont symétriques par rapport au point fixe A : donc le lieu de M n'est autre que celui de N auquel on ferait subir une rotation de 180° autour de A.

Décrivons maintenant de A comme centre, une circonférence de rayon OA ; le rayon OB la coupe en un point N′ et l'on voit facilement que NN′ = OB. Donc le lieu du point N est un limaçon de Pascal ayant cette dernière circonférence pour base, le centre du cercle donné comme pôle et son rayon comme constante.

Solution par MM. Brocard *et* Droz Farny. Achevons le rectangle MBNB′; MB′ rencontre la ligne AO en un point O′ symétrique de O par rapport à A. On voit immédiatement que M décrit la podaire du point O′ par rapport au cercle donné, et que N parcourt la podaire du point O par rapport au cercle décrit du centre O′ avec le rayon O′A.

Solution par M. Bellens. Soient $\rho = ON$, $\omega = BOA$ les coordonnées polaires de N. On trouve facilement

$$\rho = OB - NB = a - 2AB\cos ABO = a - 4a\cos^2 ABO,$$

ou, à cause de

$$ABO = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2},$$

$$\rho = a - 4a\sin^2\frac{\omega}{2} = a - 4a\frac{1-\cos\omega}{2} = 2a\cos\omega - a.$$

Le lieu de N est donc un limaçon de Pascal. Le point M décrit la courbe symétrique de ce limaçon par rapport à A.

Solution par MM. Barisien, Absolonne et Mandart. Soient

$$\rho = AN, \quad \omega = NAO$$

les coordonnées de N. On a

$$\rho = AB = 2a\cos BAO.$$

Mais

$$\text{BAO} = \omega + \text{BAN} = \omega + \pi - 2\,\text{BAO}, \quad \text{d'où} \quad 3\,\text{BAO} = \omega + \pi;$$

l'équation du lieu de N est donc

$$\rho = 2a\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\omega}{3}\right).$$

Celle du point M est

$$\rho = 2a\cos\frac{\omega}{3}.$$

M. Déprez trouve pour le lieu (N) relatif à une ellipse dont $OA = a'$, $OA' = b'$ sont deux diamètres conjugués faisant entre eux l'angle θ :

$$\rho = a'\left[2\cos\omega - \frac{b'\sin\theta}{\sqrt{a'^2\sin^2\omega + b'^2\sin^2(\theta-\omega)}}\right];$$

et pour le même lieu relatif à un petit cercle tracé sur une sphère :

$$\operatorname{tg}\rho = \operatorname{tg} r\,\frac{2\cos\omega - 1 + \operatorname{tg}^2 r\cos^2\omega}{1 - \operatorname{tg}^2 r\cos^2\omega + 2\operatorname{tg}^2 r\cos\omega}.$$

×Question 877.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 216.)

On décrit trois circonférences O_1, O_2, O_3 *ayant pour diamètres l'hypoténuse* BC *et les côtés* AB *et* AC *d'un triangle rectangle.* 1° *La tangente en* A *à la première rencontre les deux autres circonférences en* D *et* E; *démontrer que les cordes* AD, AE *sont égales.* 2° *La droite joignant* A *au milieu de l'hypoténuse rencontre les circonférences* O_2, O_3 *en des points* F, G *diamétralement opposés à* D *et* E *et tels que les cordes* AF, AG *sont égales aux projections de* AB, AC *sur* BC. 3° *La somme des segments sous-tendus dans le cercle* O_1 *par les cordes* AB, AC *est égale à la somme des segments sous-tendus dans les cercles* O_2 *et* O_3 *respectivement par les cordes* BD, AE *ou par les cordes* AD, CE. (Renshaw.)

Solution par M. A. Droz Farny(*). 1° Les trois droites BD, O_1A, CE sont perpendiculaires sur DE et O_1 étant le point milieu de BC; il en résulte immédiatement AD = AE.

2° L'angle DAF étant droit, DF est un diamètre de O_2; le quadrilatère DAFB est un rectangle; on a donc BF = DA = AE = GC.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Le pied H de la hauteur abaissée de A sur BC est un point commun aux circonférences O_2 et O_1. On a angle HAC = CAE = B ; donc le triangle AHC = ACE et par conséquent :

$$AG = CE = CH \text{ et } AF = BD = BH.$$

Remarques. De ce qui précède on conclut aussi :

1° AE = AD = AH ; 2° la circonférence décrite sur ED comme diamètre est tangente en H à l'hypoténuse BC ; 3° O_1 est le point milieu de FG.

3° On peut, sans introduire les fonctions trigonométriques démontrer élémentairement la troisième partie comme il suit : On a

$$\text{segment BD} = \text{segment BH},$$
$$\text{segment AE} = \text{segment AGH}.$$

Or angle $AO_1B = AO_3H = BO_2H = 2C$.

Les trois segments semblables étant sous-tendus par les côtés du triangle rectangle AHB, on a le théorème proposé par application de la généralisation du théorème de Pythagore.

Ont résolu la même question Mlle de Haas, MM. Barisien et Delahaye.

×Question 895.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 288.)

Résoudre le système

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = z, \tag{1}$$
$$2x + 2y + p = 0; \tag{2}$$
$$z^4 + pz^2 + q = 0. \tag{3}$$

Conditions pour que les valeurs des trois inconnues soient réelles.

(*Baccalauréat*, Poitiers, 1893.)

Solution par MM. Barbette, Listray et Verdeyen. Des équations (1) et (2) on tire

$$x + y + 2\sqrt{xy} = z^2,$$
$$x + y = -\frac{p}{2}; \tag{4}$$

d'où, par soustraction ;

$$2\sqrt{xy} = z^2 + \frac{p}{2};$$

puis, en élevant au carré :

$$4xy = z^4 + pz^2 + \frac{p^2}{4},$$

enfin, tenant compte de (3) :

$$4xy = \frac{p^2}{4} - q. \tag{5}$$

De (4) et (5), on conclut que x et y sont les deux racines de l'équation

$$u^2 + \frac{p}{2}u + \frac{p^2}{16} - \frac{q}{4} = 0,$$

de sorte que

$$\left.\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\right\} = -\frac{p}{4} \pm \frac{\sqrt{q}}{2}. \tag{6}$$

L'équation (3) donne

$$z = \pm\sqrt{-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}. \tag{7}$$

Les valeurs de x et y sont réelles si $q > 0$. Les deux valeurs de z^2 sont réelles si $\frac{p^2}{4} - q > 0$; leur produit q étant positif, elles sont à la fois positives ou négatives, et par suite z aura quatre valeurs réelles ou quatre valeurs imaginaires suivant que l'on a $p < 0$ ou > 0. L'hypothèse $q = 0$ donne $x = y$, et $z = 0$ ou $\pm\sqrt{-p}$.

×Question 908.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 32).

Soit S_p *la somme des* $p^{ièmes}$ *puissances des* n *premiers nombres entiers. Démontrer que*

$$S_3 = \tfrac{4}{3} S_1^2 (S_1 - 1) + S_3. \tag{A. C.}$$

Solution par M. H. Brocard. La vérification de cette relation d'identité résulte de la substitution des valeurs connues

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_3 = S_1^2, \quad S_5 = \frac{S_3(2n^2 + 2n - 1)}{3}.$$

Voir un article de M. G. Dostor (N. A. M., 1879, 459-464, 513-518) à propos duquel M. C. Henry (Id., 1880, 454-455) a rappelé des for-

mules publiées en 1873 par Éd. Lucas (*Recherches sur l'analyse indéterminée et l'arithmétique de Diophante*) et dont le principe a été énoncé par Prouhet dans les notes du *Cours d'Analyse* de Sturm.

Des relations d'identité analogues et plus ou moins simples entre des valeurs particulières de S_p ont été indiquées par les auteurs précités ainsi que par d'autres; et il serait aisé d'en augmenter la série.

Rappelons, par exemple, les suivantes, données par M. G. Dostor (*loc. cit.*) :

$$2S_3^2 = S_6 + S_7, \quad \frac{S_4 - S_2}{S_3 - S_1} = \frac{2}{5}(2n+1), \quad \frac{S_5 - S_3}{S_3 - S_1} = \frac{2}{5}n(n+1),$$

puis quelques autres, données par M. E. Amigues (N. A. M., 1871, 79-82, 117-122) :

$$4S_1^3 = 3S_5 + S_3, \quad 12S_2^3 = 16S_6 - 5S_4 + S_2,$$

auxquelles on pourra ajouter celles-ci, qui ne sont peut être pas nouvelles :

$$2S_7 = 4S_3^2 - 3S_2^2 + S_1^2, \quad \frac{S_7 - S_3}{S_5 - S_3} = \frac{1}{4}(3n^2 + 3n - 2), \text{ etc., etc.}$$

Ces remarques font voir que la relation énoncée au n° 908 pourrait s'écrire plus simplement sous la forme

$$3S_3 = 4S_1^3 - S_3,$$

d'après la formule de M. Amigues, donnée aussi par Ed. Lucas (*loc., cit.* et N. A. M., 1870, 49-53), où se trouve également la relation

$$2S_3^2 = S_3 + S_7.$$

Note. La question 908 a encore été résolue par MM. Droz-Farny, Barisien, Verdeyen, Couturier, François, Delahaye, Déprez, Strymeersch, Castiau, Poort (Groninghe), Barbette.

Plusieurs correspondants ont signalé des formules analogues :

$$\left.\begin{aligned} 5S_4 &= S_2(6S_1 - 1), \\ 7S_6 &= 12S_3S_5 - 5S_4; \end{aligned}\right\} \quad \text{(Poort.)}$$

$$10\frac{S_4}{S_2} - 9\frac{S_5}{S_3} = 1. \quad \text{(Déprez)}$$

$$\left.\begin{aligned} S_2 &= \frac{S_1}{3}\sqrt{8S_1 + 1}, \\ S_4 &= \frac{S_2}{5}(6S_1 - 1) = \frac{S_1}{15}(6S_1 - 1)\sqrt{8S_1 + 1}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(Barisien.)}$$

La solution de M. Barbette renfermait également d'autres relations, que le lecteur retrouvera dans l'article de notre honorable correspondant *Sur la sommation des puissances semblables des* n *premiers nombres* (*Mathesis*, livraison de mai, p. 105-110, 142-143).

×Question 915.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 56).

Soit $T_n = \frac{1}{2} n (n+1)$ *le* n^{e} *nombre triangulaire ; on peut admettre des valeurs négatives de* n, *car* $T_{-n} = T_{n-1}$. *Démontrer que si* $a+b+c=0$, $\alpha+\beta+\gamma=0$, *le produit*

$$(T_a + T_b + T_c)(T_\alpha + T_\beta + T_\gamma) \qquad (1)$$

est une somme de trois nombres triangulaires. (DE ROCQUIGNY.)

Solution par M. FRANÇOIS (La Haye). On a

$$T_a + T_b + T_c = \tfrac{1}{2} a(a+1) + \tfrac{1}{2} b(b+1) + \tfrac{1}{2} c(c+1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) = a^2 + ab + b^2,$$
$$T_\alpha + T_\beta + T_\gamma = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2.$$

Le produit (1) est donc égal à

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + a^2\beta^2 + \alpha^2 b^2 + a^2\alpha\beta + b^2\alpha\beta + \alpha^2 ab + \beta^2 ab + ab\alpha\beta;$$

on peut l'écrire ainsi

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + (a+b)^2(\alpha+\beta)^2 - ab\alpha\beta - b\beta(a+b)(\alpha+\beta)$$
$$- a\alpha(a+b)(\alpha+\beta);$$

ou

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta + c^2\gamma^2 - ab\alpha\beta - bc\beta\gamma - ca\gamma\alpha;$$

ou

$$\tfrac{1}{2}(a\alpha - b\beta)^2 + \tfrac{1}{2}(b\beta - c\gamma)^2 + \tfrac{1}{2}(c\gamma - a\alpha)^2 \qquad (2)$$

Posons

$$a\alpha - b\beta = \lambda,\ b\beta - c\gamma = \mu,\ c\gamma - a\alpha = \nu;$$

comme $\lambda+\mu+\nu=0$, l'expression (2) peut prendre la forme

$$\tfrac{1}{2}(\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\lambda+\mu+\nu) = \tfrac{1}{2}\lambda(\lambda+1) + \tfrac{1}{2}\mu(\mu+1) + \tfrac{1}{2}\nu(\nu+1)$$

Donc

$$(T_a + T_b + T_c)(T_\alpha + T_\beta + T_\gamma) = T_\lambda + T_\mu + T_\nu.$$

NOTE. La question revient à satisfaire à l'égalité

$$(a^2+ab+b^2)(\alpha^2+\alpha\beta+\gamma^2) = \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2,$$

équivalente à

$$[(a+\tfrac{1}{2}b)^2+\tfrac{3}{4}b^2][(\alpha+\tfrac{1}{2}\beta)^2+\tfrac{3}{4}\beta^2]=(\lambda+\tfrac{1}{2}\mu)^2+\tfrac{3}{4}\mu^2.$$

Or, une identité, due à Euler, donne

$$(p^2+\rho q^2)(p'^2+\rho q'^2)=(pp'+\rho qq')^2+\rho(pq'-p'q)^2.$$

Posons

$$\rho=3,\quad p=a+\tfrac{1}{2}b,\quad q=\tfrac{1}{2}b,\quad p'=\alpha+\tfrac{1}{2}\beta,\quad q'=\tfrac{1}{2}\beta;$$

nous pourrons faire

$$\lambda+\tfrac{1}{2}\mu=pp'+3qq'=a\alpha+b\beta+\tfrac{1}{2}(a\beta+b\alpha),$$
$$\tfrac{1}{2}\mu=pq'-p'q=\tfrac{1}{2}(a\beta-b\alpha).$$

Par suite, si l'on introduit le nombre $\nu=-(\lambda+\mu)$, on a

$$\lambda=a\alpha+\beta b+b\alpha=a\alpha-b\gamma,\quad \mu=a\beta-b\alpha,\quad \nu=c\beta-a\alpha,$$

ou, en permutant les lettres β et γ,

$$\lambda=a\alpha-b\beta,\quad \mu=a\gamma-b\alpha,\quad \nu=c\gamma-a\alpha.$$

La valeur de μ peut s'écrire

$$\mu=-(b+c)\gamma+b(\beta+\gamma)=b\beta-c\gamma.$$

Le problème admet plusieurs solutions; car on peut permuter, dans les valeurs de λ, μ, ν les lettres α, β, γ de différentes manières.

La question 915 est un simple exercice algébrique; car d'après un théorème général de Fermat *tout nombre est une somme de trois nombres triangulaires* (LEGENDRE, *Théorie des nombres*, §§ 155 et 316).

M. Mandart met le triple du produit (1) sous la forme de trois triangulaires. A cet effet, il observe que

$$T_a+T_b+T_c=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)=-(ab+bc+ca),$$
$$T_\alpha+T_\beta+T_\gamma=\tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha);$$

ces égalités donnent, en désignant par P le produit (1),

$$6P=(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+2(ab+bc+ca)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$
$$=(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2+(a\beta+b\gamma+c\alpha)^2+(a\gamma+b\alpha+c\beta)^2;$$

en posant

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=\lambda,\quad a\beta+b\gamma+c\alpha=\mu,\quad a\gamma+b\alpha+c\beta=\nu,$$

on a $\lambda+\mu+\nu=0$, et par suite

$$3P=\frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2+\lambda+\mu+\nu}{2}=T_\lambda+T_\mu+T_\nu,$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

640. Trouver sur le côté BC d'un triangle sphérique ABC un point D tel que

$$\sin^2 AD = \sin BD \sin DC.$$

Soient β, γ les angles BAD, CAD; on a

$$\frac{\sin AD}{\sin BD} = \frac{\sin B}{\sin \beta}, \quad \frac{\sin AD}{\sin DC} = \frac{\sin C}{\sin \gamma},$$

Il en résulte

$$\sin \beta \sin \gamma = \sin B \sin C. \tag{1}$$

Si D est compris entre B et C, l'égalité (1) donne

$$\cos(\beta - \gamma) = \cos A + 2 \sin B \sin C.$$

Si D est en dehors de B et C, on trouve

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos A - 2 \sin B \sin C.$$

641. On donne une circonférence O et la tangente Ax au point A. D'un point M variable sur la circonférence on abaisse la perpendiculaire MP sur Ax et l'on prend sur Ax le segment PB = AP. Trouver le lieu du centre O' du cercle circonscrit au triangle AMB.

(*Journal de Vuibert.*)

La perpendiculaire au milieu de AM passe par O et O', et MO' est parallèle à OA. La figure AOMO' est donc un losange, et AO' = OM. Le point O' décrit une circonférence ayant pour centre A, pour rayon OA.

On trouve facilement l'enveloppe de la circonférence O'. Si l'on considère deux positions infiniment voisines O', O'' de cette circonférence, le second point d'intersection est le symétrique de A par rapport à la ligne des centres; il a pour limite le symétrique de A par rapport à O', etc.

642. $n(n^2 - 49)(n^2 + 49)$ est divisible par 30.

643. Le plus petit commun multiple des nombres n, $n+1$, $n+2$ est $n(n+1)(n+2)$ ou $\frac{1}{2}n(n+1)(n+2)$ suivant que n est impair ou pair.

644. Trouver les nombres entiers de la forme $2^p 3^q$, qui possèdent la propriété que le nombre des diviseurs de N^2 égale le triple du nombre des diviseurs de N.

On trouve la condition $q = \frac{p+2}{p-1}$; comme tout diviseur commun de $p+2$ et $p-1$ divise leur différence 3, on ne peut avoir que $p-1=1$ ou $p-1=3$. On en déduit $p=2$ et $q=4$, ou $p=4$, $q=2$.

645. $(a^2 - 1)a^2(a^2 + 1)$ est divisible par 60.

646. Trouver les côtés d'un triangle, sachant que les côtés et la surface sont représentés par quatre nombres entiers en progression arithmétique. (*Journal de Vuibert.*)

Représentons les côtés et la surface par

$$x-y,\quad x,\quad x+y,\quad x+2y;$$

l'équation du problème est

$$x+2y=\sqrt{\frac{3x^2(x+2y)(x-2y)}{16}}\quad\text{ou}\quad x+2y=\frac{3x^2(x-2y)}{16}.$$

On tire de là

$$y=\frac{3x^2-16x}{2(3x^2+16)}$$

Le dénominateur étant pair, x doit être un nombre pair; soit $x=2z$. Alors

$$y=\frac{3z^2-4z}{3z^2+4}=z-\frac{8z}{3z^2+4}.$$

Posons encore

$$\frac{8z}{3z^2+4}=q,\ \text{d'où}\ z=\frac{4\pm\sqrt{16-12q}}{3q}.$$

Comme q doit être entier, on a nécessairement $q=1$; par suite $z=2$, $x=4$, $y=1$, et le triangle cherché a pour côtés 3, 4, 5.

647. Résoudre et discuter le système d'équations

$$x+y-z=2a,\quad x^2+y^2=z^2,\quad m(x+y)=xy,$$

x, y, z étant des quantités positives.

Calcul numérique dans le cas où

$$a=7\quad\text{et}\quad m=12.$$

(*École normale primaire supérieure de Saint-Cloud*, 1893.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

964. Soit ABCD un quadrilatère convexe quelconque. Sur les côtés AB, DC on construit les triangles isoscèles EAB, FCD ayant même angle à la base φ; sur les deux autres côtés BC, DA on construit les triangles isoscèles BCG, DAH ayant même angle à la base $\frac{1}{2}\pi-\varphi$; les quatre triangles ainsi construits sont dirigés à la fois vers l'extérieur ou vers l'intérieur du quadrilatère. Démontrer :

1° Que les droites EF, HG sont perpendiculaires et dans le rapport $\sin\varphi : \cos\varphi$; 2° qu'elles enveloppent deux paraboles lorsque φ varie; 3° que leur point de concours décrit une cubique. (J. N.)

985. Le lieu des points tels que si l'on mène les trois tangentes à la parabole semi-cubique $ky^2 = x^3$, le cercle passant par les points de contact ait son centre sur l'axe de symétrie de la courbe, est une ligne droite. — Si le cercle des points de contact a son centre sur la perpendiculaire à l'axe menée par le point de rebroussement de la parabole semi-cubique, le lieu du point d'émission des tangentes se compose de deux droites. (E. N. Barisien.)

986. On considère la podaire d'une cardioïde par rapport à son point de rebroussement. Si a désigne la distance du point de rebroussement au sommet de la courbe, le périmètre de cette podaire est $\frac{3\pi a}{2}$ et son aire est $\frac{15\pi a^2}{32}$. La développée de cette podaire a un périmètre équivalent à $\frac{3\pi a}{2}$ et une aire dont l'expression est $\frac{3\pi a^2}{64}$. (E. N. Barisien.)

987. D'un point P du plan d'une parabole donnée on abaisse les trois normales à la courbe dont les pieds sont A, B, C. Les tangentes en A, B, C forment un second triangle A'B'C'.

On considère les cercles circonscrits aux triangles ABC et A'B'C', dont les rayons sont R et R'. Montrer que :

1° Quel que soit le point P, le milieu de la ligne des centres des deux cercles est situé sur une droite perpendiculaire à l'axe de la parabole;

2° Le lieu des points P tels que $R = R'$ est une parabole;

3° Le lieu des points P tels que $R' = 2R$ se compose de deux droites;

4° Le lieu des points P tels que $R^2 + R'^2 =$ constante est une ellipse. (E. N. Barisien.)

***988.** Soient dans un triangle ABC, H l'orthocentre et A', B', C' les pieds des hauteurs. Posons :

$$P_a = AH.\,AA', \quad \ldots, \quad P_h = HA.\,HA' = HB.\,HB' = HC.\,HC'.$$

On aura :

$$\overline{AH}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{AB}^2 = P_a + P_b + P_c + P_h = 4R^2,$$

$$\frac{1}{P_a} + \frac{1}{P_b} + \frac{1}{P_c} = \frac{1}{P_h}.$$ (Droz Farny.)

***989.** Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC; les tangentes en A, B, C à ce cercle forment un nouveau triangle A'B'C'.

On prolonge A'O de $O\alpha = \frac{1}{2}$ A'O, B'O de $O\beta = \frac{1}{2}$ B'O, C'O de $O\gamma = \frac{1}{2}$ C'O ; démontrer que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ se rencontrent sur la circonférence ABC en un point D, ayant pour coordonnées normales

$$\frac{\sin A}{3\cot B\cot C - 1}, \quad \frac{\sin B}{3\cot C\cot A - 1}, \quad \frac{\sin C}{3\cot A\cot B - 1},$$

et que chacun des points A, B, C, D peut être déduit des trois autres, de la même manière que D de A, B, C. (Dobbs.)

970. Soient deux cercles fixes de centres C et C' : d'un point M variable de la circonférence C, on décrit une circonférence de rayon donné ρ qui coupe la circonférence C' en A et B.

1° L'enveloppe de la corde AB est une conique qui a le point C' pour un de ses foyers.

2° Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle ABC est une circonférence. (E. Lemoine.)

971. Soit P un point donné dans le plan d'une ellipse E. Une sécante quelconque menée par P coupe E aux deux points A, B ; soit N le point de concours des normales à E en A et B, et soient C, D les pieds des deux autres normales issues de N. Démontrer que : 1° la corde CD enveloppe une parabole qui touche les axes de E (Si P est sur l'un de ces axes, CD passe par un point fixe) ; 2° Le pôle de la corde CD décrit une hyperbole équilatère ; 3° Trouver le lieu du point de rencontre des cordes AB et DC. Dans le cas où P est sur l'un des axes de E, ce lieu est une hyperbole ; 4° Dans la même hypothèse, le point N décrit une conique, et le centre de l'hyperbole équilatère décrit également une conique. (Déprez.)

972. Soient A', B', C' les milieux des côtés d'un triangle ABC, et soit A'' B'' C'' le triangle formé par les tangentes menées par A, B, C au cercle circonscrit au triangle ABC. Démontrer que les côtés non homologues des triangles A'B'C', A''B''C'' se coupent en six points d'une conique, et trouver l'équation de cette courbe. (J. Neuberg.)

***973.** Sur deux rayons rectangulaires OA, OB d'une sphère on donne deux points C, D situés à la même distance $OC = OD = d$ du centre. Les plans menés par ces points perpendiculairement aux rayons OA, OB partagent la surface de la sphère en quatre parties. Calculer les aires de ces parties par la géométrie élémentaire.

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'HYPERBOLE;

par M. PIRONDINI, professeur à Parme.

I.

1. *Soient :* Oy *une tangente à une circonférence donnée* C; CQ *un rayon quelconque, qui coupe* Oy *en* A; AP *une perpendiculaire à* Oy, *égale à* $\frac{AQ}{k}$, k *étant une constante. Le lieu du point* P *est une hyperbole.*

Prenons pour axes coordonnés le rayon CO et la tangente Oy. En désignant par r le rayon du cercle, et par x, y les coordonnées AP, OA du point P, on trouve facilement

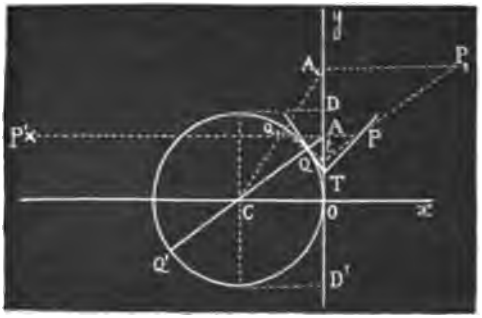
$$\sqrt{r^2+y^2}-r=kx, \tag{1}$$

Cette équation peut prendre les formes

$$k^2\left(x+\frac{r}{k}\right)^2-y^2=r^2, \tag{2}$$

$$k^2x^2-y^2+2krx=0. \tag{3}$$

Le lieu cherché est donc une hyperbole ayant pour axe réel Cx, pour sommet le point O.



Le rayon CA coupe la circonférence C en un second point Q'; si l'on prend $AP'=\frac{AQ'}{k}$, les coordonnées (x, y) du point P' vérifient la relation

$$\sqrt{r^2+y^2}+r=-kx,$$

qui conduit encore à l'équation (2). Les points P et P' engendrent donc respectivement les deux branches de l'hyperbole.

2. Toute hyperbole peut être engendrée par le moyen qui vient d'être indiqué : Le cercle auxiliaire C a pour rayon le demi-axe imaginaire et touche l'hyperbole en l'un des sommets réels; le rapport constant k est égal au rapport de l'axe imaginaire à l'axe réel.

L'hyperbole équilatère correspond à $AP=AQ$, $AP'=AQ'$, et est concentrique avec le cercle auxiliaire C.

3. *Les tangentes en deux points correspondants* Q, P *du cercle et de l'hyperbole se coupent sur l'axe* O*y*.

En effet, la tangente au point P(x, y) a pour équation

$$k^2xX - yY + kr(x + X) = 0;$$

elle coupe O*y* au point $\left(0, \frac{krx}{y}\right)$. D'autre part, la tangente au point Q(x', y') du cercle est représentée par

$$x'X + y'Y + r(x' + X) = 0;$$

elle rencontre O*y* au point $\left(0, \frac{-rx'}{y'}\right)$. Mais si l'on mène l'ordonnée QS du point Q, les triangles semblables CQS, CAO donnent

$$\frac{y'}{y} = \frac{r + x'}{r} = \frac{r}{r + kx};$$

d'où

$$y' = \frac{ry}{kr + x}, \quad x' = \frac{-rkx}{kr + x}, \quad \frac{x'}{y'} = -\frac{kx}{y},$$

ce qui démontre le théorème.

II.

1. *Soient* OA, AP *les coordonnées d'un point* P *par rapport aux axes* O*x*, O*y*. *Si la surface du triangle* OAP *est proportionnelle à son périmètre, le lieu de* P *est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes coordonnés.*

L'équation du lieu est

$$xy \sin\theta = m(x + y) + m\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta};$$

ou sous forme rationnelle et après suppression du facteur xy :

$$xy \sin^2\theta - 2m(x + y)\sin\theta + 2m^2(1 - \cos\theta) = 0.$$

La courbe cherchée est donc une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes O*x*, O*y* et dont le centre a pour coordonnées

$$x = y = \frac{2m}{\sin\theta};$$

si l'on transporte les axes au centre, on trouve

$$xy = \frac{2(1 + \cos\theta)}{\sin^2\theta} m^2 = m^2 \cot^2 \tfrac{1}{2}\theta.$$

Réciproquement, toute hyperbole jouit de la propriété indiquée ci-dessus; les axes Ox, Oy sont deux parallèles aux asymptotes menées par un même point O de l'axe réel; ce point et la constante m dépendent de la puissance de l'hyperbole.

2. *Soient* PA, PB *les coordonnées d'un point* P *par rapport aux axes* Ox, Oy. *Si la surface du parallélogramme* OAPB *est proportionnelle à son périmètre, le lieu de* P *est une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes coordonnés.*

Car l'équation de ce lieu étant

$$xy \sin\theta - 2m(x+y) = 0,$$

le point P décrit une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles à Ox, Oy; O est un sommet de la courbe.

Réciproquement, si l'on rapporte une hyperbole à deux parallèles menées aux asymptotes par un sommet réel, la surface du parallélogramme construit sur les coordonnées d'un point de la courbe est proportionnelle à son périmètre.

Note. La propriété de la tangente, dans la première génération de l'hyperbole, peut être établie sans calcul. En effet, soient Q et Q_1 deux points quelconques de la circonférence C, A et A_1 les points correspondants de Oy, P et P_1 les points correspondants de l'hyperbole. Si t est le point de rencontre de la corde QQ_1 avec Oy, le triangle CAA_1 coupé par la transversale QQ_1 donne

$$\frac{QC}{QA}\cdot\frac{Q_1A_1}{Q_1C}\cdot\frac{tA}{tA_1}=1; \quad \text{d'où} \quad \frac{tA}{tA_1}=\frac{QA}{Q_1A_1}=\frac{AP}{A_1P_1}.$$

On en conclut que les cordes correspondantes QQ_1 et PP_1 des deux courbes se coupent sur Oy; par suite, les tangentes homologues rencontrent Oy au même point. De cette propriété, on déduit facilement que les asymptotes de l'hyperbole coupent Oy aux mêmes points D,D′ que les tangentes du cercle parallèles à Cx.

La transformation qui sert à passer de la circonférence C à l'hyperbole, peut être généralisée de diverses manières. (J. N.)

×NOTE SUR LA RELATION

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2,$$

par M. l'abbé E. Gelin, professeur au Collège St-Quirin, à Huy.

Si l'on pose

$$S_m = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m,$$

on a

$$S_1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n, \quad S_2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n,$$

$$S_3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2, \quad S_4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n,$$

. . . . . .

et, en général,

$$S_m = \frac{1}{m+1}n^{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \frac{1}{6}\cdot\frac{m}{2}n^{m-1} - \frac{1}{30}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)}{2.3.4}n^{m-3}$$
$$+ \frac{1}{42}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5.6}n^{m-5}$$
$$- \frac{1}{30}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-6)}{2.3.4.\ldots 8}n^{m-7}$$
$$+ \frac{5}{66}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-8)}{2.3.4\ldots 10}n^{m-9}$$
$$- \frac{691}{2730}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-10)}{2.3.4\ldots 12}n^{m-11}$$
$$+ \frac{7}{6}\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-12)}{2.3.4\ldots 14}n^{m-13} - \ldots.$$

On observe que l'on a $S_3 = S_1^2$, et il s'agit de savoir s'il existe quelque autre relation de la même forme, c'est-à-dire de la forme $S_m^x = S_p$, ou, plus généralement, de la forme

(A) $$S_m^x = iS_p^y,$$

où x et y sont des entiers positifs, i une constante, et k un entier positif ou négatif.

Représentons, pour abréger, les coefficients du développement de S_m

par $a, b, c, d, e, \ldots$ et les coefficients du développement de S_ν par $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ La relation (A) deviendra

$$(an^{m+1} + bn^m + cn^{m-1} + dn^{m-2} + en^{m-3} + \cdot\cdot)^x$$
$$= i^k (\alpha n^{p+1} + \beta n^p + \gamma n^{p-1} + \delta n^{p-2} + \varepsilon n^{p-3} + \cdots)^y,$$

ou

$$[a^x] n^{(m+1)x} + \left[\frac{x}{1} a^{x-1} b\right] n^{(m+1)x-1} + \left[\frac{x}{1} a^{x-1} c + \frac{x(x-1)}{1.2} a^{x-2} b^2\right] n^{(m+1)x-2}$$
$$+ \left[2\frac{x(x-1)}{1.2} a^{x-2} bc + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} a^{x-3} b^3\right] n^{(m+1)x-3} +$$
$$\left[\frac{x}{1} a^{x-1} d + \frac{x(x-1)}{1.2} a^{x-2} c^2 + 3\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} a^{x-3} b^2 c + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} a^{x-4} b^4\right]$$
$$\times n^{(m+1)x-4} + \cdots$$
$$= i\,[\alpha^y]\, n^{(p+1)y+k} + i\left[\frac{y}{1} \alpha^{y-1}\beta\right] n^{(p+1)y+k-1}$$
$$+ i\left[\frac{y}{1} \alpha^{y-1}\gamma + \frac{y(y-1)}{1.2} \alpha^{y-2}\beta^2\right] n^{(p+1)y+k-2}$$
$$+ i\left[2\frac{y(y-1)}{1.2} \alpha^{y-2}\beta\gamma + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3} \alpha^{y-3}\beta^3\right] n^{(p+1)y+k-3} +$$
$$i\left[\frac{y}{1} \alpha^{y-1}\delta + \frac{y(y-1)}{1.2} \alpha^{y-2}\gamma^2 + 3\frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3} \alpha^{y-3}\beta^2\gamma + \frac{y(y-1)(2)(y-3)}{1.2.3.4} \alpha^{y-4}\beta^4\right]$$
$$\times n^{(p+1)y+k-4} + \cdots,$$

d'où, en identifiant les exposants et les coefficients,

$$\text{(B)} \begin{cases} (m+1)x = (p+1)y + k, \quad a^x = i\alpha^y, \\ xa^{x-1}b = iy\alpha^{y-1}\beta, \\ xa^{x-1}c + \frac{1}{2}x(x-1)a^{x-2}b^2 = iy\alpha^{y-1}\gamma + \frac{1}{2}iy(y-1)\alpha^{y-2}\beta^2, \\ \cdots\cdots\cdots\

Soient $m > 1$ et $p = 1$. On a alors

$$a = \frac{1}{m+1}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{12}m, \quad \cdots \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = 0, \quad \cdots$$

et les équations (B) deviennent :

$$(m+1)x = 2y + k, \quad 2^v = i(m+1)^x, \quad 2^v x = 2iy(m+1)^{x-1},$$

$$\frac{mx}{3(m+1)^{x-1}} + \frac{x(x-1)}{2(m+1)^{x-2}} = \frac{2iy(y-1)}{2^v},$$

. . . . . .

d'où l'on tire $2x = y$, $k = 0$, $m = 3$, $i = 1$. Par suite, la relation (A) devient $S_3^x = S_1^{2x}$, ou, simplement, $S_3 = S_1^2$.

Enfin, soient $m > 1$, $p > 1$. On a alors

$$a = \frac{1}{m+1}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = \frac{m}{12}, \quad \cdots$$

$$\alpha = \frac{1}{p+1}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{p}{12}, \quad \cdots$$

et les équations (B) deviennent :

$$(1) \qquad (m+1)x = (p+1)y + k,$$

$$(2) \qquad \frac{1}{(m+1)^r} = \frac{i}{(p+1)^q},$$

$$(3) \qquad \frac{x}{(m+1)^{x-1}} = \frac{iy}{(p+1)^{y-1}},$$

$$(4) \qquad \frac{mx}{12(m+1)^{x-1}} + \frac{x(x-1)}{8(m+1)^{x-2}} = \frac{ipy}{12(p+1)^{y-1}} + \frac{iy(y-1)}{8(p+1)^{y-2}},$$

. . . . . .

Divisant (3) par (2) et (4) par (3), on a

$$(m+1)x = (p+1)y,$$

$$\tfrac{1}{3}m + \tfrac{1}{2}(m+1)(x-1) = \tfrac{1}{3}p + \tfrac{1}{2}(p+1)(y-1)$$

d'où $x = y$ et $m = p$. On a ensuite $k = 0$, $i = 1$. La relation $S_m^x = i^x S_p^y$ se réduit donc à l'identité $S_m^x = S_m^x$.

En résumé, *il n'existe qu'une seule relation de la forme* $S_m^x = i^x S_p^y$, *savoir* $S_3 = S_1^2$.

Comparer *Intermédiaire des Mathématiciens*, p. 159-160. (FAUQUEMBERGUE.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

16. *Sur le cercle osculateur à une conique.* On peut obtenir différentes constructions du cercle osculateur en un point donné M d'une ellipse (ou hyperbole) en partant de ce théorème de Newton :

Deux cordes MN, PQ *d'une ellipse se coupent en* S ; *le rapport* $\frac{SM.SN}{SP.SQ}$ *reste constant si les deux cordes se transportent parallèlement à elles-mêmes.*

En effet, prenons pour PQ une corde parallèle à la tangente MT, et désignons par $2l$, $2m$ les longueurs des diamètres parallèles à MN et PQ; nous aurons

$$\frac{SP.SQ}{SM.SN} = \frac{m^2}{l^2}. \tag{1}$$

Soit I le point où la circonférence circonscrite au triangle MPQ rencontre la droite MN; comme $SP.SQ = SM.SI$, la relation (1) peut prendre la forme

$$\frac{SI}{SN} = \frac{m^2}{l^2}. \tag{2}$$

Faisons tendre la droite PQ indéfiniment vers la tangente MT ; le point I aura pour limite le point de rencontre K du cercle osculateur en M avec la droite MN, et la relation (2) devient

$$\frac{MK}{MN} = \frac{m^2}{l^2}. \tag{3}$$

Ainsi, *les cordes interceptées par le cercle osculateur en un point* M *d'une ellipse et par cette courbe sur une droite quelconque menée par* M *sont entre elles comme les carrés des diamètres de l'ellipse parallèles à la tangente en* M *et à la sécante.*

Soient ρ le rayon du cercle osculateur, φ l'angle NMT; on a $MK = 2\rho \sin\varphi$. Donc

$$\rho = \frac{MN}{2\sin\varphi} \cdot \frac{m^2}{l^2}. \tag{4}$$

Si MN passe par le centre O de l'ellipse, les relations (3) et (4) se simplifient; on trouve

$$MK = \frac{2m^2}{l}, \quad \rho = \frac{m^2}{l\sin\varphi}.$$

Déterminons le point M par la condition que le cercle osculateur passe par le centre O. En faisant coïncider K avec O, on a MK $= l$, MN $= 2l$, et la relation (3) conduit à la condition $l^2 = 2m^2$. Comme on a aussi $l^2 + m^2 = a^2 + b^2$, un calcul facile donne

$$m = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{3}}, \quad l = \sqrt{\frac{2(a^2 + b^2)}{3}};$$

les coordonnées de M sont

$$x = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{2a^2 - b^2}{3}}, \quad y = \frac{b}{c}\sqrt{\frac{2b^2 - a^2}{3}}.$$

Pour que le problème ait une solution réelle, on doit avoir $a^2 < 2b^2$.

Ce problème, qui nous a été communiqué avec les coordonnées du point M par M. Barisien, nous a suggéré la présente note. La méthode s'étend aussi aux courbes algébriques d'un ordre supérieur. MM. Demoulin (*) et Gob(**) sont arrivés à des résultats remarquables en partant du théorème de Newton appliqué à ces courbes. (J. N.)

BIBLIOGRAPHIE.

Éléments de Géométrie descriptive avec de nombreux exercices, par F. J., cinquième édition. Tours, Mame; Paris, Poussielque, 1893 (458 p. petit in-8°; 492 fig. dans le texte, cartonné).

Exercices de Géométrie descriptive. Troisième édition. Ibid. 1893 (952 p. gr. in-8°; 1018 fig. dans le texte, cartonné).

Les excellents manuels qui portent modestement l'initiale du Frère supérieur de l'Institut des Écoles Chrétiennes sont bien connus en France et en Belgique de la plupart des Professeurs. Il nous suffira donc de donner ici le sommaire des deux ouvrages dont nous venons de transcrire le titre. Le premier est le livre de l'élève, le second le livre du maître.

ÉLÉMENTS. *Première partie.* Du point, de la droite et du plan. 1. Représentation du point, de la droite et du plan. 2. Intersections. 3. Positions relatives des droites et des plans. 4. Changement de plans de projections, rotations, rabattements. 5. Angles et trièdres. 6. Polyèdres, intersection par un plan ou une droite.

Deuxième partie. Des surfaces courbes. 1-2. Classification et représentation des

(*) *Sur diverses conséquences du théorème de Newton* (Mém. in-8° de Bruxelles, 1891).

(**) *Applications du théorème de Carnot* (Congrès de Besançon, 1893). *Généralisation et extension du théorème de Newton* (B. B., 1894).

surfaces. 3. Plans tangents (cylindre, cône, sphère et surfaces de révolution)(*). 4. Sections planes. 5. Intersection de surfaces (polyèdres, surfaces réglées, surfaces de révolution).

Troisième partie. Plans cotés.

Quatrième partie. Applications diverses. 1. Notions sur le tracé des ombres. 2. Constructions (descente droite; porte biaise, emploi de l'hélice, charpentes, escaliers). 3. Perspective (y compris la perspective cavalière et axonométrique). 4. Projections conique et cylindrique. 5. Problèmes de récapitulation (posés à Saint Cyr, à l'École centrale, etc.).

Le livre contient plus d'un millier d'exercices. Dans les problèmes où la chose est utile, l'auteur indique comment on doit opérer pour trouver la solution en n'utilisant que la direction et non la position de la ligne de terre.

EXERCICES. Cet ouvrage est le complément du précédent; il contient classés dans le même ordre que celui-ci, la solution de toutes les questions qui sont posées dans les *Éléments*, deux chapitres complémentaires et des questions nouvelles; enfin et surtout une bonne introduction méthodologique de 112 pages dont voici le sommaire.

1. *Introduction.* Terminologie, notation, méthodes. 2. *Méthodes particulières.* Projection cylindrique, conique; rotation; emploi d'un seul plan; lieux géométriques. 3. *Tracé des épures.* Tracé des coniques. Enveloppes. Courbes d'erreur. Emploi de la géométrie analytique. 4. *Généralisation des solutions.*

De nombreuses et précieuses notes bibliographiques sont semées dans tout l'ouvrage. Il est terminé par une table analytique soignée. (P. M.)

Récréations mathématiques, par M. LUCAS. Tome IV. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894. (In-8° de VIII-266 pages et 177 figures dans le texte). Prix : fr. 7.50.

Il y a douze ans, un article de ce Journal (1882, pp. 181-183) annonçait la publication du tome I des *Récréations mathématiques* d'Ed. Lucas, et bientôt après, celle du tome II (*Mathesis*, 1883, pp. 202-203).

(*) La démonstration classique du théorème relatif à l'existence du plan tangent, donnée au n° 274 ne vaut rien, comme nous l'avons déjà dit dans *Mathesis*. Il faut établir ce théorème pour chaque espèce de surface considérée, ce qui est relativement facile pour les surfaces réglées, les surfaces de révolution et les quadriques. Dans la démonstration habituelle, on admet deux ou trois postulats dans ce seul énoncé : « *la limite d'une sécante passant par deux points* MOBILES *d'une courbe* VARIABLE DE FORME *est la tangente de la position limite de cette courbe, au point limite des deux points mobiles.*

En général, les auteurs de traités de géométrie descriptive, sans en excepter les plus célèbres, ne traitent pas les questions où intervient la considération des limites, avec la simplicité et la rigueur désirables, parce qu'ils ne restreignent pas leurs démonstrations aux courbes et aux surfaces spéciales dont ils s'occupent; mais ils les étendent indûment à des courbes ou surfaces *quelconques*, dont il serait bien difficile de donner une définition précise.

Depuis cette époque, la publication fut interrompue; elle ne fut reprise qu'après la mort prématurée du savant géomètre, survenue comme on sait, le 3 octobre 1891 (*Mathesis* 1891, p. 217).

Il a été rendu compte des mesures prises par la Société mathématique de France pour continuer la publication des Mémoires d'Ed. Lucas, formant suite aux *Récréations*. Un nouveau volume, le tome III, fut imprimé en 1892 et put paraître au commencement de 1893 (*Mathesis*, 1893, pp. 90-91).

Aujourd'hni, nous annonçons la publication du tome IV, par les soins de la même délégation de la Société mathématique, de MM. H. Delannoy, A. Laisant et E. Lemoine, avec la coopération non moins dévouée de MM. Gauthier-Villars et fils.

Les tomes I, II, III renfermaient, respectivement, huit, sept et douze récréations. Le tome IV en contient huit, dont plusieurs avec dédicaces de l'auteur à quelques-uns de ses correspondants. Trois autres récréations ne portent pas de dédicaces, et les éditeurs n'ont pas cru devoir y suppléer, pour les motifs indiqués dans l'avertissement du tome III.

Voici, en résumé, l'objet des huit nouvelles récréations :

1° Le calendrier perpétuel et le calcul automatique des résidus. Explication du Calendrier perpétuel publié en 1883 par Ed. Lucas et donnant rapidement, par un calcul simple ou par une roulette, la concordance entre les calendriers julien et Grégorien pour une époque quelconque (voir *Assoc. Fr.*, Congrès de Rouen, 1883).

2° L'Arithmétique en boules. Emploi de l'arithmétique figurative pour mettre en évidence les propriétés des nombres polygonaux.

3° L'Arithmétique en bâtons. Application aux propriétés des nombres pyramidaux.

4° Le jeu des mérelles au XIII[e] siècle. Nouveaux éclaircissements relatifs au jeu expliqué déjà au tome II des *Récréations*.

5° Les carrés magiques de Fermat, Exposé des méthodes de Fermat pour la construction des carrés pairs. A ce chapitre il faut joindre un carré magique de 22, à enceintes, retrouvé après l'impression du volume.

6° La Géométrie des réseaux et le problème des dominos. Nouvelle solution du problème du jeu de dominos, par M. G. Tarry, qui a confirmé, par une méthode nouvelle et très simple, un résultat très péniblement obtenu autrefois par le D[r] Reiss de Francfort.

7° La Géométrie des régions, le problème géographique des quatre couleurs et les réseaux à points triples. Étude particulièrement intéressante et tentative nouvelle de démonstration d'un fait d'expérience qui se traduit par cette proposition, qu'il suffit de quatre couleurs distinctes pour le coloriage des régions, en nombre indéfini, d'une carte géographique, sans que deux régions contiguës reçoivent la même couleur.

8° La machine à marcher. Variété de transformation mécanique, inventée par M. Tchebychef et qui est en définitive un système articulé donnant un moyen de tracer un arc de courbe qui, dans la portion utilisée, se rapproche remarquable-

ment d'un segment de ligne droite, tandis que la solution rigoureuse du même problème a été donnée par M. Peaucellier.

Le volume se termine par cinq notes tirées de différents recueils et dues à Éd. Lucas, ou que l'auteur voulait ajouter aux récréations antérieurement publiées.

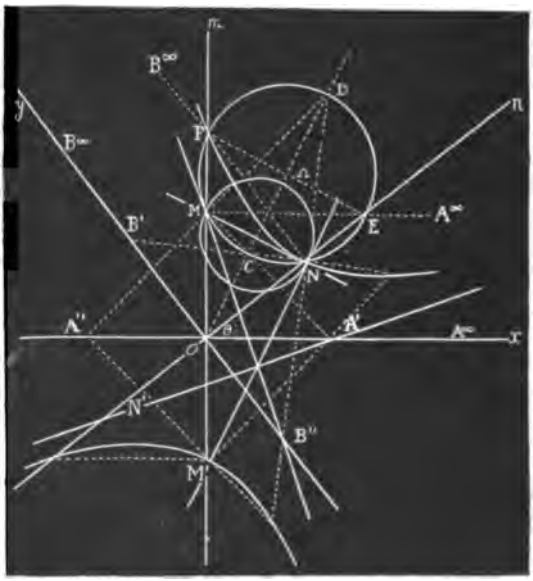
Ce volume achève les *Récreations mathématiques*, mais il existe, dans les papiers de Lucas, trois cahiers d'*Arithmétique amusante* qui pourront servir d'introduction aux *Récréations mathématiques*. Leur publication, annoncée déjà par les éditeurs, se fera sans doute prochainement. (H. B.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 838.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 79).

Etant donnés deux axes Ox, Oy, ***on prend sur une perpendiculaire élevée à*** Ox ***en*** O ***les segments*** OM = OM′ = *l*, ***et sur une perpendiculaire élevée à*** Oy ***en*** O ***les segments*** OM = ON′ = *l*. ***On marque sur*** Ox ***un point*** A ***et sur*** Oy ***un point*** B ***tels que le produit*** OA.OB = l^2.



Les points A, B ***étant supposés variables, trouver les lieux décrits par les points de rencontre des droites*** (NB, MA), (N′B, M′A), (NB, M′A), (NA, MB), (N′A, M′B). (Labenne.)

Solution par M. Retali, ***professeur à Milan.*** — Prenons sur les axes respectivement les points A′, A″ et B′, B″ tels que OA′ = —OA″ = *l*, OB′ = —OB″ = *l*; les deux points A et B engendrent deux ponctuelles homographiques dans lesquelles (A∞, O), (O, B∞), (A′, B′), (A″, B″) sont des couples de points correspondants; les deux fais-

ceaux homographiques M (AA$^\infty$OA'A'') et N (BOB$^\infty$B'B'') engendrent donc une conique passant par les points M et N ; comme les trois rayons MA$^\infty$, MO, MA' du premier faisceau forment avec leurs homologues un angle égal à l'angle θ de l'axe Ox avec la droite ON, les deux faisceaux sont directement égaux, et la conique qu'ils engendrent est une circonférence K^2 ayant son centre Ω sur la bissectrice commune des angles (NOM) et xOy. Les deux points (MA', NB') $\equiv$ C, (MA'', NB'') $\equiv$ D sont les extrémités d'un diamètre de K^2 et les deux points (MA$^\infty$, NO) $\equiv$ E, (Mθ, NB$^\infty$) $\equiv$ F sont les extrémités du diamètre perpendiculaire à CD. Il résulte immédiatement de la figure que

$$O\Omega = \frac{l \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\theta}$$

et que le cercle K^2 a pour rayon

$$\frac{l \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\theta}.$$

Le lieu décrit par le point (N'A, M'B) est évidemment le cercle symétrique de K^2 par rapport au point O.

Dans les deux faisceaux homographiques N(AA$^\infty$OA'A''), M(BOB$^\infty$B'B'') les rayons NA$^\infty$, NO, NA' du premier sont respectivement perpendiculaires à leurs rayons homologues ; donc le lieu du point (NA, MB) est le cercle ayant le segment MN pour diamètre, et le lieu du point (N'B, M'A) est le cercle ayant pour diamètre le segment M'N'.

Pour déterminer enfin le lieu décrit par le point (NB, M'A), j'observe que les deux faisceaux M' (AA$^\infty$OA'A''), N(BOB$^\infty$B'B'') sont inversement égaux : ils engendrent donc une hyperbole équilatère ayant le segment M'N pour axe transverse, passant par le point F, par le point symétrique de E par rapport à O, et par les deux points (NB'', N'M'), (M'A', NB'') ; cette hyperbole a pour asymptotes les droites MB'' et NA'.

Solution analytique par M. Barisien. Prenons pour axe des x la bissectrice intérieure OX de l'angle xoy, et pour axe des y la bissectrice extérieure OY. Posons OA $= \alpha$, OB $= \beta$, de sorte que

$$\alpha\beta = l^2. \qquad (1)$$

Si 2θ désigne l'angle xoy, on obtient les coordonnées des points A, B, M, M', N, N' :

$$A\begin{cases} x = \alpha\cos\theta, \\ y = -\alpha\sin\theta; \end{cases} \qquad B\begin{cases} x = \beta\cos\theta, \\ y = \beta\sin\theta; \end{cases}$$

$$M\begin{cases} x = l\sin\theta, \\ y = l\cos\theta; \end{cases} \qquad M'\begin{cases} x = -l\sin\theta, \\ y = -l\cos\theta; \end{cases}$$

$$N\begin{cases} x = -l\sin\theta, \\ y = l\cos\theta; \end{cases} \qquad N'\begin{cases} x = l\sin\theta, \\ y = -l\cos\theta. \end{cases}$$

1° *Lieu du point de rencontre des droites* (NB, MA). Les droites NB et MA ont respectivement pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -l\sin\theta & l\cos\theta & 1 \\ \beta\cos\theta & \beta\sin\theta & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ l\sin\theta & l\cos\theta & 1 \\ \alpha\cos\theta & -\alpha\sin\theta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ces deux équations, développées et ordonnées par rapport à β et à α s'écrivent

$$\beta(y\cos\theta - x\sin\theta - l) + l(x\cos\theta + y\sin\theta) = 0, \qquad (2)$$

$$\alpha(y\cos\theta + x\sin\theta - l) + l(x\cos\theta - y\sin\theta) = 0. \qquad (3)$$

En éliminant α et β entre (1), (2) et (3) on trouve pour le lieu

$$(x\sin\theta + y\cos\theta - l)(-x\sin\theta + y\cos\theta - l) = x^2\cos^2\theta - y^2\sin^2\theta,$$

ou

$$x^2 - y^2 + 2ly\cos\theta - l^2 = 0. \qquad (4)$$

Le lieu cherché est donc une hyperbole équilatère ayant ses deux sommets réels en M et N.

Par un calcul tout semblable, on trouve les autres lieux. Nous nous contentons d'en donner les résultats.

2° *Lieu de* (N'B, M'A).

$$x^2 - y^2 - 2ly\cos\theta - l^2 = 0. \qquad (5)$$

Hyperbole équilatère ayant ses sommets réels en M' et N'.

3° *Lieu de* (NB, M'A).

$$(x^2 + y^2)\cos 2\theta - 2lx\sin\theta - l^2 = 0. \qquad (6)$$

Circonférence de cercle.

4° *Lieu de* (NA, MB).

$$x^2 - y^2 + 2ly\cos\theta\cos 2\theta - l^2\cos^2 2\theta = 0. \qquad (7)$$

Hyperbole équilatère.

5° *Lieu de* (N'A, M'B).

$$x^2 - y^2 - 2ly\cos\theta\cos 2\theta - l^2\cos^2 2\theta = 0. \qquad (8)$$

Hyperbole équilatère.

On peut encore ajouter les lieux suivants :

6° *Lieu de* (NA, M'B).

$$x^2 + y^2 + 2lx\sin\theta - l^2\cos 2\theta = 0. \qquad (9)$$

Circonférence de cercle.

7° *Lieu de* (N'A, MB).

$$x^2 + y^2 - 2lx\sin\theta - l^2\cos 2\theta = 0. \qquad (10)$$

Circonférence de cercle.

8° *Lieu de* (N'B, MA).

$$(x^2 + y^2)\cos 2\theta + 2lx\sin\theta - l^2 = 0. \qquad (11)$$

Circonférence de cercle.

On trouve encore que tous les lieux du genre (MA, M'B) sont des coniques.

M. Déprez a également donné une solution analytique de la même question, en prenant pour axes de coordonnées les droites Ox, Oy.

Question 884.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 104).

En un point M *quelconque d'une ellipse donnée, on mène la tangente qui rencontre les axes en* T *et* T', *ainsi que la normale qui rencontre les axes en* N *et* N'. *Montrer que :* 1° *les cercles décrits sur* TT' *et* NN' *comme diamètres sont orthogonaux :* 2° *le point de rencontre de ces cercles, autre que le centre de l'ellipse, a pour lieu géométrique la podaire du centre d'une ellipse ;* 3° *le cercle de diamètre* NN' *enveloppe la podaire du centre d'une ellipse ;* 4° *la ligne des centres des deux cercles enveloppe une ellipse.*

(E. N. Barisien.)

Solution par M. Retali. Soient O le centre de l'ellipse donnée, t et n les milieux des segments TT' et NN' ou les centres des cercles OTT', ONN' : les angles nON, nNO, OT'T, T'Ot sont égaux entre eux et par conséquent les deux cercles OTT', ONN', sont orthogonaux.

Les équations des droites TT', NN' sont :

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=1, \quad \frac{a^2x}{x'}-\frac{b^2y}{y'}=c^2,$$

où x' et y' sont les coordonnées du point M. Les coordonnées du point t sont donc $\frac{a^2}{2x'}$ et $\frac{b^2}{2y'}$; et celles du point n sont $\frac{c^2x'}{2a^2}$ et $-\frac{c^2y'}{2b^2}$.

Le lieu du point n est par conséquent l'ellipse

$$4a^2x^2+4b^2y^2=c^4. \tag{1}$$

L'équation de la droite nt est

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & \frac{a^2}{2x'} & \frac{b^2}{2y'} \\ 1 & \frac{c^2x'}{2a^2} & -\frac{c^2y'}{2b^2} \end{vmatrix}=0;$$

si nous retranchons, de la deuxième colonne multipliée par x', la troisième multipliée par y', on obtient

$$\begin{vmatrix} 1 & xx'-yy' & y \\ 1 & \frac{c^2}{2} & \frac{b^2}{2y'} \\ 1 & \frac{c^2}{2} & -\frac{c^2y'}{2b^2} \end{vmatrix}=0;$$

en soustrayant la deuxième ligne de la troisième, nous avons définitivement

$$xx'-yy'=\frac{c^2}{2}.$$

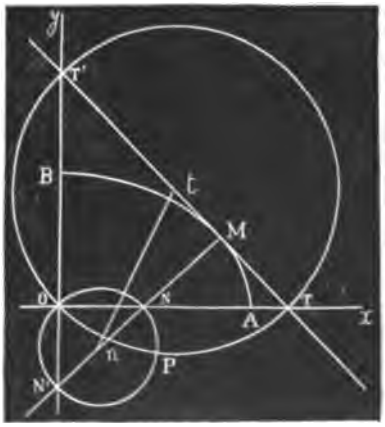
Donc nt est la tangente à l'ellipse (1) au point n; l'enveloppe de la droite nt est donc la même ellipse (1).

Cela posé, le point de rencontre des cercles OTT' et ONN', autre que le centre de l'ellipse donnée, est le symétrique P du centre O par rapport à la tangente nt de l'ellipse (1); le lieu du point P est donc la podaire du point O par rapport à l'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2=c^4, \tag{2}$$

homothétique à l'ellipse (1), O étant le centre et 2, le module d'homothétie.

L'enveloppe de la circonférence NON', dont le centre n décrit l'ellipse (1), et qui passe par le point fixe O, est elle-même, d'après un théorème bien connu (*), la podaire du centre O par rapport à l'ellipse (2). Cette enveloppe est touchée par le cercle mobile NON' au point P; son équation est



$$(x^2+y^2)^2 - c^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) = 0.$$

Solution par M. Sollertinsky. 1° Le cercle des neuf points du triangle N'TT' passe par le centre O de l'ellipse; les milieux t, n des droites TT', NN' étant diamétralement opposés sur ce cercle, l'angle $tOn = \frac{1}{2}\pi$.

En considérant la développée d'une ellipse comme la projection orthogonale d'une hypocycloïde à quatre rebroussements (**), on en conclut que le point qui divise le segment NN' dans un rapport constant décrit une ellipse E' (***) coaxiale avec l'ellipse donnée.

Les tangentes à ces ellipses E', dans chaque position de NN', enveloppent une parabole P, inscrite au triangle NON'. La droite TT' étant l'une de ces tangentes (†), le foyer F de P est au second point de rencontre des cercles t, n. La droite tn est donc la tangente à l'ellipse décrite par le point n, et le milieu de OF parcourt la podaire de cette ellipse, relative à son centre O. De là :

2° Le point F parcourt la podaire de l'ellipse décrite par le quatrième sommet O' du rectangle NON'O'.

(*) V. p. ex. Salmon, *Courbes Planes*, § 348. Ex. 6.

(**) En posant $x = \frac{b}{a}x$ dans l'équation $(ax^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$ de la développée on la ramène à celle de l'hypocycloïde $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{c^2}{b}\right)^{\frac{2}{3}}$.

(***) La contre-projection de NN' a une longueur constante, et la projection ne change pas le rapport des segments d'une droite.

(†) Le point M divise NN' dans le rapport $(b^2 : a^2)$.

3° D'après une construction connue des tangentes aux podaires, la circonférence FO'O touche cette podaire en F.

REMARQUE. La perpendiculaire en F sur FM rencontre MT, MN aux points μ, μ' de contact de ces droites avec la parabole P. Le lieu de μ' est donc la développée de l'ellipse, et on voit sans peine que μ est le centre de courbure en M de l'hyperbole confocale. *Le lieu de ce point μ est une Kreuzcurve.* (Question 829, p. 47).

MM. DÉPREZ et DROZ-FARNY nous ont également adressé de bonnes solutions, se rapprochant en quelques points des précédentes. Nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de reproduire ces solutions.

Comparez la question 411 de la N. C. M. (Mennesson), résolue *Mathesis*, 1893, pp. 75-78.

×Question 862.

(Voir *Mathésis*, (2), III, p. 176).

D'un point D *pris sur une tangente* DA *à une circonférence donnée* O, *on mène une sécante* DBC *de manière que la droite joignant les points de Brocard du triangle* ABC *soit perpendiculaire à* BC. *Démontrez que l'orthocentre de ce triangle est situé sur le diamètre* DO *et que l'aire du triangle est maximum.* (SOLLERTINSKY.)

Solution par A. DROZ FARNY. Représentons par E le milieu de BC, par AHF la hauteur (H étant l'orthocentre), par α et δ les angles ODA et EDA. On a

$$OE = OD \sin(\delta - \alpha), \quad DE = OD \cos(\delta - \alpha),$$
$$AF = AD \sin\delta = OD \cos\alpha \sin\delta, \quad FD = OD \cos\alpha \cos\delta,$$
$$FH' = AF - AH = OD \cos\alpha \sin\delta - 2OD \sin(\delta - \alpha).$$

Ecrivons que l'orthocentre se trouve sur la droite OD :

$$\frac{\sin(\delta - \alpha)}{\cos(\delta - \alpha)} = \frac{\cos\alpha \sin\delta - 2\sin(\delta - \alpha)}{\cos\alpha \cos\delta},$$

d'où

$$\sin 2(\delta - \alpha) = \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha.$$

Or c'est justement cette relation (*Mathesis*, IX, p. 192) qui fournit la condition du maximum du triangle. Exprimons les mêmes quantités en fonction des éléments du triangle. On aura

$$OE = R \cos A, \quad FH = 2R \cos B \cos C,$$
$$\frac{DC}{b^2} = \frac{DB}{c^2} = \frac{a}{b^2 - c^2} = \frac{2DE}{b^2 + c^2}.$$

Donc

$$DE = \frac{a(b^2 + c^2)}{2(b^2 - c^2)}.$$

Mais

$$EF = \frac{b^2 - c^2}{2a};$$

donc

$$DF = \frac{a^2(b^2 + c^2) - (b^2 - c^2)^2}{2a(b^2 - c^2)}.$$

En écrivant de nouveau que l'orthocentre se trouve sur DO, on obtient, après quelques réductions

$$a^2(b^2 + c^2) = b^4 + c^4,$$

relation donnée par M. Lemoine (*Mathesis*, V, p. 103) et qui exprime que la droite de Brocard est perpendiculaire sur BC.

M. Déprez a résolu la même question.

M. Sollertinsky indique la construction suivante de la sécante DBC qui correspond au triangle maximum ABC : Soient A′ le point de contact de la seconde tangente issue de D, A_1 le point du cercle O diamétralement opposé à A ; la circonférence de centre A_1 et de rayon A_1A rencontrant le rayon OA′ en F, DBC est perpendiculaire à la droite AF.

Question 881.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 240).

On décrit une conique Δ *ayant pour centre le point* M *et passant par les points d'incidence des normales abaissées de* M *sur une parabole donnés. Trouver le lieu de* M *par la condition que la conique* Δ *passe par le sommet de la parabole.* (E. N. Barisien.)

Solution par MM. Mandart, Droz-Farny, Gillet, Verdeyen *et* Greenstreet. La parabole ayant pour équation

$$y^2 - 2px = 0, \qquad (P)$$

les points d'incidence des normales menées de M (α, β) sont sur la circonférence (*circonférence de Joachimsthal*) :

$$x^2 + y^2 - (p + \alpha)x - \frac{\beta y}{2} = 0. \qquad (C)$$

Toute conique passant par ces points et par l'origine a pour équation

$$x^2 + y^2 - (p + \alpha)x - \frac{\beta y}{2} + \lambda(y^2 - 2px) = 0. \qquad (\Delta)$$

Pour que le centre de (Δ) soit le point M ($\alpha\beta$), on doit avoir

$$\alpha - p - 2p\lambda = 0, \quad 3 + 4\lambda = 0,$$

d'où en éliminant λ :

$$\alpha + \frac{p}{2} = 0, \qquad (M)$$

c'est-à-dire que M décrit la directrice.

×Question 888.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 263).

Les traces d'un plan font avec la ligne de terre les angles α et β; les projections d'une droite font avec la ligne de terre les angles α' et β'. Démontrer que la condition de parallélisme du plan et de la droite est

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\beta'}{\operatorname{tg}\beta} = 1.$$

En déduire les angles que font avec la ligne de terre les projections de l'intersection de deux plans dont on donne les angles des traces avec la ligne de terre. (A. C.)

Solution par MM. C. J. François (*La Haye*), de Bōzóky *et* Déprez. Quand une ligne est parallèle à un plan on peut tracer dans le plan une parallèle à cette ligne dont les projections feront aussi des angles α, β avec la ligne de terre. Soient B' et A'' les traces de cette ligne dont les autres projections B'' et A' se trouvent sur la ligne de terre. Désignant par V le point d'intersection du plan avec la ligne de terre, on trouve successivement :

$$VB'' - VA' = A'B'' \quad \text{ou} \quad \frac{VB''}{A'B''} - \frac{VA'}{A'B''} = 1,$$

$$\frac{B'B''}{A'B''} \cdot \frac{VB''}{B'B''} - \frac{A'A''}{A'B''} \cdot \frac{VA'}{A'A''} = 1, \quad \operatorname{tg}\alpha' \cdot \operatorname{cotg}\alpha - (-\operatorname{tg}\beta') \cdot \operatorname{cotg}\beta = 1;$$

donc

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{\operatorname{tg}\beta'}{\operatorname{tg}\beta} = 1.$$

Quand cette ligne se trouve aussi dans un autre plan dont les traces font avec la ligne de terre les angles α_1, β_1 on a de même

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha_1}+\frac{\operatorname{tg}\beta'}{\operatorname{tg}\beta_1}=1;$$

de ces deux équations, l'on tire pour l'intersection de deux plans :

$$\operatorname{tg}\alpha'=\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\alpha_1(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta_1)}{\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta_1},\quad \operatorname{tg}\beta_1=\frac{\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\beta_1(\operatorname{tg}\alpha_1-\operatorname{tg}\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta_1}.$$

M. HACKEN a résolu la même question en rapportant la figure à deux axes rectangulaires.

×Question 896.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 280).

Le plus petit multiple de $1, 2, 3, \ldots, 2n$ ***est égal à celui de*** $n+1, n+2, \ldots, 2n$. (E. CATALAN.)

Solution par MM. HACKEN, LISTRAY *et* VERDEYEN. Dans la recherche du moindre multiple de plusieurs nombres, on peut supprimer ceux de ces nombres qui en divisent d'autres. Appliquant cette remarque au moindre multiple des nombres $1, 2, 3, \ldots, 2n$, on supprimera les nombres $1, 2, 3, \ldots, n$, dont les doubles se trouvent parmi les nombres $n+1, n+2, \ldots, 2n$.

M. Hacken généralise ainsi le théorème de M. Catalan : Le plus petit multiple des nombres

$$1, 2, 3, \ldots, a, b, b+1, \ldots, b+a-1.$$

est le même que celui des nombres

$$b, b+1, \ldots, b+a-1. \qquad (1)$$

En effet, parmi les a nombres consécutifs (1) il s'en trouve au moins un divisible par l'un des nombres $1, 2, \ldots, a$.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

948. Soit un triangle isoscèle OAB, ayant pour côtés égaux OA et OB, et pour hauteur OH ; on décrit, de O comme centre, un cercle C, de rayon arbitraire, et on lui mène deux tangentes, non symétriques par rapport à OH, issues l'une de A, l'autre de B ; ces tangentes se coupent en M.

1° Lieu de M, lorsque le rayon du cercle C varie. 2° Lieu du point I, obtenu en portant sur MB une longueur MI = MA. 3° Le produit

$$MA.MB = \pm(\overline{OA}^2 - \overline{OM}^2).$$

(*Concours général en Troisième classique, en* 1893.)

1° Soient D et E les points de contact de AM, BM avec le cercle C. Les triangles rectangles OAD, OBE étant égaux (OA = OB, OD = OE), les angles OAM, OBM sont égaux; le lieu de M est donc la circonférence circonscrite au triangle OAB.

2° L'angle AMB étant constant (= AOB), il en est de même de l'angle AIB, et le lieu de I est une circonférence. On obtient une seconde circonférence de centre O en prenant sur le prolongement de BM une longueur $MI_1 = MA$.

3° Si l'on prolonge BM de $MI_1 = MA$, et AM de $MI'_1 = MB$, les points A, B, I_1, I'_1, appartiennent à une même circonférence. Donc

$$MA.MB = MI_1.MB = \overline{OA}^2 - \overline{OM}^2.$$

La figure suppose M situé sur l'arc AOB. Si M est sur le second arc sous-tendu par la corde AB dans la circonférence AOB, on a $MA.MB = \overline{OM}^2 - \overline{OA}^2$.

649. On coupe un trièdre O*xyz* par un plan P qui rencontre les arêtes aux points A, B, C.

Trouver le lieu du centre de gravité du triangle ABC :

1° Lorsque le plan P se déplace, de manière que le point A reste fixe;

2° Lorsque le plan P se déplace, de manière que la droite AB reste fixe;

3° Lorsque le plan P se déplace, de manière que les différences OB — OA et OC — OA restent constantes.

(*Concours général en Seconde classique*, 1893.)

1° Plan parallèle à la face O*yz* et divisant dans le rapport de 2 : 1 la distance du point A à cette face. 2° Droite parallèle à O*z* et divisant dans le rapport 2 : 1 la droite joignant O au milieu de la droite AB 3° Prenons sur O*y* une longueur OB′ = OA, sur O*z* une longueur OC′ = OA, et soient G′, G″, G les centres de gravité des triangles AB′C′, ABC′, ABC. Lorsque OA varie, le point G′ décrit une droite O*u* (Théorème connu). Si M est le milieu de AC′, G′ et C″ divisent MB′, MB dans un même rapport; donc G′G″ est parallèle à BB′ et égale à $\frac{1}{3}$ BB′. De même G″G est parallèle à C′C et égale à $\frac{1}{3}$ CC′. Les longueurs BB′, CC′ étant constantes, on voit que G″ et G décrivent des droites parallèles à O*u*.

650. Le plus grand commun diviseur des nombres a et b est le même que celui des nombres

$$a + bc, \quad a + b(c - 1).$$

(*École normale primaire supérieure de Fontenay-aux-Roses*, 1893.)

651. Résoudre le système

$$x+y+z=1, \quad mx+y+z=0, \quad x+y+nz=0.$$

Quelle relation doit exister entre m et n pour que x, y, z soient les termes consécutifs d'une progression géométrique.

Réponse : $(mn-1)^2=(m-1)(n-1)$.

652. Déterminer le point M de la parabole pour lequel la corde commune au cercle osculateur et à la parabole passe par le foyer F.

Cette corde et la tangente en M ayant des directions antiparallèles, l'équation de la corde est

$$y-y_1=-\frac{p}{y_1}(x-x_1).$$

Comme elle est vérifiée par $y=0, x=\frac{p}{2}$, on a à résoudre les deux équations

$$y_1^2+px_1=\frac{p^2}{2}, \quad y_1^2=2px_1;$$

on trouve

$$x_1=\frac{1}{6}p, \quad y_1=\frac{p}{\sqrt{3}}.$$

(Barisien.)

653. Connaissant l'angle α de la trace horizontale d'un plan PP′ avec la ligne de terre et l'angle β de ce plan avec le plan horizontal, trouver l'angle x de la trace verticale avec la ligne de terre et l'inclinaison y du plan PP′ sur le plan vertical.

(Baccalauréat, Clermont, 1892.)

Solution : $\operatorname{tg} x=\sin\alpha\operatorname{tg}\beta, \quad \operatorname{tang}\alpha=\operatorname{tang} y\sin x.$

654. Dans un triangle rectangle ABC, on donne l'hypoténuse BC $= a$, et la somme s du côté AB et de la médiane correspondante. calculer AB $= x$.

Equation : $\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{x^2}{4}+a^2-x^2}=s$, ou $x^2-sx+s^2-a^2=0$.

655. La base BC d'un triangle ABC étant divisée en trois parties égales BQ, QR, RC, on a

$$\sin \mathrm{BAR}.\sin \mathrm{CAQ}=4\sin \mathrm{BAQ}.\sin \mathrm{CAR},$$
$$(\cot \mathrm{BAQ}+\cot \mathrm{QAR})(\cot \mathrm{CAR}+\cot \mathrm{RAQ})=4\operatorname{cosec}^2 \mathrm{QAR}.$$

(Miller).

956. Soient AA′, BB′, CC′ les hauteurs d'un triangle ABC, et H leur point de concours. On projette H en L et L′ sur la bissectrice intérieure et sur la bissectrice extérieure de l'angle BAC; démontrer que la droite LL′ passe par le milieu du côté BC. (Droz Farny.)

L et L′ sont les milieux des deux arcs sous-tendus par la corde B′C′ dans la circonférence qui a pour diamètre AH; donc LL′ est perpendiculaire au milieu de B′C′ et, par suite, passe par le centre de la circonférence BC′B′C.

QUESTIONS PROPOSÉES.

974. En chaque point d'une ellipse, on considère le cercle ayant pour centre ce point et pour rayon le rayon du cercle osculateur. Le lieu des points d'intersection de ce cercle avec la tangente à l'ellipse est une courbe dont l'aire est équivalente à deux fois l'aire de l'ellipse, augmentée de l'aire de sa développée. (E. N. Barisien.)

975. 1° Une droite (Δ) rencontre une strophoïde droite en trois points A, B, C, et la perpendiculaire à l'axe passant par le point double en un point K. Si P est la projection du point double O sur (Δ), et si δ désigne la distance du sommet à l'asymptote, on a la relation

$$OA.OB.OC = OK.OP.\delta.$$

2° Un cercle (Γ) de centre ω rencontre la strophoïde en quatre points A′, B′, C′, D′. Si S est le sommet de la courbe et si p désigne la puissance de O par rapport au cercle (Γ), on a la relation

$$OA'.OB'.OC'.OD'.\overline{S\omega} = \tfrac{1}{2}\,\delta.p^2. \quad \text{(E. N. Barisien.)}$$

976. Une droite (Δ) rencontre une lemniscate de Bernoulli en quatre points A, B, C, D. Si P est la projection du point double O sur (Δ) et si a désigne la longueur du demi-axe de la lemniscate, on a la relation

$$OA.OB.OC.OD = 2\overline{OP}^2.a^2. \quad \text{(E. N. Barisien.)}$$

977. Par un point fixe M de l'axe d'une parabole (P) de sommet O, on mène une corde quelconque AB. Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OAB est une parabole. (E. N. Barisien.)

978. Une courbe fermée plane C tourne dans son plan autour d'un point O. On envisage la courbe C_1, lieu du point de cette courbe pour lequel la tangente est parallèle à une direction fixe.

1° On demande de construire la tangente en un point de C_1.

2° Démontrer que l'aire limitée par la courbe C_1 est minima quand le point O se confond avec le centre de gravité de la courbe C, la densité en chaque point de cette courbe étant supposée proportionnelle à la courbure.

3° Ω désignant cette aire minima, et Ω' l'aire relative à un autre centre de rotation O', démontrer la relation

$$\Omega' = \Omega + \pi \overline{OO'}^2 \qquad \text{(R. Bricard.)}$$

Le centre de gravité dont il est question au 2°, a été considéré pour la première fois par Steiner (*Œuvres complètes*, t. II, p. 99 : *Journal de Crelle*, t. XXI, p. 33), qu'il l'a appelé *centre de gravité de courbure;* on pourrait dire plus simplement *barycentre de courbure.* (J. N.)

979. Étant donnée une courbe fermée plane C, on porte sur chaque tangente à cette courbe, à partir du point de contact M, une longueur constante $MN = a$. Le lieu du point N est une certaine courbe fermée C_1.

Démontrer que si l'on fait varier la longueur a, le centre de gravité de l'aire limitée par la courbe C_1 décrit une demi-droit (R. Bricard.)

***980.** On donne deux plans P, P' et deux droites quelconques D, D'. On projette un point quelconque M de P en M' sur P' au moyen d'une droite rencontrant D et D' ; M' est la *projection gauche* de M. Démontrer que deux figures correspondantes tracées ainsi dans les plans P, P' restent encore l'une la projection gauche de l'autre lorsque l'un des plans P, P' tourne autour de l'intersection de ces plans (*).

***981.** On donne deux points A, B et une droite d non situés dans un même plan. Trouver sur la droite un point X dont la somme des distances XA + XB aux deux points donnés soit minimum.

***982.** a, b, c étant des nombres réels, démontrer que les racines de l'équation

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} = \frac{3}{x} \qquad \text{(J. N.)}$$

sont toujours réelles.

Rectification. Dans la question 935 (p. 104), on doit supposer a positif et au moins égal à b.

(*) Ce théorème a été énoncé sans démonstration par Transon dans un intéressant article sur la projection gauche (*N. A. M.*, 1865, p. 64).

SUR UNE ELLIPSE ASSOCIÉE AU TRIANGLE;

par M. H. MANDART, professeur agrégé.

1. Sur les médiatrices A'O, B'O, C'O du triangle ABC, à partir des milieux A', B', C' des côtés, prenons trois longueurs égales, —

$$A'P_a = B'P_b = C'P_c = \lambda,$$

toutes trois vers l'intérieur ou l'extérieur du triangle, et traçons $P_aP_bP_c$.

Soient A_1, B_1, C_1 les points de contact des cercles ex-inscrits avec les côtés BC, CA, AB du triangle ABC.

Les perpendiculaires abaissées de ces points sur les côtés correspondants de $P_aP_bP_c$ se coupent en un point Q.

Nous allons étudier le lieu décrit par Q quand λ varie.

2. Si des points A, B, C, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés du triangle $P_aP_bP_c$, ces perpendiculaires ont pour équations :

$$x(R\cos A - \lambda) = y(R\cos B - \lambda) = z(R\cos C - \lambda)\ (*).$$

L'équation d'une perpendiculaire abaissée sur P_bP_c sera donc :

$$(1)\qquad y(R\cos B - \lambda) - z(R\cos C - \lambda) + K(ax + by + cz) = 0.$$

Exprimons que cette droite passe par A_1; nous aurons, tous calculs faits :

$$K = \frac{p(b-c)(R-\lambda)}{abc},$$

et, par suite, l'équation (1) deviendra :

$$y(R\cos B - \lambda) - z(R\cos C - \lambda) + \frac{p(b-c)(R-\lambda)}{2R} = 0.$$

Nous aurons pour les perpendiculaires abaissées de B_1, C_1 sur P_aP_c, P_aP_b, deux équations analogues.

Si $\lambda = R$, ces perpendiculaires passent par les sommets du triangle, et se confondent avec les droites AA_1, BB_1, CC_1.

(*) La perpendiculaire Aα abaissée de A sur P_bP_c a pour équation

$$y \sin \alpha AB = z \sin \alpha AC;$$

mais les angles αAB, αAC sont égaux à OP_cP_b, OP_bP_c; donc leurs sinus sont entre eux comme $OP_b : OP_c$.

Le lieu de Q s'obtient en éliminant λ entre les équations de deux de ces perpendiculaires. Le résultat de l'élimination est

$$\Sigma(\cos B - \cos C)\,yz - \frac{p}{2R}\Sigma(b-c)(1-\cos A)\,x = 0.$$

La courbe passe par les points où l'hyperbole de Feuerbach représentée par l'équation

$$\Sigma(\cos B - \cos C)\,yz = 0,$$

coupe la droite

$$\Sigma(b-c)(1-\cos A)\,x = 0.$$

Ces points sont le point de Nagel et un point μ dont les coordonnées normales sont

$$p-a,\quad p-b,\quad p-c;$$

μ est le complémentaire du point de Gergonne.

Lorsque

$$\lambda = \frac{R \pm \sqrt{R(R-2r)}}{2},$$

le triangle $P_aP_bP_c$ se réduit à deux droites L et L' (voir ***Mathesis***, tome XIII, page 115).

Les points correspondants de la courbe sont à l'infini. La courbe est donc une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles à L et L'.

Ces asymptotes sont aussi parallèles à celles de l'hyperbole de Feuerbach.

La courbe est évidemment circonscrite au triangle $A_1B_1C_1$.

3. Toute conique inscrite dans un triangle a pour équation en coordonnées barycentriques :

$$\sqrt{A\alpha} + \sqrt{B\beta} + \sqrt{C\gamma} = 0.$$

Si cette conique touche les côtés du triangle aux points A_1, B_1, C_1, on aura entre les paramètres A, B, C les relations suivantes :

$$A(p-a) = B(p-b) = C(p-c),$$

de sorte que la conique considérée a pour équation

$$\sqrt{\frac{\alpha}{p-a}} + \sqrt{\frac{\beta}{p-b}} + \sqrt{\frac{\gamma}{p-c}} = 0.$$

C'est une ellipse dont le centre a pour coordonnées barycentriques

$$\alpha : \beta : \gamma = a(p-a) : b(p-b) : c(p-c);$$

c'est donc le point μ dont il est parlé plus haut.

4. Il est facile de voir que l'ellipse μ passe par le point F de contact du cercle inscrit et du cercle des neuf points; ce point F ayant pour coordonnées barycentriques

$$\alpha : \beta : \gamma = (b-c)^2(p-a) : (c-a)^2(p-b) : (a-b)^2(p-c).$$

5. Les puissances du cercle $A_1B_1C_1$ par rapport aux trois sommets de ABC sont

$$u = \frac{abc - 2p(p-b)(p-c)}{2(p-a)}, \quad v = \frac{abc - 2p(p-a)(p-c)}{2(p-b)},$$

$$w = \frac{abc - 2p(p-a)(p-b)}{2(p-c)}.$$

On en déduit facilement son équation.

L'axe radical de ce cercle et du cercle inscrit a pour équation

$$\Sigma\left[(p-a)^2 - \frac{abc - 2p(p-b)(p-c)}{2(p-a)}\right]\alpha = 0.$$

Effectuant les calculs, on trouve, pour l'équation de cette droite,

$$(2) \qquad \frac{\alpha(b+c)}{(b-c)(p-a)} + \frac{\beta(c+a)}{(c-a)(p-b)} + \frac{\gamma(a+b)}{(a-b)(p-c)} = 0.$$

Sous cette forme, on voit qu'elle est vérifiée par les coordonnées de F, de sorte que le cercle $A_1B_1C_1$ passe également par ce point.

6. Les trois normales à l'ellipse μ aux points A_1, B_1, C_1, se coupent en un point W, symétrique de I par rapport à O. Donc le cercle $A_1B_1C_1$ est le cercle de Joachimsthal relatif au point W. Le pied de la quatrième normale est le point de μ diamétralement opposé au point F.

L'hyperbole équilatère (Q) est l'hyperbole passant par les pieds des quatre normales issues de W et par le centre de l'ellipse; ses asymptotes sont donc parallèles aux axes de l'ellipse μ.

Les axes de cette ellipse sont donc parallèles aux droites L et L'.

7. Soit I' le centre de gravité du périmètre du triangle ABC; appelons U le foyer de la parabole enveloppe des axes d'homologie des triangles A'B'C' et $P_aP_bP_c$ (Voir *Mathesis*, tome XIII, page 12).

L'équation de cette parabole par rapport à ABC est

$$\frac{\alpha^2}{\cos B - \cos C} + \frac{\beta^2}{\cos C - \cos A} + \frac{\gamma^2}{\cos A - \cos B} = 0,$$

ou

$$\Sigma \frac{\alpha^2}{(b-c)(p-a)} = 0.$$

La polaire de I′ par rapport à cette parabole est représentée par l'équation (2).

L'axe radical du cercle inscrit et du cercle $A_1B_1C_1$ est donc la droite FU, car I′ est un point de la directrice de la parabole U.

La ligne I′U est aussi perpendiculaire à FU. Soit V le quatrième point de section de l'hyperbole de Feuerbach avec le cercle circonscrit, et soit F′ le point du cercle des neuf points diamétralement opposé à F.

La droite IV étant parallèle à sa complémentaire UI′F′ est aussi perpendiculaire à l'axe radical FU, de sorte que la droite IU passe par le centre M du cercle $A_1B_1C_1$.

8. La tangente à l'ellipse au point F a pour équation

$$\frac{\alpha}{\cos B - \cos C} + \frac{\beta}{\cos C - \cos A} + \frac{\gamma}{\cos A - \cos B} = 0.$$

C'est la polaire du centre de gravité G par rapport à la parabole de foyer U.

GI′ ou II′ est donc la polaire de F par rapport à cette parabole.

9. L'axe radical du cercle $A_1B_1C_1$ et du cercle des neuf points a pour équation

$$\Sigma \left[\frac{abc - 2p(p-b)(p-c)}{2(p-a)} - \frac{bc\cos A}{2} \right] \alpha = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$\frac{\alpha}{\cos B - \cos C} + \frac{\beta}{\cos C - \cos A} + \frac{\gamma}{\cos A - \cos B} = 0;$$

cette dernière équation est identique à celle qui représente la tangente en F à l'ellipse μ; cette tangente est donc l'axe radical du cercle $A_1B_1C_1$ et du cercle des neuf points.

La projection μ_1 du centre μ sur la tangente en F étant située sur le cercle $A_1B_1C_1$ (cercle de Joachimsthal), on en conclut que le cercle

$A_1B_1C_1$, le cercle des neuf points et le cercle décrit sur $F\mu$ comme diamètre ont deux points communs F et μ_1.

$\mu\mu_1$ étant perpendiculaire à $F\mu_1$, passe par F' et par l'extrémité N du diamètre FMN du cercle $A_1B_1C_1$.

10. Le centre du cercle $A_1B_1C_1$ est donné par les équations

$$F'_\alpha = F'_\beta = F'_\gamma;$$

on en tire

$$\frac{\alpha}{\rho} = (v-u)(a^2+b^2-c^2) + (w-u)(a^2+c^2-b^2) + a^2(b^2+c^2-a^2),$$

ρ étant un facteur de proportionnalité.

On trouve facilement

$$u - v = -\frac{c(a-b)\cos C}{1-\cos C}; \quad v - w = -\frac{a(b-c)\cos A}{1-\cos A}; \quad \text{etc.}$$

Remplaçant dans l'expression de $\frac{\alpha}{\rho}$, on a

$$\frac{\alpha}{\rho'} = a\left[2R\cos A - r - \frac{bc}{2R}\cos A\right].$$

11. Soit ν le point de Nagel; νW a pour équation

$$\Sigma(1-\cos A)(\cos B - \cos C)(2R\cos A - r)x = 0$$

IV a pour équation :

$$\Sigma(\cos B - \cos C)(R\cos A - r)x = 0.$$

Si l'on cherche les coordonnées du point d'intersection de ces droites, on trouve pour x :

$$\frac{x}{\rho} = 2R\cos A - r - \frac{bc}{2R}\cos A.$$

Les droites νW et IV se coupent donc au centre M du cercle $A_1B_1C_1$.

12. Les droites VI et $W\nu$ sont également inclinées sur les axes de l'ellipse μ.

Car ces axes, étant parallèles aux asymptotes de l'hyperbole de Feuerbach, sont parallèles aux bissectrices de l'angle HTV. Puisque HI est parallèle à $W\nu$, il en résulte que les bissectrices de l'angle des deux droites VI et $W\nu$ sont parallèles aux axes de μ.

BIBLIOGRAPHIE.

Geometrical Conics. Part I, The Parabola, Part II, The Central Conic. By the Rev. JOHN J. MILNE and R. F. DAVIS. London, Macmillan and Co, 1894 (In-8°, XI — 213 p.) Prix : 4 s 6 d.

Les auteurs se sont proposé de démontrer les propriétés des coniques à la manière des anciens, comme Euclide et Apollonius. La première partie, qui avait paru séparément en 1890, a été favorablement accueillie en Angleterre. Nous recommandons volontiers à nos lecteurs ce petit traité qui renferme une théorie complète des coniques, si l'on fait abstraction des propositions qui appartiennent à la géométrie analytique (Invariants, covariants, etc.) ou à la géométrie projective (Homographie, involution, etc.) : il est très suggestif et peut être consulté utilement par les étudiants qui suivent un cours de géométrie analytique; on y rencontre un bon choix d'exercices. Voici la table des matières :

I. Définition et description de la parabole. Propriétés des cordes et tangentes, des normales, des diamètres. Théorie des enveloppes. Intersection d'une parabole avec une circonférence. Courbure. Paraboles homofocales. Paraboles ayant un foyer commun sans avoir le même axe. Aire. Propositions diverses. Circonférence touchant la parabole et passant par le foyer. Droite de Simson et orthocentre. Normales concourantes. Exemples (100 exercices), avec des indications pour les solutions.

II. Définitions et descriptions des coniques à centre. Propriétés des cordes et tangentes. Enveloppes. Diamètres. Asymptotes. Hyperbole équilatère. Normales. Intersection d'une conique avec une circonférence. Courbure. Coniques homofocales. Coniques semblables. Triangle maximum inscrit à une ellipse. Théorème de Frégier. Relation $TF.TF' = TP.TQ + OP'.OQ'$ (*). Théorème de Carnot. Théorème de Maclaurin. Locus ad tres lineas; valeur de K dans l'équation $\alpha\beta = K\gamma^2$ (**). Locus ad quatuor lineas; valeur de K dans l'équation $\alpha\gamma = K\beta\delta$ (***). Théorème de Stewart (iv). Quadrilatère inscrit. Génération d'une conique au moyen de deux angles mobiles (Théorème de Newton). (J. N.).

(*) F et F' sont les foyers d'une ellipse; TP et TQ, les tangentes menées d'un même point T et limitées à leurs points de contact; OP' et OQ', les rayons parallèles à ces tangentes.

(**) α, β, γ sont les distances d'un point d'une conique à une corde AB et aux tangentes AC, BC menées à ses extrémités. Si $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sont les longueurs des diamètres parallèles à BC, CA, AB, on a : $K = \frac{\gamma_1^2}{\alpha_1\beta_1}$. Cette valeur est peut-être nouvelle.

(***) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les distances d'un point d'une conique aux côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère inscrit. Si $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ sont les longueurs des diamètres parallèles à ces côtés, on a $K = \frac{\beta_1\delta_1}{\alpha_1\gamma_1}$, formule peut-être nouvelle.

(iv) Il s'agit de l'involution déterminée sur une transversale par une conique

Introduction à l'étude de la Théorie des nombres et de l'Algèbre Supérieure, par E. Borel et J. Drach. Paris, Nony, 17, rue des Écoles, 1895 (Gr. in-8° de 350 pages). Prix : 10 fr.

Ce volume, divisé en deux parties, est le résumé de ce que, dans la Préface, M. Tannery a bien voulu appeler ses conversations avec les élèves de l'École Normale sur l'Arithmétique et sur l'Algèbre, et ce que le lecteur appellera, avec plus de raison, nous semble-t-il, des conférences dogmatiques, dans lesquelles il avait abordé, en Arithmétique, la théorie des congruences amenée au point où l'a élevée Galois, et en Algèbre, la notion des domaines et des nombres algébriques, le mécanisme des substitutions, la formation des groupes et leur décomposition, enfin l'application de ces théories aux équations normales et aux équations abéliennes.

Sans doute, ces différentes théories ne sont pas entièrement développées; il faudrait pour cela des volumes spéciaux. Le but de l'auteur a été « non d'enseigner, mais de faire apprendre » et d'éveiller chez les étudiants le désir d'approfondir des théories dont les principes soient suffisamment élucidés.

MM. Borel et Drach, qui avaient suivi les conférences de M. Tannery, entraînés par un même élan de dévouement à la science, n'ont pas hésité à reconstituer les précieuses leçons de leur maître. Le public mathématique leur sera reconnaissant d'avoir, pour ainsi dire, vulgarisé des théories qu'il n'est pas toujours facile d'étudier dans les ouvrages de leurs illustres fondateurs.

Voici, à titre de renseignement, l'indication des chapitres des deux parties.

Première partie. Théorie des nombres (M. Borel).

I. Propriétés générales des congruences. II. Des congruences de module premier. III. Des congruences binômes. IV. Résidus quadratiques. Loi de réciprocité. V. Décomposition des nombres en carrés. Applications.

Deuxième partie. Algèbre supérieure (M. Drach).

I. L'Algèbre élémentaire. II. Les nombres algébriques. III. Les systèmes d'équations. IV. Le calcul des entiers algébriques. V. Les groupes des substitutions. VI. Les groupes résolubles. VII. Applications. Conclusion.

Et pour finir le volume, deux Notes, sur le théorème de Fermat et sur les imaginaires de Galois.

« Si ce livre, dit M. Tannery, a quelque valeur, c'est à M. Borel et à M. Drach qu'il faut en reporter le mérite. C'est malgré eux que je le dis, mais je dois au lecteur la vérité. Si d'ailleurs, comme ils le croient, j'ai réellement contribué à leur inspirer le goût de la science, cela me suffit amplement. »

Qu'il nous soit donc permis de compter bientôt sur d'autres ouvrages relatifs à ces difficiles sujets de méditation, que les deux jeunes géomètres possèdent si bien.

(H. B.).

---

et les côtés d'un quadrilatère inscrit ABCD dont un côté AB est parallèle à la transversale : Si P, P', Q, Q', O sont les intersections de la transversale avec la courbe et les côtés AD, BC, CD, on a : $OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'$.

Le calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques, par M. Maurice d'Ocagne. Conférences faites au Conservatoire national des arts et métiers les 26 février, 5 et 19 mars 1893. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1894 (118 pages in-8° avec 38 figures et 2 planches). Prix : 2,75 fr.

Les conférences de M. d'Ocagne avaient pour sujet l'historique rapide et la description sommaire, faits surtout à un point de vue général, des divers procédés qui ont été imaginés en vue de simplifier le calcul numérique. Ces procédés sont classés dans les cinq groupes suivants : 1° Instruments et machines arithmétiques ; 2° Instruments logarithmiques ; 3° Tracés graphiques ; 4° Tables numériques ou barèmes ; 5° Tables graphiques ou abaques.

L'auteur appelle *instruments arithmétiques* les appareils qui permettent d'opérer manuellement les opérations de l'arithmétique, sans le secours d'aucun mécanisme : ressorts, cames, engrenages ; il fait connaître successivement les additionneurs (arithmographe de Troncet), les multiplicateurs (bâtons de Néper et dérivés), les réglettes de Genaille et l'appareil Bollée. Dans les *machines arithmétiques*, on confie à un mécanisme le soin d'effectuer les opérations sur les nombres. La première machine de ce genre a été inventée par Pascal en 1642 ; la première en date de celles qui ont vraiment pénétré dans la pratique, est l'arithmomètre Thomas ; des machines excessivement ingénieuses ont été imaginées par Bollée, Babbage, Maurel, Tchebitchef, Scheutz père et fils.... La machine Scheutz ne se contente pas de calculer ; elle stéréotype, c'est-à-dire qu'elle fournit le résultat calculé imprimé en creux dans une lame de plomb ; on lui a ainsi, paraît-il, fait calculer et composer des Tables de logarithmes, de sinus et de logarithmes-sinus ! La première idée des échelles logarithmiques est due à Gunther, qui vécut de 1581 à 1626. — On leur a donné différentes dispositions : échelle circulaire, échelle hélicoïdale, échelles juxtaposées, règles à tiroir de Soho ou de Lenoir, règle à échelles repliées et curseur de M. Mannheim, ruban calculateur de M. de Viaris, etc. M. d'Ocagne explique avec une grande netteté le principe et les mécanismes des principaux appareils ; des figures bien faites accompagnent le texte.

La théorie générale des abaques a été constituée par l'auteur en un corps de doctrine sous le nom de *nomographie*, dans un ouvrage dont il a été rendu compte dans *Mathesis* (voir (2) t. I, p. 271) ; la troisième conférence donne un excellent sommaire de ce livre.

On voit par cette courte analyse, que le *Calcul simplifié* s'occupe de questions fort intéressantes et instructives. L'ouvrage étant bien écrit est appelé à un succès réel.

(J. N.)

Notions géométriques sur les complexes et les congruences de droites, par G. Fouret, examinateur d'admission à l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1893 (74 p. in-8°) Prix : 2 fr. 50.

Ces notions ont paru comme appendice à la traduction française de la Géométrie du mouvement par le Dr Schoenfliess et aussi comme opuscule séparé. Elles constituent une excellente introduction à la géométrie de l'espace réglé, géométrie dont

l'importance s'accentue tous les jours, et dont l'étude s'impose à tous ceux qui cultivent sérieusement les sciences mathématiques.

Nous conseillons à nos lecteurs de s'assimiler le livre de M. Fouret avant d'aborder les grands ouvrages de Plücker (*) ou de R. Sturm (**).

Voici la table des matières :

Introduction. Chap. I *Complexe linéaire. Système focal.* I. Pôles et plans polaires. Plans diamétraux. Diamètres et axe. Propriétés linéaires. II. Propriétés quadratiques. III. Relations métriques. Génération du complexe linéaire. IV. Complexe linéaire spécial. V. Construction d'un complexe linéaire contenant une droite donnée et admettant pour droites conjuguées deux autres droites données.

Chap. II. *Congruences linéaires. Faisceaux de complexes linéaires.* — I. Génération des congruences linéaires. II. Intersection des complexes et congruences linéaires. III. Faisceaux de complexes linéaires. Conoïde de Plücker. IV. Construction d'un complexe linéaire contenant cinq droites données.

Chap. III. *Généralités sur les complexes et les congruences de droites.* — I. Lignes et surfaces focales d'une congruence. II. Surface des singularités d'un complexe.

Chap. IV. *Le complexe tétraédral.* I. Définition et génération du complexe tétraédral. II. Quadriques d'un complexe tétraédral. III. Cubiques gauches d'un complexe tétraédral.

Chap. V. *Génération des congruences de droites du premier ordre et de classe quelconque.*

Notes. Équation générale du complexe linéaire. Sur le rôle du complexe linéaire dans la cinématique et la statique des solides invariables; sur le cône de Malus.

UN NOUVEAU JOURNAL DE MATHÉMATIQUES.

M. B. Niewenglowski, docteur ès sciences, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, membre du conseil supérieur de l'instruction publique, nous prie de vouloir bien avertir les intéressés qu'obligé de quitter, pour des raisons qui n'ont aucun rapport avec les mathématiques, la direction de la *Revue de Mathématiques spéciales* qu'il avait fondée il y a quatre ans, il fonde le **Bulletin de Mathématiques spéciales**, qui paraîtra tous les mois à la Société d'Éditions scientifiques, 4, rue Antoine Dubois, Paris, à partir du 30 octobre 1894.

(*) *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement.* Leipzig, Teubner (1 vol. 1868 et 1869).

(**) *Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung.* Ibid. (2 vol. 8°, 1893).

NOTES MATHÉMATIQUES.

17. ***Sur un paradoxe mathématique.*** Si on cherche l'enveloppe des paraboles ayant pour équation

$$py^2 = 2\lambda^2 [x - (p - \lambda)], \tag{1}$$

dans laquelle λ est le paramètre variable, on trouve la courbe

$$y^2 = \frac{8(x-p)^3}{27p}, \tag{2}$$

c'est-à-dire la développée de la parabole

$$y^2 = 2px. \tag{3}$$

Or, si l'on fait dans (1) $\lambda = p$, on retrouve (3).

Il semblerait donc, d'après cela, que la parabole (3) et sa développée sont tangentes.

Je dis qu'en effet ces deux courbes sont tangentes, mais imaginairement.

En éliminant y entre (2) et (3), on a l'équation

$$4(x-p)^3 - 27p^2x = 0,$$

qui peut s'écrire

$$(x - 4p)(2x + p)^2 = 0.$$

La racine simple $x = 4p$ correspond aux points d'intersection réels de (2) et (3). Quant à la racine double $x = -\frac{p}{2}$, elle indique que *la parabole et sa développée sont bitangentes entre elles et que la corde de contact est la directrice*; autrement dit, *le foyer, considéré comme cercle de rayon nul, la parabole et sa développée sont tangentes en deux points imaginaires situés sur la directrice.* (E. N. Barisien.)

Note. Un géomètre belge trop peu connu, L. Houtain, a signalé depuis longtemps le paradoxe dont il est question ci-dessus, dans sa remarquable théorie *des solutions singulières* (Bruxelles, 1854).

Dans nos leçons à l'Université de Gand, nous citons chaque année, d'après Houtain, l'exemple suivant : L'enveloppe des cercles

$$y^2 + x^2 - 2ax + 2a^2 = R^2$$

est une ellipse

$$x^2 + 2y^2 = 2R^2$$

qui touche les cercles au point ayant pour coordonnées

$$x = 2a, \quad y = \pm\sqrt{R^2 - 2a^2};$$

ce point cesse d'être réel quand $2a^2$ surpasse R^2.

Toute la théorie des enveloppes, comme nous le faisons observer dans nos leçons, se rapporte à des coordonnées quelconques et tous les paramètres qui entrent dans les équations considérées sont, comme les coordonnées elles-mêmes, réels ou imaginaires (*Cours d'Analyse de l'Université de Gand. Applications géométriques du calcul différentiel*, Autographie. Gand, 1891, pp. 84-86)(*). (P. M.)

18. *Théorème sur les déterminants.* Si $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... $\varphi_n(x)$ sont des fonctions entières de degré $n-2$ au plus, on a identiquement

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1), & \varphi_2(x_1), & \varphi_3(x_1), & \dots, & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2), & \varphi_2(x_2), & \varphi_3(x_2), & \dots, & \varphi_n(x_2) \\ \varphi_1(x_3), & \varphi_2(x_3), & \varphi_3(x_3), & \dots, & \varphi_n(x_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_n), & \varphi_2(x_n), & \varphi_3(x_n), & \dots, & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, ce déterminant qui est au plus de degré $n-2$ par rapport à x_1, s'annule pour les $n-1$ valeurs $x_2, x_3, \dots, x_n$ de x_1.

Le théorème précédent généralise une proposition énoncée par M. V. Schlegel dans l'*El Progreso matematico* (1894, p. 229). (J. N.)

×**19.** *Sur le centre des moyennes harmoniques.* Soient A, B, C, ... L n points d'une ligne droite l, et O_2 le centre des moyennes harmoniques de ces points par rapport à un point quelconque O_1 de la même droite l, de sorte que

$$\frac{n}{O_1O_2} = \frac{1}{O_1A} + \frac{1}{O_1B} + \dots + \frac{1}{O_1L}.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\Sigma\left(\frac{1}{O_1A} - \frac{1}{O_1O_2}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad \Sigma\frac{O_2A}{O_1A} = 0. \tag{1}$$

(*) Un de nos abonnés et collaborateurs nous fait observer que tout paradoxe disparaît si l'on ne considère que les points réels des enveloppes, ou si l'on définit géométriquement les enveloppes. L'exemple de M. Houtain a été indiqué par Steiner (*Crelle*, III, 207, question II, ou *Werke*, I, 176).

Si X est un point quelconque de l, la relation (1) donne

$$\Sigma\left(\frac{O_2A}{O_1A}:\frac{O_2X}{O_1X}\right)=0, \quad \text{ou} \quad \Sigma(O_2O_1AX)=0. \tag{2}$$

Faisons coïncider X successivement avec chacun des points A, B, ... L et additionnons les égalités correspondantes; en observant que

$$(O_2O_1AA)=(O_2O_1BB)=\cdots=1;$$

nous aurons

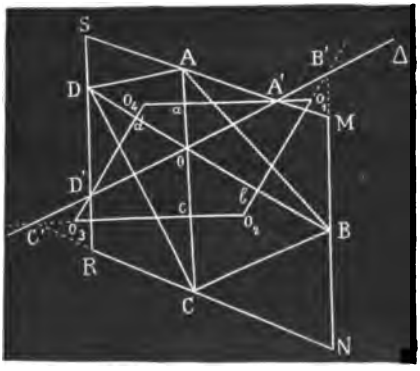
$$\Sigma(O_2O_1AB)=-n;$$

dans cette formule, le signe sommatoire s'étend à tous les *arrangements* des lettres A, B, ..., L prises deux à deux. (Verbessem.)

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1894.

Mathématiques élémentaires.

On considère un quadrilatère Q de sommets A, B, C, D, dont les diagonales se coupent en un point O, et les cercles circonscrits aux triangles OAB, OBC, OCD, ODA. Les centres O_1, O_2, O_3, O_4 de ces cercles sont les sommets d'un parallélogramme P.



1. Le parallélogramme P étant donné, démontrer que tous les quadrilatères Q qui lui correspondent ont une surface constante et des diagonales de longueur constante.

2. Le parallélogramme P étant donné et le point O étant assujetti à décrire une droite Δ, prouver que les sommets du quadrilatère Q se déplacent sur les côtés d'un parallélogramme P′; étudier la déformation de P′, quand Δ varie; trouver les positions de la droite Δ pour lesquelles le parallélogramme P′ a une surface maximum.

3. Construire le quadrilatère Q, connaissant le parallélogramme P et soit deux angles de Q, soit les rapports $\frac{AB}{AD}$ et $\frac{CB}{CD}$. Discuter.

4. On suppose que le quadrilatère Q soit inscriptible; connaissant le parallélogramme P, trouver le lieu des sommets de Q et le lieu du centre du cercle circonscrit à ce quadrilatère (Ces lieux sont des coniques).

Cette question étant à la fois intéressante et instructive, nous allons en développer la solution.

Les centres O_1, O_2, O_3, O_4 sont les sommets du parallélogramme P formé par les perpendiculaires menées aux milieux a, b, c, d des droites OA, OB, OC, OD.

1° Les diagonales AC, BD de Q sont doubles des hauteurs $ac = h$, $bd = h'$, de P et font un angle constant. On a

$$P = \frac{hh'}{\sin O_1}, \quad Q = \tfrac{1}{2} AC \cdot BD \sin O_1 = 2hh' \sin O_1 = 2P \sin^2 O_1.$$

2° Faisons décrire à O une droite Δ coupant les côtés de P en A', B', C', D'; les points A, B, C, D décriront des droites symétriques de Δ par rapport aux côtés de P. Ces droites passent respectivement par A', B', C', D', et forment un parallélogramme MNRS. Si la droite Δ se déplace parallèlement à elle-même, MNRS reste invariable de forme; car ses côtés conservent la même direction et la même distance puisque les sécantes A'C', B'D' comprises entre les côtés opposés gardent leur direction et leur grandeur.

Soient C', B' les angles $O_2C'A'$, $O_2B'A'$ de Δ avec les côtés de P, h et h' les distances des parallèles MS et NR, MN et RS; comme l'angle $AMN = 2O_1$, on a

$$P' = \frac{hh'}{\sin 2O_1};$$

mais

$$h = A'C' \sin 2C' = \frac{h \sin 2C'}{\sin C'} = 2h \cos C', \quad h' = 2h' \cos B';$$

d'où

$$P' = \frac{4hh' \cos B' \cos C'}{\sin 2O_1} = \frac{2P \cos B' \cos C'}{\cos O_1} = \frac{P}{\cos O_1}[\cos(B' - C') + \cos(B' + C')].$$

Pour plus de clarté, substituons à Δ une parallèle Δ' menée par O_1. Si Δ' passe à l'intérieur de l'angle $O_2O_1O_4$, on a $B' + C' = O_1$; un maximum de P' correspond à $B' = C' = \frac{1}{2} O_1$, un minimum a lieu quand l'un des angles B' ou C' est nul, c'est-à-dire quand Δ' coïncide avec O_1O_2 ou avec O_3O_4; le maximum est égal à $\frac{2P \cos^2 \frac{1}{2} O_1}{\cos O_1}$, le minimum à 2P. Si Δ' passe dans l'angle O_4O_1B', on a $B' + C' = \pi - O_1$, et un maximum de P' a lieu pour $B' = C' = \frac{1}{2}\pi - O_1$; ce maximum est égal à $\frac{2P \sin^2 \frac{1}{2} O_1}{\cos O_1}$.

3° Soient X, Y, Z, U les milieux de AB, BC, CD, AD. On peut construire un parallélogramme X'Y'Z'U' dont les côtés sont égaux et parallèles aux hauteurs ac, bd, de P; il est nécessairement égal à XYZU. Si les angles A et D sont connus, on décrira sur X'U', Z'U', des segments capables de ces angles, et l'on mènera par U' une sécante A_1D_1 telle que les cordes interceptées A_1U', $U'D_1$ soient égales; il sera facile d'achever un quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ dont les côtés A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1

ont leurs milieux en X', Y', Z' et d'obtenir ensuite le quadrilatère ABCD. Si l'on connaît les deux angles A et C, on décrira sur X'U', Y'Z' des segments capables de ces angles, et l'on cherchera ensuite une droite A_1C_1 perpendiculaire à O_1O_2 et telle que la partie comprise entre les arcs des segments capables soit égale au double de *ac*, etc. Supposons donnés les rapports

$$\frac{AB}{AD} = \frac{m}{n}, \quad \frac{CB}{CD} = \frac{p}{b},$$

on construira les deux circonférences, lieux des points dont les distances aux points X', U' sont dans le rapport $(m : n)$ et dont les distances aux points Y', Z' sont dans le rapport $(p : q)$; puis on cherchera une sécante perpendiculaire à O_1O_2 et telle que la partie comprise entre ces circonférences soit double de *ac*, etc.

Plus simplement : Des quadrilatères inscriptibles OaO_1d, OaO_2b, ... on déduit

$$\text{angle } O_1OO_1 = dab = A_1 \ldots; \quad \frac{OO_1}{OO_1} = \frac{ad}{ab} = \frac{AD}{AB}, \quad \ldots$$

4° Cherchons d'abord le lieu du point O sous la condition que le quadrilatère ABCD soit inscriptible. On doit avoir

$$Oa \cdot Oc = Ob \cdot Od.$$

Soient x, y les coordonnées de O par rapport à deux axes parallèles aux côtés de P et menés par son centre, et α, β les distances de O à ces axes.

Nous aurons

$$Oa = \tfrac{1}{2}h - \alpha, \quad Oc = \tfrac{1}{2}h + \alpha, \quad \ldots;$$

donc

$$\tfrac{1}{4}h^2 - \alpha^2 = \tfrac{1}{4}h'^2 - \beta^2, \text{ ou } \alpha^2 - \beta^2 = \tfrac{1}{4}(h^2 - h'^2), \text{ ou } y^2 - x^2 = \tfrac{1}{4}(h^2 - h'^2)\sin^2 O_1.$$

Le point O décrit donc une hyperbole équilatère dont deux diamètres conjugués sont dirigés suivant les axes coordonnés.

Les points A, B, C, D décrivent les symétriques de l'hyperbole précédente par rapport aux côtés de P.

Le centre de la circonférence *abcd* coïncide avec le centre w de P; le centre w' de la circonférence ABCD s'obtient en prolongeant Ow d'une quantité $ww' = Ow$. Donc w' décrit la même hyperbole que le point O. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 867.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 214).

Dans un triangle rectangle ABC, *l'hypoténuse* AB *est fixe et le sommet* C *de l'angle droit variable. Soit* P *la projection de* C *sur* AB. *On prend entre* A *et* B, *sur* AB, *un point* Q *tel que* AQ = BP. *Démontrer que la droite* CQ *enveloppe une développée d'ellipse.* (Barisien.)

Solution par MM. MANDART, COLLETTE, POLAK *et* M^lle^ DE HAAS (*) Prenons pour axes la droite AB et la perpendiculaire en son milieu O. Si α, β sont les coordonnées de C, les coordonnées à l'origine de la droite CQ sont $-\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$, et l'équation de CQ est

$$\frac{2y}{\beta} - \frac{x}{\alpha} = 1, \qquad (1)$$

avec la condition $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$, qu'on peut remplacer par $\alpha = r\cos\varphi$, $\beta = r\sin\varphi$, φ étant un paramètre variable. Un point de l'enveloppe est donc déterminé par les équations.

$$\frac{2y}{\sin\varphi} - \frac{x}{\cos\varphi} = r, \quad \frac{2y\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{x\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = 0.$$

En résolvant ces équations par rapport à x et à y, on trouve

$$2y = r\sin^3\varphi, \quad x = -r\cos^3\varphi;$$

puis, en éliminant φ,

$$\left(\frac{2y}{r}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

équation qu'on peut identifier avec celle d'une développée d'ellipse :

$$(Ax)^{\frac{2}{3}} + (By)^{\frac{2}{3}} = C^{\frac{4}{3}}.$$

Solution par M. DÉPREZ. Soit Oy la perpendiculaire au milieu O de AB; projetons C en R sur Oy, et soient I le point d'intersection des droites PR et CQ, D celui de Oy et CQ. La droite PR, égale à OC, a une longueur constante et glisse entre les axes rectangulaires OA, Oy; le point I le partage en deux segments constants, car

$$\frac{PI}{IR} = \frac{PQ}{CR} = 2.$$

Il résulte de là que I décrit une ellipse ayant pour demi-axes $PI = \frac{2}{3}OA$, $IR = \frac{1}{3}OA$, et que CI est la normale en ce point, etc.

Solution par M. DROZ. Les perpendiculaires en Q sur OA et au milieu D de OR se coupent en un point E qui décrit une ellipse ; car E est le symétrique du milieu de PC par rapport à Oy, et C décrit une circonférence. Donc DQ joint les projections d'un point E d'une ellipse sur ses axes, etc.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Question 874.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 215).

Une courbe plane se déforme de telle sorte que l'abscisse de chaque point restant la même, l'ordonnée tourne d'un angle θ qui reste le même pour tous les points de la courbe. Trouver l'enveloppe de toutes les courbes ainsi obtenues, lorsque l'angle θ prend toutes les valeurs possibles. (LAISANT.)

Solution par M. ABSOLONNE. Soient $f(x,y)=0$ l'équation de la courbe, ζ et η les coordonnées après la transformation; on aura

$$\zeta = x + y\sin\theta, \quad \eta = y\cos\theta;$$

donc

$$f\left(\zeta - \eta\operatorname{tg}\theta, \frac{\eta}{\cos\theta}\right) = 0 \tag{1}$$

est l'équation de la nouvelle courbe.

Pour obtenir l'enveloppe des courbes qui correspondent aux différentes valeurs de θ, il suffit d'éliminer θ entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à θ :

$$-f'_x\left(\zeta - \eta\operatorname{tg}\theta, \frac{\eta}{\cos\theta}\right) + \sin\theta f'_y\left(\zeta - \eta\operatorname{tg}\theta, \frac{\eta}{\cos\theta}\right) = 0. \tag{2}$$

En dérivant l'équation (1) par rapport à ζ on a

$$(d\zeta - \operatorname{tg}\theta d\eta) f'_x\left(\zeta - \eta\operatorname{tg}\theta, \frac{\eta}{\cos\theta}\right) + f'_y\left(\zeta - \eta\operatorname{tg}\theta, \frac{\eta}{\cos\theta}\right)\frac{d\eta}{\cos\theta} = 0 \tag{3}$$

et en éliminant le rapport $f'_x : f'_y$ entre les relations (2) et (3), on obtient le coefficient angulaire de la tangente à la courbe au point de contact avec l'enveloppe :

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = -\operatorname{tg}\theta.$$

Cette valeur montre que la tangente en ce point est perpendiculaire à la droite qui le joint au pied de l'ordonnée primitive du point.

Dans le cas de l'ellipse il sera facile de trouver le point de contact d'une transformée avec son enveloppe; il suffira de construire le diamètre conjugué des cordes dont la direction est symétrique de celle des ordonnées par rapport à un des axes.

Question 897.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 280).

Soient S *l'aire d'une ellipse,* S_1 *celle de la podaire du centre de cette ellipse,* S_2 *celle de l'antipodaire du centre de la même ellipse. Montrer que l'on a la relation*

$$3S^2 - S_1^2 = 2SS_2. \qquad \text{(E. N. Barisien.)}$$

Solution par MM. Gillet *et* Déprez. En appelant φ l'anomalie excentrique d'un point quelconque de l'ellipse, le point correspondant de l'antipodaire a pour coordonnées (Catalan, *Cours d'Analyse*, p. 496) :

$$x = \frac{a^2 + c^2 \sin^2 \varphi}{a} \cos \varphi, \quad y = \frac{b^2 - c^2 \cos^2 \varphi}{b} \sin \varphi ;$$

par suite

$$dx = \frac{\sin \varphi}{a} (a^2 - 2b^2 - 3c^2 \sin^2 \varphi)\, d\varphi,$$

$$ab \int_0^a y\,dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b^2 - c^2 \cos^2 \varphi)(a^2 - 2b^2 - 3c^2 \sin^2 \varphi) \sin^2 \varphi \, d\varphi$$

$$= (a^2 - 2b^2)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi - 4(a^2 - 2b^2)(a^2 - b^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi + 3(a^2 - b^2)^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi d\varphi.$$

Or,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{3\pi}{16}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi d\varphi = \frac{5\pi}{32},$$

ce qui donne pour l'aire du quart de la courbe, après réduction,

$$\frac{\pi}{32ab} (10a^2b^2 - a^4 - b^4).$$

Nous aurons donc

$$S_2 = \frac{\pi}{8ab} (10a^2b^2 - a^4 - b^4);$$

d'ailleurs, on sait que

$$S = \pi ab, \quad S_1 = \frac{\pi}{2} (a^2 + b^2);$$

si l'on élimine a et b entre ces relations, ce qui se fait aisément en écrivant

$$S_2 = \frac{\pi}{8ab}[12a^2b^2 - (a^2+b^2)^2],$$

on trouve la relation proposée.

×Question 900.

(Voir *Mathesis*, (2) III, p. 280.)

Soient A′, B′, C′ ***les pieds des bissectrices intérieures des angles d'un triangle*** ABC, ***et soient*** A″, B″, C″ ***les symétriques de ces points par rapport aux sommets correspondants*** A, B, C. ***Trouver le rapport des surfaces des triangles*** A″B″C″, ABC ***en fonction des côtés de*** ABC.

Solution par M. Listray. Soient S, S″ les surfaces des triangles ABC, A″B″C″ et I, r le centre et le rayon du cercle inscrit. Désignons aussi par α, β, γ les longueurs des bissectrices AA′, BB′, CC′; on sait que

$$\alpha = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}, \quad \beta = \frac{2}{c+a}\sqrt{cap(p-a)}, \quad \ldots.$$

Les triangles IB″C″, IBC ayant un angle commun BIC, on a

$$\frac{IB''C''}{IBC} = \frac{IB''.IC''}{IB.IC}. \tag{1}$$

Mais

$$IBC = \tfrac{1}{2}ar, \quad r = \frac{S}{p}, \quad \frac{BI}{IB'} = \frac{a}{B'C} = \frac{c}{AB'} = \frac{a+c}{b};$$

d'où

$$IBC = \frac{aS}{p}, \quad \frac{BI}{BI+IB'} = \frac{a+c}{2p},$$

$$BI = \frac{a+c}{2p}\beta, \quad IB'' = IB + \beta = \frac{2(a+c)+b}{2p}\beta.$$

L'égalité (1) peut donc se transformer ainsi :

$$\frac{IB''C''}{S} = \frac{a(2a+2c+b)(2a+2b+c)}{2p(a+c)(a+b)}.$$

On en déduit, en cherchant de même IC''A'' et IA''B''.

$$\frac{S''}{S} = \frac{\Sigma a(b+c)(2a+2c+b)(2a+2b+c)}{2p(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= 6 + \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \text{ (*)}.$$

Remarque. Soient S' la surface du triangle A'B'C', S''' la surface du triangle qui a pour sommets les symétriques des points A, B, C respectivement par rapport à A', B', C'.

On sait que

$$\frac{S'}{S} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

et l'on trouve aisément

$$\frac{S'''}{S} = 3 + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Il résulte de là les relations

$$S'' = 6S + S', \quad S''' = 3S + 4S',$$

$$4S'' - S''' = 21S, \quad 2S''' - S'' = 7S', \quad S''' - S'' = 3(S' - S).$$

Solution par M. Droz Farny. Menons par A'', B'', C'' des parallèles aux côtés correspondants du triangle ABC ; nous formons ainsi un nouveau triangle $A_1B_1C_1$ homothétique à ABC. Le centre d'homothétie est le centre de gravité G de ABC ; car les distances de G à BC et B_1C_1, par exemple, sont égales à $\frac{1}{3}h_a$, $\frac{5}{6}h_a$, de sorte que le rapport de similitude est égal à 5. Si AB, AC coupent B_1C_1 en D, E, on a $DA'' = BA'$, $EA'' = CA'$; on en déduit

$$B_1A'' = B_1D + DA'' = 2a + \frac{ac}{b+c} = \frac{a(2b+3c)}{b+c},$$

$$C_1A'' = \frac{a(3b+2c)}{b+c}, \quad \frac{B_1A''}{C_1A''} = \frac{2b+3c}{3b+2c},$$

et par analogie

$$\frac{C_1B''}{A_1B''} = \frac{2c+3a}{3c+2a}, \quad \frac{A_1C''}{B_1C''} = \frac{2a+3b}{3a+2b}.$$

(*) Pour arriver à cette expression, on développe le numérateur de la fraction précédente suivant les quantités $a+b$, $b+c$, $c+a$.

D'après une formule connue,

$$\frac{A''B''C''}{A_1B_1C_1} = \frac{B_1A''.C_1B''.A_1C'' + C_1A''.B_1C''.A_1B''}{A_1B_1.B_1C_1.C_1A_1};$$

comme $A_1B_1C_1 = 25ABC$, on aura

$$\frac{A''B''C''}{ABC} = \frac{(2b+3c)(2c+3a)(2a+3b)+(2c+3b)(2a+3c)(2b+3a)}{5(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$= 6 + \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Généralisation par M. Dépresz. Soient A', B', C' les points de rencontre des côtés d'un triangle ABC avec les droites joignant les sommets A, B, C à un même point I. Prenons sur les droites A'A, B'B, C'C les segments

$$AA'' = \lambda.A'A, \quad BB'' = \lambda.B'B, \quad CC'' = \lambda.C'C.$$

Si S, S', S'' sont les surfaces des triangles ABC, A'B'C', A''B''C'', on a

$$S'' = (\lambda+1)(2\lambda+1)S + \lambda^2 S'.$$

En effet,

$$B''IC'' = \tfrac{1}{2} IB''.IC'' \sin BIC'$$
$$= \tfrac{1}{2}[(\lambda+1)IB + \lambda.IB'][(\lambda+1)IC + \lambda.IC'] \sin BIC$$
$$= (\lambda+1)^2.IBC + \lambda(\lambda+1)(IBC' + IB'C) + \lambda^2.IB'C';$$

on trouvera par analogie C''IA'', A''IB'', et l'addition des trois égalités donne

$$S'' = (\lambda+1)^2 S + \lambda(\lambda+1)S + \lambda^2 S' = (\lambda+1)(2\lambda+1)S + \lambda^2 S'.$$

Si α, β, γ sont les coordonnées barycentriques de I, on calculera S' par la formule

$$\frac{S'}{S} = \frac{2\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}.$$

Prenons sur AA', BB', CC' les longueurs

$$AA''' = \lambda AA', \quad BB''' = \lambda BB', \quad CC''' = \lambda CC';$$

nous aurons

$$S''' = (\lambda-1)(2\lambda-1)S + \lambda^2 S'.$$

On voit facilement que

$$S'' - S''' = 6S.$$

Solution par M. Lemoine. Les coordonnées normales absolues des points A'', B'', C'' étant

$$\frac{4S}{a},\quad -\frac{2S}{b+c},\quad -\frac{2S}{b+c};\quad \text{etc,}$$

la formule de l'aire d'un triangle donne

$$\frac{A''B''C''}{ABC} = -6 - \frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

Si l'on applique la transformation continue en A (*Mathesis*, (2), II, p. 62), on peut dire :

Soit B_1'' le symétrique par rapport à B du pied de la bissectrice extérieure de l'angle ABC, et soit C_1'' le symétrique par rapport à C du pied de la bissectrice extérieure de l'angle BCA ; on a

$$\frac{A_1''B_1''C_1''}{ABC} = \frac{2abc}{(b+c)(a-c)(a-b)} - 6.$$

MM. Verdeyen, Barisien, Cristescu et Delahaye ont donné de bonnes solutions trigonométriques de la même question.

M. Barisien a signalé comme M. Listray, les relations entre les aires S, S', S'', S'''.

Pour trouver les aires S'', S''' relatives au centre I du cercle inscrit, il suffit de faire $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ dans les formules S'', S''' de M. Déprez.

QUESTIONS D'EXAMEN.

657. Les points M, M' se meuvent sur une droite fixe Oω de façon que le produit $OM.OM' = a^2$. Trouver le lieu du centre I d'une circonférence passant par les points M et M', et par un point donné A. Même problème lorsque la circonférence passe par M et M' et touche une droite donnée d ou une circonférence donnée ω.

1° La circonférence I rencontre la droite AO en un second point fixe B, déterminé par l'égalité $OA.OB = a^2$, etc.

2° La circonférence I touche en outre une circonférence fixe, transformée par rayons vecteurs réciproques de la droite d ou de la circonférence ω, le pôle d'inversion étant O et la puissance égale à a^2, etc.

658. Inscrire à une ellipse donnée le parallélogramme maximum dont les côtés soient parallèles à deux diamètres conjugués donnés CC', DD'.

La solution analytique de ce problème est bien connue : On cherche le maximum du produit xy, ou plutôt du produit $\frac{x^2}{a'^2}, \frac{y^2}{b'^2}$ dont les facteurs ont une somme constante; donc les diagonales du parallélogramme cherché coïncident avec celles du parallélogramme formé par les tangentes en C, D, C', D'.

On peut aussi transformer l'ellipse en une circonférence ayant pour diamètre CC' : pour cela, on fait tourner les ordonnées de l'ellipse autour de leurs pieds pour les rendre perpendiculaires à CC' et on les modifie dans le rapport $a' : b'$. Le parallélogramme cherché se transforme alors en un carré inscrit dans la circonférence et ayant deux côtés parallèles à CC', etc.

659. Trois circonférences O, O', O'' touchent les mêmes droites Ax, Ay, et les deux premières passent par le centre de la troisième; démontrer que le rayon de celle-ci est une moyenne harmonique entre les rayons des deux premières. (TUCKER.)

A et O'' sont les centres de similitude des cercles O', O''; donc le segment AO'' est divisé harmoniquement par les points O, O' et l'on a

$$\frac{1}{AO''} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{AO} + \frac{1}{AO'}\right), \text{ etc.}$$

660. Soient A le sommet d'une parabole, B et C les extrémités d'une corde quelconque menée par le foyer. Démontrer que (FB. FC : BC) est constant.

Les abscisses x' et x'' de B et C sont racines de l'équation

$$m^2\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = 2px.$$

On a

$$FB.FC = \left(x' + \frac{p}{2}\right)\left(x'' + \frac{p}{2}\right) = x'x'' + \tfrac{1}{2}p(x' + x'') + \frac{p^2}{4};$$

$$BC = (x' + x'') + p.$$

Remplaçons

$$x'x'', \quad x' + x'' \text{ par } \frac{p^2}{4}, \quad p\left(\frac{m^2+2}{m^2}\right), \text{ etc.}$$

La démonstration résulte aussi de l'équation polaire $\frac{1}{r} = \frac{1 - \cos\omega}{p}$, où l'on remplace ω successivement par ω et $\pi + \omega$.

Le théorème s'applique également à une conique à centre : la somme $\frac{1}{FB} + \frac{1}{FC}$ est constante.

661. Démontrer que

$$C_{n,1} + 2C_{n,2} + 3C_{n,3} + \cdots + nC_{n,n} = n.2^{n-1}.$$

Remplacer $kC_{n,k}$ par $nC_{n-1,k-1}$

QUESTIONS PROPOSÉES.

983. Le lieu de la projection du centre d'un cercle osculateur à une parabole sur la droite qui joint le point d'osculation au foyer est une parabole égale à la parabole donnée. Trouver le lieu analogue dans l'ellipse. (E. N. BARISIEN.)

984. On considère dans une ellipse toutes les cordes qui joignent les extrémités de deux diamètres conjugués.

1° Le lieu des projections du centre sur les cordes et le lieu des projections des pôles des cordes sur elles-mêmes ont même aire;

2° Le lieu des points de rencontre des normales aux extrémités des cordes est une courbe dont l'aire est égale aux $\frac{3}{8}$ de l'aire de la développée de l'ellipse. (E. N. BARISIEN.)

On peut trouver le premier théorème sans calcul.

985. D'un point P du plan d'une parabole, on abaisse trois normales à la courbe, dont les pieds sont A, B, C. Montrer que :

1° Le lieu des points P tels que la somme des carrés des projections des côtés du triangle ABC sur la tangente au sommet soit constante, est une ligne droite;

2° Le lieu des points P tels que la somme des carrés des projections des mêmes côtés sur l'axe soit constante, se compose de deux droites;

3° Le lieu des points P tels que la somme des carrés des projections des côtés du triangle ABC sur l'axe soit égale à la somme des carrés des projections des mêmes côtés sur la tangente au sommet, se compose de deux droites. (E. N. BARISIEN.)

×**986.** Etant donnés un triangle ABC et un point P dans son plan, on inscrit à ABC deux triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$: les points A_1 et A_2 sont situés sur BC, B_1 et B_2 sur CA, C_1 et C_2 sur AB; les droites A_1B_1, B_2C_2 sont parallèles à BP, B_1C_1, et C_2A_2 à CP, C_1A_1 et A_2B_2 à AP.

1° Les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ sont égaux.

2° Les droites A_2C_2 et A_1B_1 se coupent sur AP; B_2A_2 et B_1C_1 sur BP; C_2B_2 et C_1A_1 sur CP.

3° Soient A_3, B_3, C_3 les points d'intersection des couples de droites B_1C_1 et B_2C_2, C_1A_1 et C_2A_2, A_1B_1 et A_2B_2; les droites AA_3, BB_3, CC_3 concourent au complémentaire P′ du point P.

4° Soient A_4, B_4, C_4 les points de rencontre des couples de droites BB_1 et CC_2, CC_1 et AA_2, AA_1 et BB_2 : les droites AA_4, BB_4, CC_4 concourent en un point de la droite PP′. (TUCKER.)

×**987**. Sur les côtés d'un triangle ABC on construit extérieurement les carrés ABDE, BCFG, CAHI. Soient : A', B', C' les milieux des côtés du triangle ABC; A'', B'', C'' les milieux des droites HE, DG, FI ; O_a, O_b, O_c les centres des carrés. Démontrer que les droites A'A'', B'B'', C'C'' sont égales aux côtés du triangle $O_aO_bO_c$ et passent par le centre du cercle circonscrit à ce triangle (*). (Déprez.)

988. Toutes les paraboles qui touchent une droite donnée AB en un point donné A, et dont la directrice passe par un point fixe P, ont une seconde tangente commune t. Si le point P parcourt une droite donnée d, la droite t enveloppe une parabole qui touche AB en A. (J. N.)

×**989**. Entre quelles limites peuvent varier x et y dans l'équation

$$a^2 + b^2 + a^2x + \frac{b^2}{x} = c^2 + d^2 + c^2y + \frac{d^2}{y}$$

a, b, c, d étant quatre nombres positifs dont le plus grand est moindre que la somme des trois autres. (J. Neuberg.)

990. Les points P, Q, R, S divisent respectivement les côtés AB, BC, CD, DA d'un pseudo-carré ABCD dans un même rapport γ : 1. Démontrer que, si γ varie, 1° le quadrilatère PQRS est toujours un pseudo-carré ; 2° les enveloppes des diagonales PR, QS sont deux paraboles dont les axes sont rectangulaires ; 3° le lieu du point d'intersection O de PR avec QS est une strophoïde droite. (Schoute.)

La première partie de la question est un cas particulier du théorème de M. H. Van Aubel (p. 176).

991. Soient A, B, C, D quatre points d'une conique à centre tels que les normales à la courbe en ces points soient concourantes. Par chacun des points A, B, C, D on mène deux droites de directions fixes, mais également inclinées sur les axes et on détermine par rapport à ces droites la conjuguée harmonique de la tangente au point considéré. Les droites ainsi obtenues concourent en un point P. Leurs symétriques par rapport aux ordonnées passent par un point P'. Si on change les directions considérées, la droite PP' pivote autour d'un point fixe. (Cl. Servais.)

Rectifications. Page 136, ligne 9, lire : solution partielle par M. Delville. Page 197 : Le lecteur est prié de corriger, d'après la discussion, les inexactitudes qui se sont glissées dans les figures. Page 240, ligne 10, lire *qui l'a* au lieu de *qu'il a*; *pourrait* au lieu de *pourrait;* ligne 15, lire *demi-droite*, au lieu de *demi-droit;* ligne 21, lire *l'une une projection* au lieu de *l'une la projection*.

(*) Ce théorème est implicitement renfermé dans un article de M. Mackay (*Proc. of Edinburgh Math. Soc.*, vol. VI, n° 35).

NOUVELLE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES COURBES DE BERTRAND;

par M. E. Césaro, professeur à l'Université de Naples.

Nous avons démontré ailleurs(*) que *les courbes de Bertrand sont caractérisées par l'existence de deux paraboloïdes hyperboliques, rigidement liés à leur trièdre fondamental, et tels que leurs génératrices d'un système engendrent des surfaces développables.* Nous allons trouver une propriété du même genre en cherchant s'il est possible qu'une droite, rigidement liée au trièdre fondamental, reste normale aux trajectoires de tous ses points.

Soient α, β, γ les cosinus directeurs d'une telle droite et ξ, η, ζ ses autres coordonnées, c'est-à-dire

$$\xi = \gamma y - \beta z, \quad \eta = \alpha z - \gamma x, \quad \zeta = \beta x - \alpha y,$$

x, y, z étant les coordonnées des points de la droite par rapport au trièdre formé par la tangente, par la binormale et par la normale principale en un point quelconque de la courbe inconnue. En vertu des formules fondamentales, les cosinus directeurs de la tangente à la trajectoire du point (x, y, z) sont proportionnels à

$$1 - \frac{z}{\rho}, \quad -\frac{z}{r}, \quad \frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}.$$

Il faut donc que l'on ait

$$\alpha\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) - \beta\frac{z}{r} + \gamma\left(\frac{x}{\rho} + \frac{y}{r}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\eta}{\rho} - \frac{\xi}{r} = \alpha. \tag{1}$$

Si les deux courbures sont variables, en même temps que leur rapport, on ne peut satisfaire à cette condition qu'en prenant $\alpha = 0$, $\xi = 0$, $\eta = 0$. Ces équations représentent *les normales à la courbe et les autres perpendiculaires à la tangente, situées dans le plan rectifiant.* C'est le cas général.

On a un premier cas exceptionnel lorsqu'on suppose que les courbures,

(*) *Rivista di matematica, 1892*, p. 155.

tout en variant, aient entre elles un rapport constant — tg φ, de sorte que

$$\frac{\cos\varphi}{\rho} + \frac{\sin\varphi}{r} = 0. \tag{2}$$

On satisfait alors à la condition (1) en prenant

$$\alpha = 0, \quad \xi\cos\varphi + \eta\sin\varphi = 0.$$

Ainsi, dans le cas d'une hélice tracée sur un cylindre quelconque, ***les parallèles au plan normal, qui rencontrent la génératrice***, sont les seules droites qui répondent à la question. Mais si les deux courbures sont constantes, on doit satisfaire à la condition unique (1), qui est l'équation d'un complexe linéaire, dont l'axe est l'axe central de la courbe. En d'autres termes, dans le cas d'une hélice tracée sur un cylindre de révolution, les droites qui répondent à la question proposée sont ***les binormales à toutes les hélices, tracées, dans le même sens et avec le même pas, sur les cylindres de révolution qui ont même axe que le cylindre donné.***

Les cas que nous venons de considérer rentrent, à vrai dire, dans le cas exceptionnel unique des *courbes de Bertrand*, représentées, comme on sait, par l'équation intrinsèque

$$\frac{a}{\rho} + \frac{b}{r} = 1. \tag{3}$$

Lorsque les courbures sont liées par cette relation, on satisfait à la condition (1) en prenant

$$\eta = a\alpha, \quad \xi = -b\alpha. \tag{4}$$

On sait qu'il existe sur la normale principale de la courbe (M), à la distance a de M, un point M_1, qui décrit une autre courbe de Bertrand, admettant les mêmes normales principales que la courbe donnée. Cela étant, il est facile de reconnaître que la première équation (4) représente le complexe des droites qui rencontrent la parallèle D_1, menée par M_1 à la binormale de (M). L'autre équation peut être remplacée par

$$a\xi + b\eta = 0, \tag{5}$$

qui représente les droites s'appuyant sur la parallèle D, menée par M à la binormale de (M_1). Conséquemment, *toute droite, rigidement liée au trièdre fondamental, et s'appuyant sur* D *et* D_1, *reste normale aux trajectoires de ses points*. Cette propriété caractérise les courbes de Bertrand.

En particulier, pour tout *cercle tordu*, les droites qui répondent à la

question sont *celles qui s'appuient sur la tangente et sur la droite polaire.* Pour retrouver le cas des hélices, il faut poser $a = c\cos\varphi$, $b = c\sin\varphi$, puis faire croître c indéfiniment. L'équation (3) tend alors à coïncider avec (2), la droite D_1 s'éloigne à l'infini dans le plan normal, et D n'est autre que la génératrice du cylindre. Lorsque l'hélice est circulaire, elle peut être considérée d'une infinité de manières comme une courbe de Bertrand, et les congruences, en nombre infini, qu'on obtient de cette façon, constituent le complexe linéaire dont il a été question plus haut.

Il y a cependant un cas exceptionnel particulier, qu'il importe de signaler : c'est celui des courbes *à torsion constante.* En effet, l'équation (5) ne peut être substituée à l'une des équations (4) lorsque $a = 0$. Dans cette hypothèse les équations (4) deviennent

$$\eta = 0, \quad \xi = -r\alpha.$$

Elles ont cessé de représenter des droites s'appuyant sur deux directrices distinctes. Cela tient à ce que, dans le cas dont il s'agit, la courbe (M_1) coïncide avec (M), et les droites D et D_1 tendent à se confondre avec la binormale, de telle sorte que le rapport de leur angle à leur distance tend vers une limite, qui mesure la torsion de la courbe. Les droites qui répondent à la question sont donc *tangentes à une surface gauche tout le long de la binormale.* Il faut remarquer que les deux paraboloïdes, dont il a été question en commençant, tendent aussi à se confondre avec le paraboloïde des normales à la même surface suivant la binormale. Il est d'ailleurs facile de montrer que, pour toute courbe de Bertrand, les paraboloïdes dont il s'agit sont constitués par les perpendiculaires élevées aux droites de la congruence (4) tout le long des directrices.

Nous engageons nos jeunes lecteurs à poursuivre l'étude de la congruence (4), et à tâcher de se rendre compte de ses propriétés par les principes généraux de la géométrie cinématique.

Aux indications bibliographiques données dans *Mathesis* (p. 159) il aurait fallu ajouter les notes suivantes : *Formules relatives au mouvement d'un point. — Formules fondamentales pour l'analyse intrinsèque des courbes. — Les nombres de Grassmann en géométrie intrinsèque. — Sur l'analyse barycentrique des courbes. — Constructions barycentriques. — Sur les courbes de Bertrand. — A propos d'un problème sur les hélices. —*

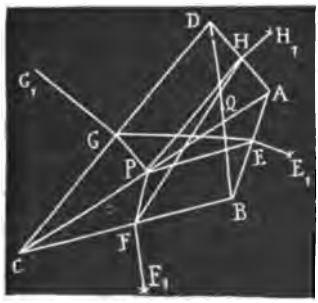
Sur le mouvement d'un point vers une droite. — *Sur la courbe représentative des phénomènes de diffraction.* — *Sur la géométrie intrinsèque des espaces courbes.* — *Les formules de Codazzi dans les hyperespaces*, etc. — On les trouve respectivement dans les *Rendiconti dei Lincei* (1888, 89, 94), dans les *Annali di matematica* (1888), dans la *Rivista di matematica* (1891-92), dans le *Journal de Battaglini* (1885), dans les *Rendiconti* du Cercle de Palerme (1887), dans le *Nuovo Cimento* (1890), dans les *Atti* de l'Académie des sciences de Naples (1894), dans les *Rendiconti* de la même Académie (1894), dans le *Progreso* et dans les *Nouvelles Annales* (1894).

SUR QUELQUES QUADRILATÈRES SPÉCIAUX(*);

par M. J. Neuberg.

1. Nous avons proposé d'appeler *pseudocarré* tout quadrilatère ABCD dont les diagonales sont à la fois égales et rectangulaires. Si les diagonales sont égales et font un angle quelconque, si elles sont rectangulaires et ont un rapport quelconque, nous dirons respectivement que le quadrilatère est *isodiagonal* ou *orthodiagonal*.

Appelons *médianes* du quadrilatère les deux droites qui joignent l'une les milieux E, G des côtés opposés AB, CD, l'autre les milieux F, H des deux autres côtés BC, DA. Ce sont les diagonales d'un parallèlogramme EFGH; leur intersection est le *point moyen* du quadrilatère.



Dans un quadrilatère orthodiagonal, la somme des carrés de deux côtés opposés est égale à la somme des carrés des deux autres côtés; la réciproque est exacte, de sorte qu'un quadrilatère orthodiagonal articulé reste orthodiagonal après une déformation quelconque. Les médianes EG, FH sont égales entre elles, comme diagonales d'un rectangle EFGH.

Dans un quadrilatère isodiagonal, les milieux des côtés sont les som-

---

(*) Comparer N. A. M., 1878, p. 41-44; les conclusions de M. Moret Blanc sont contradictoires avec les nôtres.

mets d'un losange ; donc les médianes sont rectangulaires entre elles et parallèles aux bissectrices des angles formés par les diagonales AC, BD.

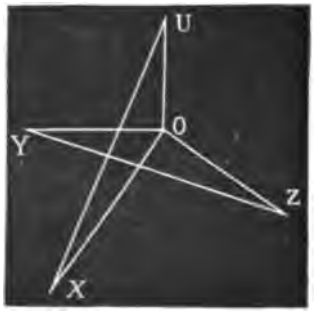
Le pseudocarré étant à la fois orthodiagonal et isodiagonal, ses médianes sont égales et rectangulaires.

2. Construisons sur les côtés du quadrilatère ABCD comme bases des triangles isoscèles E_1AB, F_1BC, G_1CD, H_1DA ayant même angle à la base α. Désignons par P, Q les milieux des droites AC, BD et par T, T_α les deux quadrilatères ABCD, $E_1F_1G_1H$; posons aussi

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d, \quad AC = f, \quad BD = g,$$
$$EG = h, \quad FH = k.$$

D'après un théorème connu, les deux quadrilatères T, T_α ont même point moyen. Il résulte de là que les droites joignant les milieux de deux côtés opposés de T aux milieux de deux côtés opposés de T_α sont deux à deux égales et parallèles.

Considérons la droite E_1G_1 comme étant la résultante des lignes E_1E, EG, GG_1. Les droites E_1E, GG_1 étant perpendiculaires aux droites FP, PH et égales à FP tg α, PH tg α ont une résultante perpendiculaire à FH et égale à FH tg α. Si donc on mène les lignes OX, OY égales et parallèles aux médianes FH, EG et qu'on trace OZ perpendiculaire à OX et égale à OX tg α, OU perpendiculaire à OY et égale à OY tg α, les droites ZY, XU seront égales et parallèles aux diagonales E_1G_1, F_1H_1, de T_α.



Appelons φ l'angle des médianes de T ; la figure précédente donne aisément

$$\overline{E_1G_1}^2 = h^2 + k^2 \operatorname{tg}^2\alpha + 2hk \operatorname{tg}\alpha \sin\varphi,$$
$$\overline{F_1H_1}^2 = k^2 + h^2 \operatorname{tg}^2\alpha + 2hk \operatorname{tg}\alpha \sin\varphi ;$$

d'où

$$\overline{E_1G_1}^2 + \overline{F_1H_1}^2 = \frac{h^2 + k^2}{\cos^2\alpha} + 4hk \operatorname{tg}\alpha \sin\varphi,$$

$$\overline{E_1G_1}^2 - \overline{F_1H_1}^2 = (h^2 - k^2)\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

3. Si $\alpha = 45°$, E_1, F_1, G_1, H_1 seront les centres des carrés construits

sur les côtés de T; les triangles ZOY, XOU auront deux couples de côtés égaux et perpendiculaires; donc les troisièmes côtés ZY, XU sont aussi égaux et perpendiculaires, et *le quadrilatère* $E_1F_1G_1H_1$ *est un pseudocarré.* (Théorème de M. H. Van Aubel; voir N. C. M., t. IV, p. 42) (*).

Supposons $h = k$; alors les deux triangles ZOY, UOX sont symétriquement égaux, par suite les droites ZY, UX sont égales et symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle XOY. Donc *si sur les côtés d'un quadrilatère orthodiagonal on construit des triangles isoscèles semblables, les sommets de ces triangles appartiennent à un quadrilatère isodiagonal; les diagonales de ce dernier ont des directions symétriques par rapport à une diagonale du premier.*

Si l'angle XOY est droit, OZ est dirigé suivant YO, et OU suivant XO; donc, *les sommets de quatre triangles isoscèles semblables construits sur les côtés d'un quadrilatère isodiagonal déterminent un quadrilatère orthodiagonal, dont les diagonales sont parallèles aux médianes du premier. Le point de rencontre* R *des perpendiculaires élevées au milieu de deux côtés opposés* AB, CD *est le sommet commun de deux triangles isoscèles semblables construits sur ces côtés;* car les triangles RAC, RBD sont directement égaux.

En dehors des cas que nous venons d'examiner, les deux quadrilatères T, T_α ne nous paraissent pas présenter de relation assez simple.

4. Si l'on fait coïncider les sommets A et D, les résultats précédents prennent la forme suivante :

Soient E_1, F_1, G_1 *les sommets de trois triangles isoscèles semblables construits sur les côtés* AB, BC, CA *d'un triangle* ABC.

Si ces triangles sont rectangles isoscèles, les droites AF_1 *et* E_1G_1, BG_1 *et* E_1F_1, CE_1 *et* F_1G_1 *sont égales et perpendiculaires.*

Si AB = AC, *les droites* AF_1 *et* E_1G_1 *sont perpendiculaires, quelle que soit la forme des triangles isoscèles* ABE_1, BCF_1, CAG_1.

Si l'angle BAC *est droit, les droites* AF_1 *et* E_1G_1 *sont égales.*

5. On trouve encore une propriété remarquable du quadrilatère $E_1F_1G_1H_1$, si les triangles isoscèles E_1AB, G_1CD ayant même angle à la base α, les triangles isoscèles F_1BC, H_1DA ont pour angle à la base le complément de α. En effet, dans ce cas, on portera $OZ = OX \operatorname{tg} \alpha$,

(*) Ce théorème fait l'objet de la question 879 dont les solutions paraîtront ultérieurement.

OU = OY cotg α; les deux triangles YOZ, UOX ont alors deux couples de côtés perpendiculaires et proportionnels; donc les troisièmes côtés ZY, XU, et par suite E_1G_1 et F_1H_1 sont perpendiculaires et dans le rapport $\sin\alpha : \cos\alpha$. Cette propriété est la première partie de la question 964 (voir p. 214).

De même, si sur les côtés d'un triangle ABC on construit les triangles isoscèles semblables E_1AB, G_1CA et le triangle isoscèle F_1BC dont l'angle à la base est complémentaire de celui de E_1AB, les lignes AF_1 et E_1G_1 sont perpendiculaires (Voir *Mathesis*, VII, p. 216).

SUR UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE;

par M. V. Jamet.

Pour démontrer, indépendamment de la théorie des combinaisons, que le produit de p nombres entiers consécutifs est divisible par le produit des p premiers nombres, est-il nécessaire de faire appel à la décomposition en facteurs premiers? Nous pensons que les transformations suivantes suffisent amplement.

Laissant de côté tout ce qui se rapporte aux combinaisons, désignons par $C_{m,p}$ le quotient :

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1.2.3\dots p}$$

et décomposons-le comme il suit :

$$\frac{(m-1)(m-2)\dots(m-p+1)}{1.2.3\dots(p-1)} \times \left(1+\frac{m-p}{p}\right),$$

nous en concluons

$$C_{m,p} = C_{m-1,p-1} + C_{m-1,p}$$

De même,

$$C_{m-1,p} = C_{m-2,p-1} + C_{m-2,p},$$
$$C_{m-2,p} = C_{m-3,p-1} + C_{m-3,p},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$C_{p+1,p} = C_{p,p-1} + C_{p,p}.$$

Or

$$C_{p,p} = 1.$$

Ajoutant membre à membre toutes les égalités ci-dessus, on trouve, après réduction :

$$C_{m,p} = C_{m-1,p-1} + C_{m-2,p-1} + \cdots + C_{p,p-1} + 1 ;$$

et comme le théorème à démontrer est évident lorsque $p = 1$, il est général en vertu de cette dernière formule.

BIBLIOGRAPHIE.

Essais de Psychologie et de Métaphysique positives. — Arithmétique graphique. — Les espaces arithmétiques hypermagiques, par M. G. Arnoux, ancien Officier de Marine. — Un vol. grand in-8°, avec figures et 1 planche en couleur. Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1894. Prix : Papier Hollande, 12 fr. Vélin, 6 fr.

Si les ouvrages de Mathématiques, au moins ceux dont il est habituellement rendu compte dans ce journal, sont pour la plupart délimités par les nécessités d'un programme d'enseignement ou d'une routine pédagogique, ce n'est certes pas de celui ci qu'on pourra le dire. D'ordinaire aussi, les auteurs de ces ouvrages sont pourvus de titres dans la hiérarchie universitaire, et leurs livres s'adressent à la jeunesse des écoles ou au monde des professeurs. Ici, rien de tout cela. L'auteur, livré à ses propres lumières, affirme sa résolution de ne suivre aucun des sentiers battus. Il estime que l'esprit, affranchi de tout lien à des théories qui le rendraient indolent et paresseux, doit pouvoir mieux mettre en œuvre ses facultés d'invention. Nous croyons qu'il y a pleinement réussi et que son ouvrage est le produit d'un esprit philosophique, méthodique et vraiment original. Cette appréciation confirme celle que M. Laisant avait déjà formulée dans une Communication du 7 février 1894 à la *Société Mathématique de France*, où il avait exposé, quelque temps avant l'apparition de ce livre, le but des curieuses recherches de M. Arnoux relatives à l'étude des carrés magiques et à leur connexion, habituellement négligée, avec les théories arithmologiques.

Comment cette connexion avait-elle échappé jusque alors aux investigations des amateurs de ces sortes de curiosités arithmétiques ? C'est ce que M. Laisant a expliqué dans la communication ci-dessus, et vraiment le résultat paraît avoir tenu à bien peu de chose, simplement à ce que M. Arnoux a eu l'idée de rendre au zéro la place et le rôle attribués jusque alors à l'unité, et de l'admettre dans la série des nombres, au même titre que les chiffres significatifs.

Tous les carrés magiques et abaques constitutifs ont été écrits avec les m^2 nombres. $1, 2, 3, \ldots m^2$; il a suffi de les composer avec les m^2 nombres, $0, 1, 2, 3, \ldots m^2 - 1$, pour mettre immédiatement en lumière des propriétés demeurées jusqu'alors voilées.

Grâce à cette ingénieuse transformation, le problème des cubes magiques, des carrés et cubes hypermagiques, etc. et leur assimilation à des espaces arithmétiques et hypermagiques, définissent aujourd'hui un nouveau domaine où l'Arithmétique et

la Théorie des nombres pourront puiser des comparaisons et des moyens d'invention et de démonstration à la fois très simples et très ingénieux, comme le lecteur pourra s'en convaincre par quelques exemples, notamment la détermination des formules relatives au dénombrement des entiers premiers avec un nombre composé.

A en juger d'après les résultats obtenus, dans ces matières réputées difficiles, par un chercheur réduit à ses connaissances naturelles, on peut se demander ce que les méthodes ici développées pourront donner de force à un esprit déjà orienté et en possession de résultats importants. « Il y a en effet, dit M. Laisant, une telle originalité, une telle puissance d'invention dans les méthodes dont il s'agit, que je serais bien étonné si l'Arithmétique n'arrivait pas quelque jour à les utiliser, soit pour obtenir des démonstrations plus simples de vérités connues déjà, soit pour découvrir des vérités nouvelles. »

Nous souhaitons donc de voir ce livre accueilli avec faveur et ses méthodes appréciées et mises à l'épreuve par les mathématiciens assez nombreux qui voient avec raison dans les combinaisons numériques autre chose que de simples amusements.

Notre savant collègue, M. Laisant, a bien voulu collaborer à ce livre. Nous pensons que le seul fait de sa part de s'y être intéressé est la meilleure preuve que nous puissions donner de la grande portée philosophique d'un ouvrage que nous recommandons aux mathématiciens curieux de connaître *la raison des choses*, préoccupation qui, pour des motifs bien connus, ne se manifeste pas habituellement dans les écrits mathématiques (*). (H. B.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Questions 886 et 887 (**).

(Voir *Mathesis*, (2), III, pp. 239, 263).

886. *On considère le triangle* PMM' *formé par les extrémités d'une corde* MM' *d'une ellipse* E *et le pôle* P *de cette corde. Montrer que :*

1° *Si* P *est sur une des diagonales du rectangle des axes, le cercle*

(*) M. P. Tannery, dans un compte rendu du livre de M. Arnoux (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1894. 1re partie, pp. 277-280) fait observer que Moschopoulos vivait dans la première moitié du XIVe siècle et non en 420, comme le dit M. Arnoux, d'après Bossut. — Nous ajoutons, pour notre part, que nous ne croyons pas que Carnot, Cournot, de Freycinet, Vallès, cités dans sa préface sur la soi-disant métaphysique du calcul infinitésimal ou de l'algèbre ou sur des sujets connexes, soient de vraies autorités sur la matière. C'est l'*Analyse algébrique* (1821) de Cauchy, qui a réellement porté la lumière sur les principes fondamentaux des mathématiques modernes. (P. M.)

(**) Nous réunissons les deux questions parce que les calculs nécessaires pour la première se reproduisent en partie dans la seconde.

PMM' passe par le centre de l'ellipse et enveloppe une podaire du centre d'hyperbole.

2° Si P est sur la circonférence décrite sur la distance focale comme diamètre, le cercle PMM' a son centre sur le grand axe. (E. N. Barisien.)

887. *Si P se meut sur une circonférence C concentrique à l'ellipse E, 1° la seconde corde NN' commune à l'ellipse et à la circonférence PMM' enveloppe une ellipse E' ; 2° les droites MM', NN' se rencontrent sur une Kreuscurve.* (E. N. Barisien.)

Solution par MM. Gillet, Déprez *et* Mandart. Soient α, β les coordonnées de P. Les cordes MM', NN' ayant des directions symétriques par rapport à un axe de E, on peut les représenter par

$$b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2 = 0, \quad b^2\alpha x - a^2\beta y + n = 0,$$

et le cercle PMM' par

$$\lambda(a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2) + (b^2\alpha x + a^2\beta y - a^2b^2)(b^2\alpha x - a^2\beta y + n) = 0.$$

En exprimant qu'il passe par P et que les coefficients de x^2 et y^2 sont égaux, on trouve

$$\lambda + b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 + n = 0, \quad \lambda a^2 - a^4\beta^2 = \lambda b^2 + b^4\alpha^2;$$

d'où

$$\lambda = \frac{a^4\beta^2 + b^4\alpha^2}{c^2}, \quad n = -\frac{a^2b^2(\alpha^2 + \beta^2)}{c^2}.$$

L'équation du cercle devient donc

$$\left.\begin{aligned}&(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)(x^2 + y^2) - b^2\alpha x(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)\\ &-a^2\beta y(\alpha^2 + \beta^2 - c^2) + c^2(b^2\alpha^2 - a^2\beta^2) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

1° Si le point P se meut sur une diagonale du rectangle des axes de E, on a

$$b^2\alpha^2 - a^2\beta^2 = 0; \quad (2)$$

donc le cercle PMM' passe par le centre de E. Son centre a pour coordonnées :

$$x = \frac{b^2\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + c^2)}{2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)}, \quad y = \frac{a^2\beta(\alpha^2 + \beta^2 - c^2)}{2(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)}. \quad (3)$$

Éliminons α et β entre les relations (2) et (3); à cet effet, nous remplaçons dans les égalités (3) β par $\frac{a}{b}\alpha$, et nous éliminons ensuite α entre les nouvelles équations ; ce qui donne

$$4a^2\alpha^2 - 4b^2\beta^2 = a^4 - b^4. \quad (4)$$

Le cercle PMM′ passant par un point fixe O, et son centre décrivant une hyperbole (4), ce cercle, d'après un théorème bien connu, a pour enveloppe la podaire de O par rapport à une hyperbole homothétique à la première et d'axes doubles.

Remarque. Si le point P décrit la première diagonale du rectangle des axes, le pôle de la corde MN′ se meut sur la seconde diagonale et appartient aussi au cercle PMM′. Car la corde NN′ est conjuguée avec la seconde diagonale et le cercle PMM′ passe par N, N′, O (*).

2° Si le point P se trouve sur la circonférence décrite sur FF′ comme diamètre, on a $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$; donc l'ordonnée (3) du centre du cercle PMM′ est nulle.

3° L'équation de la corde NN′ est

$$b^2\alpha x - a^2\beta y - \frac{a^2b^2(\alpha^2+\beta^2)}{c^2} = 0. \qquad (5)$$

Si le point P se meut sur une circonférence concentrique à l'ellipse E, de rayon r, on peut faire

$$\alpha = r\cos\varphi, \quad \beta = r\sin\varphi,$$

et l'équation (4) se réduit à

$$b^2x\cos\varphi - a^2y\sin\varphi - \frac{a^2b^2r}{c^2} = 0. \qquad (6)$$

La droite NN′ enveloppe donc l'ellipse

$$b^4x^2 + a^4y^2 = \frac{a^4b^4r^2}{c^4}.$$

4° L'équation de MM′ peut prendre la forme

$$b^2x\cos\varphi + a^2y\sin\varphi - \frac{a^2b^2}{r} = 0. \qquad (7)$$

Le point d'intersection des droites MM′, NN′ décrit une ligne dont l'équation s'obtient en éliminant φ entre (6) et (7); on trouve

$$\frac{b^4(c^2-r^2)^2}{y^2} + \frac{a^4(c^2+r^2)^2}{x^2} = 4r^2c^4.$$

Ce lieu est donc une Kreuzcurve.

(*) Cette remarque appartient à M. Droz-Farny.

Note. M. Droz-Farny a résolu de la même manière la question 880.

M. Greenstreet a donné une bonne solution analytique en représentant les coordonnées de P par

$$\frac{a\cos\alpha}{\cos\beta},\quad \frac{b\sin\alpha}{\cos\beta}.$$

M. Déprez tire de sa solution les remarques suivantes : 1° Si le point P se meut sur la droite

$$\frac{\alpha}{p}=\frac{\beta}{q},$$

le centre du cercle MM'P décrit l'hyperbole

$$(a^4q^2x^2-b^4p^2y^2)(a^2q^2+b^2p^2)^2=a^4b^4c^2p^2q^2(p^2+q^2),$$

et le cercle lui-même a pour enveloppe la courbe

$$[(a^2q^2+b^2p^2)(x^2+y^2)+c^2(b^2p^2-a^2q^2)]^2$$
$$+4c^2(p^2+q^2)(a^4q^2y^2-b^4p^2x^2)=0.$$

2° Si le point P se meut sur la circonférence

$$x^2+y^2=r^2,$$

le centre du cercle PMM' décrit la quartique

$$[a^2x^2(r^2-c^2)^2+b^2y^2(r^2+c^2)^2]^2$$
$$=\left(\frac{r^4-c^4}{2r}\right)^2[a^4x^2(r^2-c^2)^2+b^4y^2(r^2+c^2)^2].$$

Le pôle Q de NN' par rapport à E, et les pôles P', Q' de MM', NN' par rapport à la circonférence PMM' décrivent respectivement les courbes

$$x^2+y^2=\frac{c^4}{r^2},\quad b^4y^2+a^4x^2=r^6,\quad b^4y^2+a^4x^2=c^4r^2.$$

Les côtés et les diagonales du quadrilatère PP'QQ' enveloppent des développées d'ellipse ; les points de rencontre des côtés opposés et des diagonales de ce quadrilatère décrivent des ellipses. Les droites OP,OQ, de même que OP',OQ', sont symétriques par rapport aux axes de E.

×Question 924.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 80.)

Le carré de la somme de n carrés est aussi la somme de n carrés.

(E. CATALAN.)

Solution par MM. BOUTIN, COUTURIER, FAUQUEMBERGUE, FRANÇOIS, GREENSTREET, JONESCO (Bucharest), MANDART, STRYMEERSCH *et* VLADIMIRESCU. On connaît les identités

$$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2,$$
$$(a^2+b^2+c^2)^2=(a^2+b^2-c^2)^2+(2ac)^2+(2bc)^2;$$

l'analogie conduit à poser

$$(a^2+b^2+\cdots+k^2+l^2)^2=(a^2+b^2+\cdots+k^2-l^2)^2 \\ +(2al)^2+(2bl)^2+\cdots+(2kl)^2,$$

égalité que l'on vérifie facilement.

La décomposition en n carrés peut se faire au moins de n manières, excepté lorsque l'un des carrés a^2, b^2, ... est égal à la somme de tous les autres.

On peut aussi remarquer l'identité

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_i^2-a_{i+1}^2-\cdots-a_n^2)^2+\Sigma(2a_ra_s)^2,$$

où

$$r=1,2,\ldots,i \quad \text{et} \quad s=i+1,i+2,\ldots,n.$$

×Question 926.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 80.)

Résoudre l'équation

$$x^4-4ax^3+2a^2x^2+4a^3x+a^4=0.$$

(E. N. BARISIEN.)

Solution par MM. DROZ-FARNY, FAUQUEMBERGUE, JONESCO, MANDART, STRYMEERSCH, VANDERSTEGEN *et* VLADIMIRESCU. On voit immédiatement que le premier membre de l'équation est le carré de $x^2-2ax-a^2$. Donc les racines sont $a(1\pm\sqrt{2})$.

Solution par MM. BOUTIN, CRISTESCO, FRANÇOIS, HACKEN, MANDART, VERDEYEN, VERHELST (Anvers). On peut résoudre l'équation à la manière

des équations réciproques, en divisant par x^2 ou par a^2x^2. En adoptant le dernier procédé on trouve

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-4\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)+2=0;$$

posant

$$\frac{x}{a}-\frac{a}{x}=y, \quad \text{d'où} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}=y^2+2,$$

on obtient

$$y^2-4y+4=0, \quad \text{etc.}$$

Solution par M. COUTURIER (Louvain). En remplaçant x par $y+a$ à l'effet de faire disparaître le second terme, le 4e terme disparaît aussi et l'équation devient bicarrée.

QUESTIONS D'EXAMEN.

682. a, b, x, étant des nombres donnés, trouver l'expression générale des nombres définis par la loi de récurrence

$$x_n = ax_{n-1}+b.$$

On trouve facilement, en calculant x_2, x_3, x_4,

$$x_n = a^{n-1}x_1+\frac{a^{n-1}-1}{a-1}b.$$

683. Soit M un des points d'intersection d'une ellipse avec le cercle ayant pour diamètre la distance des deux foyers. Démontrer que l'ordonnée de M est au demi-paramètre $\frac{b^2}{a}$ comme le grand axe est à la distance focale. (E. N. BARISIEN.)

684. Éliminer φ entre les équations

$$x\cos\varphi - y\sin\varphi = a(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)$$
$$x\sin\varphi + y\cos\varphi = 4a\sin\varphi\cos\varphi.$$

685. On considère les triangles ayant tous un côté commun AB et l'angle opposé C constant. Trouver : 1° le lieu du centre ω du cercle

des neuf points ; 2° le lieu de l'orthocentre H ; 3° le lieu du point de rencontre N de la bissectrice de l'angle C avec la hauteur issue de B.

(Un abonné).

C décrit une circonférence. Le cercle des neuf points a donc un rayon constant ; comme il passe par le milieu de AB, son centre décrit une circonférence. L'orthocentre H et le sommet C décrivent deux circonférences symétriques par rapport à AB, parce que les angles AHB, ACB sont supplémentaires. La ligne CN passe constamment par le milieu I de l'arc AB de la circonférence ABC et l'angle $INB = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}C$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

993. On considère une série de limaçons de Pascal ayant même point double O et même cercle directeur de rayon R.

1° Une droite donnée (Δ) rencontre l'un des limaçons de la série en A, B, C, D. On a pour tous ces limaçons

$$OA.OB.OC.OD = \text{constante}.$$

2° Un cercle donné (Γ) rencontre l'un des limaçons en quatre points A′, B′, C′, D′. On a

$$OA'.OB'.OC'.OD' = \text{constante}.$$ (E. N. Barisien.)

994. On donne une parabole (P) et un point M sur son axe. Par ce point M, on mène une corde AB. Le cercle de diamètre AB rencontre la parabole en deux autres points C et D. Montrer que :

1° la corde CD passe par un point fixe lorsque la corde AB varie ;

2° les droites AB et CD se rencontrent sur une droite fixe ;

3° le cercle de diamètre AB enveloppe une cubique.

Lorsque le point M est au foyer, la droite fixe devient la directrice et la cubique se décompose en la directrice et un cercle. (E. N. Barisien.)

995. Sur les côtés d'un triangle ABC, on construit extérieurement des rectangles semblables ABDE, BCFG, CAHI. Soient A′, B′, C′ les milieux des côtés du triangle ABC, et A″, B″, C″ les milieux des droites HE, DG, FI. Lorque le rapport (EA : AB) varie :

1° Les droites A′A″, B′B″, C′C″ se coupent constamment sur l'hyperbole passant par A′, B′, C′, le centre de gravité G de ABC, le centre O du cercle circonscrit et le milieu de la distance des points de Brocard.

2° Le centre de gravité du triangle A″B″C″ reste fixe ;

3° Chacun des côtés du triangle A″B″C″ enveloppe une parabole tan-

gente à un côté du triangle ABC et aux deux hauteurs issues de ses extrémités. (Déprez.)

×**995**. Construire un pseudocarré, connaissant les longueurs de trois côtés. Quand le quadrilatère sera-t-il inscriptible ? Quand sera-t-il circonscriptible ? (J. N.).

×**996**. La base BC d'un triangle ABC est divisée harmoniquement aux points D, E. Étudier la variation de la somme $\overline{AD}^2 + \overline{AE}^2$. (J. N.)

×**997**. Soient A', B', C', D' les projections d'un point M sur les côtés AB, BC, CD, DA d'un quadrilatère donné ABCD.

1° Si l'angle de deux côtés opposés du quadrangle A'B'C'D' est constant, le lieu de M est une circonférence.

2° Si le rapport des longueurs de deux côtés opposés est donné, le point M décrit encore une circonférence.

3° Trouver un point M tel que le quadrangle A'B'C'D' soit un parallélogramme ou un pseudocarré. (J. Neuberg.)

×**998**. Quatre droites a, b, c, d, prises trois à trois, forment quatre triangles; on sait que les centres α, β, γ, δ des cercles circonscrits à ces triangles appartiennent à une même circonférence. Si l'on donne ces centres, on peut trouver une infinité de quadrilatères correspondants *abcd*. Démontrer que les côtés de ces quadrilatères pivotent autour de quatre points fixes et que les sommets se meuvent sur des circonférences égales à la circonférence $\alpha\beta\gamma\delta$. (J. Neuberg.)

999. D'un point P on abaisse les normales PA, PB, PC, PD à une ellipse (E); soient A', B', C', D' leurs seconds points d'intersection avec cette ellipse. Si les points A', B', C', D' appartiennent à une même circonférence, on demande le *lieu du centre* et l'*enveloppe* de l'hyperbole d'Apollonius relative au point P. (J. Gillet.)

1000. Soient A un point d'une conique (Σ) de centre O; M et N le centre de courbure et l'extrémité de la corde normale au point A; C et D les projections sur les axes du point A_1, diamétralement opposé à A sur (Σ). Les droites OM, A_1N, CD sont concourantes. Si A_2 est le symétrique de A par rapport à l'axe a, les droites A_2N et CD se coupent sur la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe a.

La parallèle menée à l'axe a par un point d'intersection E de CD avec (Σ) coupe la normale en A, au point H; la perpendiculaire à la normale en ce point rencontre EA au point K. Démontrer que KM est perpendiculaire à l'axe a. (C. Servais.)

TABLE DES MATIÈRES(*).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

×Questions d'arithmologie; par M. G. de Rocquigny. 36
×Théorème; par M. Laurens 40
Sommation des puissances semblables des n premiers nombres entiers; par M. Barbette 105, 142
Note sur une certaine relation; par M. E. Gelin 220
×Sur un théorème d'arithmétique; par M. V. Jamet 271
×Question 846; solutions par M. V. Jamet 27, 52
×Question 828; solution par M. Soons 72
×Question 868; solution par M. Mandart 123
Question 864; solution par M. Fauquembergue. 169
×Question 869; solution par M. Spino 171
×Question 893; solution par MM. Spino, Droz, etc. 173
×Question 908; solution par M. H. Brocard 209
×Question 915; solutions par MM. François et Mandart 211
×Question 896; solution par MM. Hacken, Verdeyen, etc. 236
×Question 924; solution par MM. Boutin, Couturier, etc. 277

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

Sur le théorème de d'Alembert; par V. Jamet 5
×Théorème de Trigonométrie; par M. Delens 68
×La formule de N. de Cusa; par M. H. Brocard 183
Théorème sur les déterminants (J. N.). 251
×Question 839; solution par M. Absolonne 73
×Question 895; solution par MM. Barbette, Listray, etc. 208
×Question 926; solution par MM. Hacken, Mandart, etc. 277

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE.

Quelques propriétés d'une droite partagée en moyenne et extrême raison; par M. Cl. Thiry 22
Volume du tétraèdre; d'après M. Appell 40

(*) Pour les rectifications, voir pp. 32, 56, 128, 240, 264. Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.
Longueur de la bissectrice dans un triangle; par MM. Lavernay et Meurice 40, 92
Sur le cercle des neuf points; par M. Gillet et M. Neuberg 42, 183
Sur le tétraèdre isoscèle 69
Quelques systèmes de tiges articulées; par M. R. Bricard 111
Note sur la géométrie du triangle; par M. E. Lemoine. 153
Sur la transversale d'un triangle; par M. J. Wasteels 158
Valeurs approchées de π 162
Sur le cercle de Boscowich 163
Sur les figures semblables (J. N.) 164
Sur le principe fondamental de la géométrie riemannienne (P. M.) 181
Sur le centre des moyennes harmoniques; par M. Verbessem 251
Sur quelques quadrilatères spéciaux; par M. J. Neuberg. 268
Question 851; solution par M. Barisien 29
Question 822; solution par M. Vladimirescu. 46
Question 870; solution par MM. Delahaye et Déprez 76
Question 860; solutions par MM. François, Déprez, etc. 97
Question 861; solution par M. Barisien 101
Question 836; solution par M. Droz 120
Question 866; solution par Mlle de Haas, etc. 122
Question 863; solution par M. E. Lemoine 148
Question 873; solution par MM. Droz et Déprez 149
Question 841; solution par M. Sollertinsky 166
Question 877; solution par M. Droz. 207
Question 862; solution par M. Droz. 233
Question 888; solution par MM. François, Déprez, etc. 235
Question 900; solutions par MM. Listray, Droz, etc. 258

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ, GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Applications d'un théorème de Chasles; par M. Balitrand 62, 81
Construction d'une ellipse, etc. 70
Conditions pour qu'un système de trois axes soit trirectangle; par M. Dauge. 85
Rayon de courbure d'une conique; par MM. Gob et Neuberg 133, 223
Quelques propriétés des coniques; par M. Verbessem. 184
Sur quelques propriétés de l'hyperbole; par M. Pirondini 217
Sur une ellipse associée au triangle; par M. H. Mandart. 241
Question 830; solution par MM. Retali, Deprez et Droz 25
Question 859; solution par MM. Deprez, Droz, etc. 53, 95
Question 818; solution par M. Droz. 94
Question 837; solution par M. Deprez. 121
Question 800; solution par MM. Deprez et Droz 144
Question 806; solutions par MM. Derville et Droz 145
Question 844; solutions par MM. Retali et Deprez. 167
Question 875; solution par M. Gillet 171

Pages.
Question 823; solutions par MM. Retali et Barisien 227
Question 881; solution par MM. Mandart, Verdeyen, etc. 234
Questions 880 et 887; solutions par MM. Mandart, Déprez, etc. 273

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Sur une famille remarquable de courbes; par M. G. Pirondini. 14
Sur deux classes de surfaces qui se correspondent; par M. S. Mangeot. . . 34
Sur l'enveloppe d'une certaine droite (J. M.) 129
Sur les strophoïdales; par M. G. de Longchamps. 138
Un problème sur les courbes gauches; par M. Balitrand 159
Nouvelle propriété caractéristique des courbes de Bertrand; par M. E. Cesáro 265
Question 813; solution par M. Déprez 24
Question 847; solution par MM. Barisien et Droz 28
Sur la question 852; par M. Retali 39
Question 829; solutions par MM. Barisien, Droz, etc. 47
Question 899; solution par M. H. Brocard 124
Question 817; solution par M. Morel 196
Question 849; solutions par MM. H. Brocard, V. Jamet, etc. 197
Question 871; solutions par MM. Brocard, Retali, etc. 206
Question 834; solution par M. Retali 230
Question 867; solutions par MM. Mandart, Colette, etc.. 255

CALCUL DIFFÉRENTIEL, CALCUL INTÉGRAL, THÉORIE DES SÉRIES.

Sur une propriété fondamentale du calcul asymptotique; par M. E. Cesáro . 57
Sur les Wronskiens (J. N.) 165
Sur l'évaluation approchée d'une série elliptique; par M. E. Cesáro. . . . 177
Sur un paradoxe mathématique; par MM. E. N. Barisien et P. Mansion . . 250
Question 833; solution par M. Droz 51
Question 634; solution par MM. Cristesco et Decamps 71
Question 790; solution par M. Cesáro 195
Question 849; solutions par MM. Cl. Servais, H. Brocard, etc. 197
Question 865; solution par MM. Absolonne et Vladimirescu 205
Question 874; solution par M. Absolonne 256
Question 897; solution par MM. Gillet et Déprez 257

BIBLIOGRAPHIE, BIOGRAPHIE, ETC.

E. C. Catalan 33
E. E. Kummer 40
E. Rousseau. Quelques théorèmes de géométrie (J. Neuberg). 18
J. Fitz-Patrick et G. Chevrel. Exercices d'arithmétique (G. Floquet) . . 19
E. Lemoine. Géométrographie 20

Pages.

N. W. R. Ball. An Essay on Newton's Principia (P. M.). 21
Lobatschewsky. Theory of Parallels. 21
G. B. Halsted. Elementary Synthetic Geometry. 21
Annuaire du bureau des longitudes. 22
R. Lachlan. Modern Pure Geometry (J. N) 68
H. Padé. Premières leçons d'Algèbre 87
I. Jacquemin. Géométrie descriptive 91
C. Papelier. Coordonnées tangentielles 115
A. Rebière. Les femmes dans la science (J. N.) 135
Compte-rendu du Comité Lobatchefsky 135
Cantor. Geschichte der Mathematik, Band I (zweite Aufl.). Band III, Erste Abtheilung (P. M.) 136
The Mathematical Gazette. 138
C. Mosnat. Problèmes de Géométrie analytique, t. III 138
G. Peano. Analisi infinitesimale 191
C. Jordan. Cours d'analyse, t. I, II, 2e éd. (P. M.). 192
F. J. Éléments et exercices de Géométrie descriptive (P. M.) 224
Ed. Lucas. Récréations mathématiques, t. IV (H. B.) 225
J. J. Milne et R. F. Davis. Geometrical Conics (J. N.) 246
E. Borel et J. Drach. Théorie des nombres et Algèbre supérieure (H. B.) . 247
M. d'Ocagne. Calcul simplifié (J. N.) 248
G. Fouret. Complexes et congruences 248
Le Bulletin de Mathématiques spéciales 249
G. Arnoux. Espaces arithmétiques hypermagiques (H. B.) 272

QUESTIONS D'EXAMEN.

Questions 601-603, 604-608, 609-616, 617-621, 622-632, 633-635, 636-639, 640-647, 648-656, 657-661, 662-665.
pp. 30, 54, 73, 102, 125, 150, 173, 213, 236, 261, 277
Concours de l'École Polytechnique de Paris, en 1894 142
Concours de l'École militaire spéciale et de l'École navale, en 1894 191
Concours d'agrégation de 1894. Mathématiques élémentaires, solution par M. Neuberg 252
Sur la question 368 . . . . . 92, 116

SUPPLÉMENT.

M. d'Ocagne. Compte rendu de l'ouvrage intitulé : *Principes et développements de Géométrie cinématique*, par M. Mannheim (7 pages).

QUESTIONS(*).

	POSÉE (1) I ou (2) I	RÉSOL (2) IV
95	206 (28)	NR
	(1) III ou (2) I	
252	143 (28)	NR
267	175 (28)	NR
	(1) IV ou (2) I	
×333	119 (29)	NR
353	159	
×357	159	
383	231 (29)	NR
387, 2e p.	231 (29)	NR
	(1) V ou (2) I	
411	23 (29)	NR
415	46	NR
	(1) VI ou (2) I	
505, 2e p.	23 (30)	NR
×513	71 (30)	NR
	(1) VII ou (2) I	
594	264 (31)	NR
597	280	
598	280 (31)	NR
	(1) VIII ou (2) I	
×634	279	71
×635	279 (31)	NR
	(1) X	
×677	72	
×681	95	
699	279	
	(2) II	
767	128	
778	176	NR
782	215	NR
×783	216	
784	216	
785	216	NR
×789	240	
790	240	194
×799	281	NR
800	281	144
	(2) III	
×803	31	NR
806	32	145
×811	55	NR
813	56	24
×814	56	NR
815	56	NR
×816	56	NR
817	56	196
818	56	94
×822	79	46
823	79	227
825	80	NR
828	103	72
829	103	47
830	103	25
831	103	NR
833	104	51
834	104	230
×835	104	NR
836	104	120
837	127	121
×839	128	73
×841	128	166
844	128	167
846	151	27, 52
847	151	28
848	152	
849	152	197
×851	152	29
857	176	
859	176	53, 95
×860	176	97
×861	176	101
×862	176	233
×863	176	148
864	214	169
865	214	205
×866	214	122
867	214	254
×868	215	123
×869	215	171
×870	215	76
871	215	206
872	215	
×873	215	149
874	215	256
875	215	171
876	216	NR
×877	216	207
×878	216	
×879	216	
880	240	273
881	240	234
882	240	
×883	240	173
884	240	
885	240	
×886	240	
887	263	273
×888	263	235
×889	264	
890	264	
891	264	
892	264, 288	
893	264	
894	264	
×895	288	208
×896	288	236
897	288	257
898	288	
899	288	124
×900	288	258
	(2) IV	
901	31	
902	31	
903	32	
904	32	
905	32	
906	32	NR
907	32	
908	32	209
×909	55	
910	55	
911	55	
912	56	
913	56	
914	56	
×915	56	211
×916	56	
917	56	
918	56	
919	79	
×920	79	
×921	79	
922	80	
923	80	
×924	80	277
×925	80	
×926	80	277
×927	80	
×928	103	

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions suivantes sauf celles qui sont marquées des lettres NR (non résolue) ; elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur celles-ci.

	POSÉE (2) III	RÉSOL (2) IV
×929	103	
930	104	
931	104	
932	104	NR
×933	104	
934	104	
935	104	
×936	104	
937	127	
938	127	
939	127	
940	127	
×941	128	
942	128	
943	128	
×944	128	
945	128	
946	151	
947	151	
×948	151	
×949	151	
×950	152	
×951	152	
952	152	
953	152	NR
954	152	
955	175	
956	175	
957	175	
×958	175	NR
×959	175	
×960	176	NR
×961	176	
962	176	
×963	176	
964	214	NR
965	215	NR
966	215	NR
967	215	
×968	215	
×969	215	NR
970	216	
971	216	
972	216	NR
×973	216	NR
974	239	
975	239	
976	239	
977	239	
978	239	NR
979	240	NR
×980	241	NR
×981	241	
×982	241	
983	263	NR
984	263	NR
985	263	
×986	263	NR
×987	264	
988	264	NR
×989	264	NR
990	264	
991	264	
992	279	NR
993	279	NR
994	279	NR
×995	280	NR
×996	280	NR
×997	280	NR
×998	280	NR
999	280	NR
1000	280	NR

TABLE DES NOMS.

Absolonne, 73, 172, 204, 205, 256.
Arnoux, 272.
Alauda, 152.
Alembert (d'). 5.
Amigues, 5, 210.
Apollonius, 94, 96, 137, 166.
Appell, 40, 85, 115, 177.
Arago, 22.
Archimède, 137.
Audibert, 180.
Babbage, 248.
Bachet, 20.
Balitrand, 62, 81, 159.
Ball, 21.
Barisien, 27, 28, 29, 32, 39, 47, 51, 53. 79, 80, 95, 101, 103, 104, 122, 124, 128, 148, 151, 152, 166, 172, 175, 177, 198, 205, 206, 208, 210, 215, 220, 228, 230, 234, 238, 239, 250, 254, 257, 261, 263, 274, 278, 279, 281, 283.
Barbette, 102, 105, 143, 208, 210.
Barniville. 32.
Bastin, 278.
Bellachi 173.
Bellens, 206.
Beltrami, 43.
Bergmans, 43, 203.
Bernoulli, 41.
Bertrand (E.), 117.
Bertrand (J.), 5, 87, 161, 265.
Biddle, 103.
Bollée, 248.
Borel, 247.
Boscowich, 138, 163.
Bossut, 273.
Bouquet de la Grye, 22.
Bouquet, 6.
Bourdon, 5
Boutin, 277.
Bozoky (de), 235.
Braikenridge, 43.
Brianchon, 81, 185.
Bricard, 111, 240.
Briot, 5.
Brocard. 22, 68, 121, 124, 145, 172, 183, 198, 206, 209, 227, 247, 273.
Cambier, 31. 32, 55, 93, 118, 209, 235.
Cantor (M.), 136.
Carnot (L.), 224, 273.
Casey, 46, 164.
Castiau, 210.
Catalan. 27, 33, 52, 80, 173, 195, 236, 257, 279.
Cayley, 69.
Cauchy, 5, 182, 273.
Cesáro (E.), 57, 65, 159, 195, 265.
Chasles, 43, 62.
Chevret, 19.
Choquet, 5.
Collette, 45, 53, 99, 172, 206, 255.
Comberousse (de), 68.
Cornu, 22.
Cournot, 273.
Couturier, 277, 278.

Cristesco, 71, 261, 277.
Cusa (de), 183.
Darboux, 5, 57.
Dauge, 85.
Davis, 246.
Decamps, 30, 71, 102, 149.
Dedekind, 41.
Delahaye, 30, 77, 123, 149, 208, 210, 261.
Delens, 69, 76.
Delville, 147, 264.
Demoulin, 165, 220.
Déprez, 24, 30, 48, 53, 72, 97, 101, 116, 119, 120, 122, 124, 144, 149, 166, 169, 172, 204, 206, 210, 216, 230, 233, 234, 235; 255, 257, 259, 264, 274, 276, 280.
Dessaint, 32.
Dickenson, 79.
Dirichlet, 40.
Dobs, 216.
Donner (Fr.), 30.
Dostor, 209.
Dowling, 46.
Drach, 247.
Droz Farny, 28, 48, 51, 53, 94, 98, 120, 124, 127, 128, 144, 145, 149, 151, 172, 173, 204, 206, 207, 210, 215, 233, 234, 239, 255, 259, 275, 276, 277.
Dutordoir, 5.
Euclide, 68, 181.
Euler, 5, 18, 20, 61.
F. J., 224.
Fauquembergue, 151, 169, 212, 277, 280.
Faye, 22.
Fermat, 20, 41, 52, 212, 226.
Feuerbach, 244.
Fitz-Patrick, 19.
Fleuriais, 22.
Floquet, 19.
Foncenex, 5.
Fourier, 193.
Fouret, 248, 271.
François, 97, 149, 210, 211, 235, 277.
Freycinet (de), 273.
Gauss, 5, 20, 41.
Gelin (E.), 44, 220.
Genaille, 248.
Genty, 69.
Gérard, 181.
Gillet, 42, 53, 56, 124, 171, 176, 234, 257, 274, 280.
Gino Loria, 5.
Girard, 5.
Giudice, 73.
Gob, 133, 220.
Greenstreet, 28, 149, 234, 276, 277.
Greiner, 31.
Gunther, 248.
Haas (Mlle de), 30, 149, 208, 255.
Hacken, 28, 90, 124, 204, 236, 277.
Halley, 21.
Halsted, 21.
Henry, 209.
Hermite, 41, 72.
Hertz, 22.
Hoocke, 21.
Houël, 21.
Houtain, 250.
Jacquemin, 91.
Jamet, 5, 27, 171, 200, 271.
Jablonski, 5.
Janssen, 22.
Joachimescu, 72.
Joachimsthal, 244.
Jonesco, 277, 280.
Jonquières (de), 167.
Jordan, 192.
Juel, 116, 127.
Keelhoff, 206.
Kluyver, 180.
Kronecker, 40.
Kummer, 40.
Labenne, 43. 148, 227.
Lachlan, 68.
Lagrange, 5, 181.
Laisant, 100, 164, 256, 272.
Langley, 138.
Lamé, 19.
Lampe, 41.
Lantsheere (de), 46.
Laplace, 5, 193.
Laurens, 40.
Laurent, 5.
Lauvernay, 40.
Lebon, 32.
Lefébure, 5.
Legendre, 27, 33, 211.
Lemoine, 20, 68, 69, 72, 117, 121, 127, 152, 153, 187, 216, 234.
Lenoir, 248.
Lippens, 30.
Listray, 208, 236, 258,.
Lobatschewsky, 21, 135, 181.
Longchamps (de), 64, 81, 138.
Maclaurin, 43.
Mackay, 138, 264.
Mackenzie, 80.
Malus, 249.
Mandart, 28, 30, 53, 80, 123, 128, 144, 149, 172, 204, 211, 234, 241, 274, 277, 280.
Mangeot, 34.
Mannheim, 63, 133, 248.
Mansion, 6, 21, 33, 82, 183, 192, 194, 225, 251.
Matrot, 20.
Maurel, 248.
Maxwell, 22.
Mennesson, 233.
Merante, 174.
Meurice, 92, 103, 127.
Miller, 103, 238.
Milne, 93, 116, 248.
Mister, 120.
Morel (A.), 24, 48, 196.
Moret-Blanc, 268.
Morley, 32.
Mosnat, 138.
Moschopoulos, 273.
Mouchez, 22.
Nagel, 245.
Neuberg, 19, 26, 31, 33, 43, 47, 55, 68, 76, 77, 81, 82, 94, 97, 134, 135, 138, 141, 145, 151, 152, 165, 176, 184, 187, 214, 216, 219, 220, 240, 246, 248, 251, 254, 264, 268, 274, 280.
Niewenglowsky, 5, 249.
Ocagne (d'), 55, 65, 70, 184, 188, 248.
Ozanam, 183.
Padé, 87.
Papelier, 115.
Pappus, 134.
Pascal, 81, 148, 248.
Peano, 192.
Pollet, 159.
Petit-Bois, 151.
Pirondini, 14, 217.
Plücker, 249.
Poincaré, 22, 180.
Polak, 30, 255.
Poort, 210.
Renshaw, 207.
Retali, 26, 39, 49, 55, 56, 167, 206, 227, 230.
Ribaucour, 32.
Riemann, 182, 192.
Rivals, 84.
Roberval, 141.

Rocquigny (de), 36, 56, 103, 123, 169, 171, 211.
Rouché. 68.
Rouse Ball, 21.
Rousseau, 18.
Salmon, 49.
Scheut, 248.
Schlegel, 251.
Schoute, 94, 149.
Serret (P.), 253.
Servais (M), 71, 95, 117, 203, 264, 280.
Smeets, 29.
Snell, 183.
Soho, 248.
Sollertinsky, 117, 118, 166, 233.
Soons, 72.
Spino, 173.
Steiner, 81, 251.
Strymeersch, 210, 277, 280.
Sturm (R.), 248.
Tannery (J.), 19, 87, 273.
Tannery (P.), 136.
Tarry, 226.
Taylor (H.), 184.
Tchebycheff, 248.
Terquem, 50.
Thiry (M.), 22.
Thomas, 175.
Tilly (de), 180.
Tisserand, 22.
Transon, 240.
Troncet, 248.
Tucker, 262, 263.
V.. 80.
Vallès, 273.
Van Aubel (H.), 164, 176, 270.
Vanderstegen, 277.
Verbessem, 184, 251.
Verdeyen, 30, 149, 173, 208, 234, 236, 261, 277.
Verhelst, 173., 277
Viaris, 248.
Vladimirescu, 47, 204, 205, 277, 280.
Vuibert. 31, 54, 55, 79, 211, 212.
Walecki, 5.
Wasteels (J.), 158.
Weber, 41.
Wilson, 20.
Winkler, 193.
Wronski, 191.
Zeuthen, 136.

PRINCIPES ET DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE, par le colonel MANNHEIM, professeur à l'École polytechnique. — 1 vol. in-4° de 589 pages. — Paris, Gauthier-Villars, 1894.

Quiconque s'occupe de mathématiques connaît les remarquables travaux de géométrie pure du colonel Mannheim et, plus particulièrement, celles de ses recherches qui ont contribué à édifier le corps de doctrine spécial auquel il a donné le nom de *Géométrie cinématique.*

« Tandis, nous dit M. Mannheim, que la cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces, la géométrie cinématique a pour objet l'étude du mouvement indépendamment des forces, du temps et de tout élément arbitraire étranger à la figure mobile. Réservant, avec Ampère, le nom de *déplacement* pour désigner un mouvement dans lequel on ne considère pas la vitesse, je dirai donc, pour bien préciser : *la géométrie cinématique étudie les propriétés intrinsèques des déplacements des figures.* »

Outre l'intérêt qu'elle présente par elle-même, la géométrie cinématique offre celui de se prêter à des applications nombreuses et importantes à diverses branches de la géométrie et notamment à la théorie des surfaces.

Les travaux de M. Mannheim sur ce sujet se trouvaient disséminés dans une foule de Mémoires et de Notes insérés dans des recueils divers.

Afin d'unifier cette partie de son œuvre scientifique et de lui donner une forme définitive, l'éminent professeur a repris, coordonné, relié tous ses écrits antérieurs, en les complétant d'ailleurs par d'importantes additions, pour en constituer le volume qu'il présente aujourd'hui au public mathématique et qui va être ici sommairement analysé.

Il convient toutefois de noter que ce n'est pas un *Traité* de géométrie cinématique qu'a entendu écrire M. Mannheim. Depuis qu'ont été publiés ses premiers essais dans cette voie, d'autres sont venus qui ont développé diverses parties du sujet dans d'autres directions. Il y aurait lieu, sans doute, d'opérer une synthèse générale de tous ces travaux pour en tirer un exposé didactique de la géométrie cinématique. C'est, au surplus,

ce qu'a déjà fait M. Schœnflies, pour une partie limitée du sujet, dans un ouvrage des plus recommandables récemment paru (1). Le point de vue auquel s'est placé M. Mannheim est tout autre; ce qu'il a voulu présenter, c'est uniquement un tableau d'ensemble de son œuvre personnelle.

On conçoit, d'après ce qui vient d'être dit, que les matières traitées dans l'ouvrage doivent se répartir en deux grandes familles : les principes de la géométrie cinématique et leurs applications.

Divers procédés pouvaient être admis pour leur répartition dans l'ensemble du livre. L'auteur aurait pu d'abord épuiser dans une première partie tout ce qui est relatif aux principes en réservant les applications pour une seconde. Il aurait pu aussi disséminer toutes les applications, à titre d'exemples, dans l'exposé des principes. Le parti auquel il s'est arrêté, très judicieusement selon nous, procède à la fois de l'une et de l'autre manière de faire. L'exposé des principes fait d'un seul trait courait le risque de paraître un peu aride; les applications, en venant le couper, n'ont pas seulement pour effet de prévenir cette aridité; elles ont aussi l'avantage d'éclairer cet exposé et d'en mieux faire saisir la portée. D'autre part, certaines applications à des sujets bien définis auraient perdu à être réduites aux proportions de simples exemples, ou même divisées, si les principes dont elles seraient susceptibles de constituer l'illustration se trouvaient épars dans l'exposé général. Le plan mixte adopté par M. Mannheim a paré à tous ces inconvénients.

Dans les deux premières parties, consacrées l'une au plan, l'autre à l'espace, l'exposé des principes est fractionné par groupes suivis chacun d'applications variées. Dans la troisième partie sont rassemblées diverses applications plus étendues formant chacune un tout homogène.

Enfin un appendice, intéressant plutôt la genèse du sujet, renferme diverses notes qui permettent de voir comment M. Mannheim a abordé l'étude du déplacement sur un plan d'une figure polygonale de forme variable, ainsi que les solutions de diverses questions qui, sans appartenir à la géométrie cinématique proprement dite, s'y rattachent par quelque point.

(1) *La Géométrie du Mouvement*, par Schœnflies, traduit de l'allemand par le capitaine Speckel, suivi de *Notions géométriques sur les complexes et les congruences de droites*, par Fouret; 1 vol. petit in 8° de 292 pp.; Paris, Gauthier-Villars, 1893.

La géométrie cinématique plane débute par l'étude du déplacement d'une figure de forme invariable sur un plan, étude qui a pour base les travaux classiques de Chasles sur le centre instantané de rotation.

Parmi les applications diverses que l'auteur présente de cette théorie, il convient de remarquer celle qui se rapporte à un cas particulier de la courbe à longue inflexion où l'ordre de cette courbe s'abaisse du sixième au quatrième (pp. 5-6) et où le mouvement de la figure peut être obtenu par roulement d'une ovale de Descartes sur une ovale de Descartes (p. 13).

Afin de montrer sur un exemple préliminaire comment l'étude du déplacement d'une figure de grandeur *variable* peut se ramener au cas précédent, M. Mannheim traite immédiatement le problème du triangle de grandeur variable restant semblable à un triangle donné (p. 15) pour en déduire d'élégantes constructions du centre de courbure des diverses espèces de coniques. Il faut donner une mention particulière au procédé si simple par lequel l'auteur établit la formule de Maclaurin faisant connaître le centre de courbure de la *développée* d'une conique (p. 21).

A propos de la détermination des centres de courbure des courbes enveloppes ou des courbes décrites pendant le déplacement d'une figure plane, l'auteur fait intervenir heureusement la considération de deux circonférences remarquables (p. 30), dont l'une a d'ailleurs été déjà considérée par Transon et par Bresse, et en donne un grand nombre d'élégantes applications.

M. Mannheim expose ensuite la théorie générale du déplacement d'une figure polygonale de grandeur variable, dont les formules sont d'une si grande fécondité, et il en fait diverses applications, notamment au problème des caustiques et à l'étude des systèmes articulés. Il n'introduit là rien d'essentiellement nouveau par rapport à ses publications antérieures.

Cette première partie du volume se termine par un élégant travail, d'ailleurs bien connu, de l'auteur sur les arcs de courbes planes ou sphériques considérées comme enveloppes de cercles.

Nous arrivons maintenant à la géométrie cinématique de l'espace, qui débute par la théorie du déplacement infiniment petit d'une figure de forme invariable. Fidèle à la marche générale que nous avons indiquée plus haut, l'auteur, à la suite d'un examen preliminaire relatif au déplacement infiniment petit d'un point, d'une droite ou d'un plan, fait une application des premiers

principes rencontrés aux surfaces réglées. Il revient ensuite à la théorie pour examiner en détail les propriétés des divers éléments géométriques qui jouent là le rôle primordial : droites conjuguées de Chasles, caractéristiques et foyers des plans, adjointes aux plans. Cette dernière notion, qui appartient bien en propre à M. Mannheim, est fort importante. En effet, les droites conjuguées qui interviennent si heureusement lorsque, parmi les données des déplacements, il existe des trajectoires de points, ne sauraient avoir d'utilité en dehors de ce cas, par exemple si les données comprennent des plans assujettis à toucher des surfaces fixes. Les adjointes rendent alors les plus grands services.

Les principes, très nombreux bien que très généraux, qui se rencontrent à cet endroit, sont immédiatement appliqués à l'étude des hélicoïdes réglés. L'auteur en déduit aussi la méthode des normales dans le cas d'un déplacement assujetti à cinq conditions.

Il faut noter en passant (p. 121) l'importante réduction effectuée par M. Mannheim de chacune des diverses conditions simples, qui entrent dans la définition du déplacement d'une figure, à cette condition unique : un point est assujetti à rester sur une surface donnée. D'autres auteurs, Schönemann notamment, avaient considéré des déplacements définis par des conditions de ce dernier genre sans s'être occupés de reconnaître si toute autre condition propre à définir le déplacement pouvait y être réduite. On peut entrevoir par là l'importance de la considération nouvelle de cette réduction.

L'auteur passe ensuite à la théorie du déplacement d'une figure de forme invariable lorsque ce déplacement n'est assujetti qu'à quatre conditions, théorie dont il a été le premier à faire ressortir l'importance.

Parmi les applications qu'il en donne, il faut mentionner, après la méthode des normales, étendue à ce cas et après son célèbre théorème sur les *normalies,* une théorie purement géométrique de la courbure des surfaces dont il a depuis longtemps fait connaître les grandes lignes dans son cours de l'École polytechnique, mais où il a introduit divers résultats nouveaux, notamment en ce qui concerne les *droites de courbure* dont la notion lui appartient. Il faut citer à part des propositions fort élégantes (pp. 150 et suiv.) relatives à la courbure du contour apparent d'une surface projetée orthogonalement sur un plan.

Vient ensuite l'étude très développée de quelques déplacements particuliers, qui renferme une foule de curieux théorèmes,

celui-ci notamment (p. 169) : *Lorsque quatre points d'une droite mobile restent sur quatre plans donnés, un point quelconque de cette droite décrit une ellipse.* Ce théorème est, pour l'auteur, l'occasion d'une digression pleine d'intérêt, qu'il généralise un peu plus loin (p. 180) en remplaçant les plans par des sphères.

Il convient aussi de donner une attention spéciale à la théorie si élégante de l'hyperboloïde articulé (p. 189) et aux curieuses conséquences que M. Mannheim en déduit relativement à la polhodie et l'herpolhodie dont il fait d'ailleurs, à la suite (p. 201), une étude directe. Il se trouve ainsi conduit par une voie toute géométrique à la remarque célèbre de M. de Sparre sur la non-existence des points d'inflexion de l'herpolhodie.

M. Mannheim envisage ensuite le déplacement d'une droite considérée comme arête d'un faisceau de plans ou d'un dièdre mobile. En particulier, l'étude des déplacements du dièdre droit formé par les sections principales d'une surface l'amène à la considération de ce qu'il appelle le *paraboloïde des huit droites,* surface qui puise son importance dans ce fait qu'elle exprime géométriquement la liaison existant entre les éléments de courbure des deux nappes de la surface lieu des centres de courbure principaux. Ce paraboloïde intervient dans diverses applications, notamment dans l'étude des surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre. On rencontre là nombre de démonstrations et de résultats nouveaux.

Reprenant la suite de la théorie générale du déplacement à quatre paramètres, l'auteur se trouve conduit, en raison du rôle important que cette surface joue dans cette théorie, à présenter une étude spéciale, purement géométrique, bien entendu, du conoïde de Plücker, contenant un grand nombre d'élégantes propriétés, parmi lesquelles plusieurs n'avaient pas encore été énoncées.

M. Mannheim, après avoir indiqué (p. 268) le principe de la curieuse représentation plane qu'il a imaginée pour les déplacements à quatre paramètres, développe la théorie générale des pinceaux de droites qui se lie intimement à ce mode de représentation.

L'auteur dit enfin quelques mots sur le déplacement à trois paramètres.

Là se termine la partie purement théorique de la géométrie cinématique. Les théorèmes qu'on y rencontre sont très nombreux, mais la complication qui semble résulter de leur multiplicité n'est qu'apparente et cesse d'exister lorsqu'on suit le fil qui les relie les uns aux autres.

La troisième partie contient, ainsi que nous l'avons expliqué plus haut, les *applications diverses*. Ces applications se rapportent aux normalies dont l'auteur donne diverses propriétés nouvelles, aux surfaces réglées, aux surfaces parallèles, à propos desquelles il fait connaître de curieux théorèmes, aux surfaces gauches formées par les normales principales de deux courbes, etc.

Il était important de découvrir, en géométrie cinématique, un mode de transformation analogue à ceux de la géométrie ordinaire, permettant de passer des propriétés relatives au déplacement des points d'une droite à celles du déplacement des faisceaux de plans. M. Mannheim fait connaître un tel mode de transformation qu'il éclaire d'exemples bien choisis et qu'il applique non seulement aux propriétés prises en elles-mêmes, mais encore à leur démonstration. On trouve là (p. 398), entre autres, un nouveau théorème qui constitue une bien jolie généralisation d'un théorème de M. Schœnflies.

A la suite de ce morceau, M. Mannheim a réuni toutes ses recherches, bien connues aujourd'hui, sur la surface de l'onde. Il est inutile d'insister ici sur leur importance.

La troisième partie se termine par des notions sur le déplacement infiniment petit d'une *figure polyédrale de dimensions variables*. C'est assurément là la partie la plus neuve du volume. Si, en effet, presque partout ailleurs, l'auteur s'est contenté de réunir en les coordonnant, voire en les complétant sur de nombreux points, ses publications antérieures, il nous livre ici des recherches absolument inédites. Les formules qu'il fait connaître généralisent pour l'espace celles qu'il a données depuis si longtemps pour le plan et ne semblent pas devoir être moins fécondes. Il en fait diverses applications, et l'on reconnaît parmi celles-ci plusieurs résultats qu'il s'était plu à publier précédemment sans dire la façon dont il les avait obtenus.

La méthode employée pour établir ces formules est constamment la même. Elle consiste toujours à profiter des éléments de grandeur *invariable*. De cette façon, les propriétés concernant les déplacements des figures de grandeur invariable, dont l'étude fait l'objet principal de l'ouvrage, permettent de traiter encore les différents cas de déplacement où les figures sont de grandeur variable.

L'Appendice, nous l'avons déjà dit, sert à fixer la genèse du corps de doctrine édifié par M. Mannheim, en replaçant sous les yeux du lecteur les essais dans lesquels il a jeté les premiers linéaments de la théorie générale. Parmi ces travaux, dont la plupart ont, en

outre, un sérieux intérêt intrinsèque, il convient de citer ceux qui se rapportent à la comparaison des longueurs d'arcs de courbes différentes et à l'Optique géométrique.

On pourra, nous l'espérons du moins, se faire par les indications sommaires qui précèdent une première idée de l'importance et de la richesse du beau livre de M. Mannheim, luxueusement édité par la maison Gauthier-Villars. Il sera accueilli avec une faveur marquée par tous les amis de la pure géométrie, qui ne pourront manquer d'admirer la rare habileté avec laquelle le savant professeur sait mettre en œuvre les méthodes les plus délicates.

M. D'OCAGNE.

Extrait de la *Revue des questions scientifiques*,
Deuxième série, t. VI, pp. 268-274, Juillet 1894.

MATHESIS

MATHESIS

RECUEIL MATHÉMATIQUE

A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES

ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE

PUBLIÉ PAR

P. MANSION ET **J. NEUBERG**

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Gand, Membre de l'Académie royale de Belgique, etc.

Ancien élève de l'École normale des sciences, Professeur ordinaire à l'Université de Liége Correspondant de l'Académie royale de Belgique, etc.

AVEC LA COLLABORATION DE PLUSIEURS PROFESSEURS BELGES ET ÉTRANGERS.

Ut pictura mathesis!
PH. BRETON.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME V. — ANNÉE 1895.

(TOME XV DE LA COLLECTION.)

GAND
AD. HOSTE, ÉDITEUR
IMPRIMEUR-LIBRAIRE
47, RUE DES CHAMPS, 47

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & FILS
IMPRIMEURS-LIBRAIRES
55, QUAI DES AUGUSTINS, 55

GAND, IMPRIMERIE C. ANNOOT-BRAECKMAN, AD. HOSTE, SUCCESSEUR

1895

ABRÉVIATIONS.

B. B. Bulletins de l'Académie royale de Belgique.

C. R. Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

N. A. M. Nouvelles Annales de Mathématiques (depuis 1842).

N. C. M. Nouvelle Correspondance Mathématique (1874-1880).

J. M. E. (ou J. M. S). Journal de Mathématiques élémentaires (ou Journal de Mathématiques spéciales), fondé en 1877 par BOURGET, continué par G. DE LONGCHAMPS.

Crelle, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par CRELLE en 1826, continué successivement par BORCHARDT, KRONECKER et WEIERSTRASS, par KRONECKER et par FUCHS (en allemand surtout).

Liouville, Journal de Mathématiques pures et appliquées, fondé par LIOUVILLE en 1836, continué d'abord par RESAL, puis par JORDAN.

(2), III, 327-333 signifie : Deuxième série, tome troisième, pages 327 à 333.

MATHESIS

SUR L'AXE D'HOMOLOGIE DU TRIANGLE FONDAMENTAL ET DU TRIANGLE DE BROCARD;

par M. G. Tarry.

Théorème. *Étant données deux figures homographiques dans un même plan, les points de l'une des figures qui, avec leurs homologues de la seconde figure, sont alignés sur un point fixe, sont situés sur une même conique qui passe par le point fixe et par les points doubles des deux figures.*

Et corrélativement, les droites de l'une des figures qui rencontrent leurs homologues sur une droite fixe, enveloppent une autre conique qui est tangente à la droite fixe et aux droites doubles des deux figures (Chasles, *Géométrie Supérieure*, p. 401).

Démonstration. Désignons par φ et φ' les deux figures homographiques, par A et A′ deux points homologues en ligne droite avec le point donné D′, par D l'homologue de D′ considéré comme appartenant à φ'. Lorsque le couple AA′ varie, les droites DA, D′A′ engendrent deux faisceaux homographiques; donc leur point d'intersection A engendre une conique passant par D et D′ et, comme il est facile de le voir, par les points doubles de φ et φ'.

On démontrerait de la même manière la propriété corrélative.

Applications. Soient ABC le triangle *fondamental*, $A_1B_1C_1$ le premier triangle de Brocard; ces triangles, qui sont inversement semblables, déterminent deux figures inversement semblables, φ et φ', cas particulier de deux figures homographiques. Les droites doubles de ces figures sont la droite à l'infini i, et les axes de pseudo-symétrie δ, δ' qui se confondent avec les axes d'inertie du triangle ABC et avec les axes de l'ellipse de Steiner; les points doubles sont le barycentre G et les points à l'infini sur δ et sur δ'.

Dans ces figures, à tout point X il correspond deux coniques S_X, S'_X, qui sont respectivement les lieux des points homologues de φ, φ' qui sont alignés sur X. De même, à toute droite x il correspond deux coniques

s_x, s'_x, qui sont respectivement les enveloppes des droites homologues de φ, φ' qui se rencontrent sur x.

Les coniques S_X, S'_X, sont des hyperboles équilatères qui passent par G et ont leurs asymptotes parallèles aux droites δ, δ'.

Si l'on prend pour X le centre d'homologie D des triangles ABC et $A_1B_1C_1$, l'hyperbole associée S_D est circonscrite à ABC; c'est donc l'*Hyperbole de Kiepert*. Dès lors, il est évident que toute droite qui joint un point quelconque de l'hyperbole de Kiepert à son homologue dans la figure φ', passe par le centre d'homologie D. Par exemple, la droite NO, qui joint le point de Tarry N au centre O du cercle ABC passe par D.

Les coniques s_x, s'_x sont des paraboles touchant les axes de Steiner δ, δ'.

Si l'on prend pour x l'axe d'homologie d des triangles ABC et $A_1B_1C_1$, la parabole associée s_d est tangente aux axes de Steiner δ et δ', à l'axe d'homologie d, et aux côtés du triangle de référence ABC; la parabole s'_d touche δ, δ', d et les côtés du triangle $A_1B_1C_1$.

La directrice de la parabole s_d, d'après un théorème connu, passe par l'orthocentre H du triangle circonscrit ABC; elle passe aussi par G, point d'intersection des tangentes rectangulaires δ, δ'. Cette droite est donc la droite d'Euler HO; par suite, la parabole s_d est celle que M. Neuberg a rencontrée dans son étude sur le point de Steiner (J.M.S., 1886, p. 30.)

La parabole de Neuberg, enveloppe des polaires trilinéaires des points de la droite GK par rapport au triangle ABC, est aussi tangente à la droite de Lemoine, polaire trilinéaire du point de Lemoine K; son foyer est le pôle trilinéaire de la droite OK. Les droites qui joignent les sommets du triangle fondamental aux points de contact des côtés opposés avec la parabole s_d passent par le point de Steiner (Neuberg, *loc. cit.*).

La droite de Simson, relative à la projection du point de Steiner sur la droite NG est parallèle à la droite HG (E. Cesàro, N. A. M., 1887, p. 217). En conséquence, le foyer F de s_d est le second point de rencontre de la circonférence ABC avec la droite NG.

La parabole s'_d a pour foyer F′ le second point d'intersection de la circonférence de Brocard avec la droite qui joint le centre du cercle ABC, homologue de N, au barycentre G, point double. Les droites GF, GF′ étant homologues dans φ et φ', sont également inclinées sur δ; GF est donc la directrice de s'_d.

Considérons maintenant le triangle GFF'. La parabole s_d a pour foyer F, pour directrice GF'; son homologue s'_d a pour foyer F', pour directrice GF. Les symétriques du foyer d'une parabole, par rapport à ses tangentes, étant situés sur la directrice, les tangentes communes aux deux paraboles s_d, s'_d sont les bissectrices de l'angle FGF' (ou δ et δ') et la perpendiculaire au milieu de la droite FF'. Cette dernière est donc la droite d. On a donc le théorème suivant : *L'axe d'homologie d des triangles* ABC *et* $A_1B_1C_1$ *est perpendiculaire au milieu de la droite* FF'.

FF' étant parallèle à ON, nous avons enfin une démonstration géométrique de la propriété que la droite d est perpendiculaire à ON.

Remarques. I. Je signalerai encore une conique remarquable de la géométrie du triangle : c'est l'ellipse imaginaire, qui a pour centre le point G et qui est conjuguée au triangle ABC; ses axes coïncident avec les axes de Steiner δ, δ'. Pour parvenir à la connaissance de cette ellipse, il suffit de projeter le triangle orthogonalement suivant un triangle équilatéral; le cercle circonscrit et le cercle conjugué à ce dernier triangle sont les projections d'une ellipse circonscrite et d'une ellipse conjuguée au triangle ABC, qui ont même centre G et leurs axes dirigés suivant les mêmes droites. Par rapport à cette ellipse imaginaire, D est la polaire de d.

II. Soient P_aBC, B_bCA, P_cAB trois triangles isoscèles semblables, construits sur les côtés du triangle ABC. On sait que le point d'intersection des droites AP_a, BP_b, CP_c engendre l'hyperbole de Kiepert, et que cette courbe est aussi le lieu du point d'intersection des perpendiculaires abaissées de A, B, C respectivement sur les droites P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b. Pour deux valeurs de l'angle P_aBC, les trois points P_a, P_b, P_c sont en ligne droite; les deux droites remarquables ainsi obtenues sont précisément les axes de Steiner δ, δ'.

Les côtés du triangle $P_aP_bP_c$ enveloppent trois paraboles, qui ont pour tangentes communes les droites δ, δ' et qui sont inscrites respectivement aux triangles OB'C', OC'A' et OA'B', A', B' et C' désignant les milieux des côtés du triangle ABC.

Bien que ces propriétés soient connues, nous avons cru utile de les rappeler ici.

SUR UNE CERTAINE ENVELOPPE;

par M. Desaint.

1. La normale en un point (x, y) de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

a pour équation

$$\frac{X-x}{b^2x}=\frac{Y-y}{a^2y}, \quad \text{ou} \quad \frac{a^2X}{x}-\frac{b^2Y}{y}=a^2-b^2, \tag{2}$$

X et Y désignant les coordonnées courantes.

Considérons l'équation de même forme

$$\frac{mX}{x_1}+\frac{nY}{y_1}=p, \tag{3}$$

où x_1, y_1 sont les coordonnées d'un point quelconque de l'ellipse

$$\frac{x_1^2}{A^2}+\frac{y_1^2}{B^2}=1; \tag{4}$$

je dis que la droite (3) est toujours normale à une certaine ellipse, ou enveloppe une développée d'ellipse.

En effet, si l'on identifie les équations (2) et (3), on trouve

$$\frac{m}{px_1}=\frac{a^2}{(a^2-b^2)x}, \quad \frac{n}{py_1}=-\frac{b^2}{(a^2-b^2)y};$$

tirant de là les valeurs de x_1 et y_1 pour les substituer dans l'équation (4), on obtient

$$\frac{m^2(a^2-b^2)^2x^2}{p^2a^4A^2}+\frac{n^2(a^2-b^2)^2y^2}{p^2b^4B^2}=1; \tag{5}$$

identifiant les équations (1) et (5), on aura les égalités

$$a^2=\frac{m^2(a^2-b^2)^2}{p^2A^2}, \quad b^2=\frac{n^2(a^2-b^2)^2}{p^2B^2},$$

qui déterminent les axes d'une ellipse à laquelle la droite (3) est toujours normale.

2. La proposition que nous venons d'établir est susceptible de plusieurs variantes.

Ainsi, si l'on introduit l'anomalie excentrique, la normale à l'ellipse (1) a pour équation

$$\frac{aX}{\cos\varphi} - \frac{bY}{\sin\varphi} = a^2 - b^2.$$

Réciproquement, toute équation de la forme

$$\frac{mX}{\cos\varphi} + \frac{nY}{\sin\varphi} = p,$$

où φ est un angle variable, représente le système des normales à l'ellipse dont les axes sont donnés par les égalités

$$\frac{a}{a^2 - b^2} = \frac{m}{p}, \quad \frac{b}{a^2 - b^2} = -\frac{n}{p}.$$

Il en est de même des droites ayant pour équation

$$\frac{X - m'x_1}{mx_1} = \frac{Y - n'y_1}{ny_1}, \tag{6}$$

si (x_1, y_1) vérifiait l'équation (4).

Enfin, considérons deux ellipses (E), (E_1) dont les équations sont

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1,$$

et regardons comme homologues deux points $M(x, y)$, $M_1(x_1, y_1)$ de ces courbes qui ont même anomalie, c'est-à-dire tels que

$$\frac{x}{a} = \frac{x_1}{a_1}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y_1}{b_1};$$

la droite MM_1 est constamment normale à une troisième ellipse. En effet, son équation est

$$\frac{X - x_1}{x_1\left(1 - \frac{a}{a_1}\right)} = \frac{Y - y_1}{y_1\left(1 - \frac{b}{b_1}\right)}.$$

3. Passons à quelques applications géométriques.

La droite qui joint les projections d'un point $M(x, y)$ d'une ellipse E

sur les axes principaux est toujours normale à une seconde ellipse, car elle a pour équation

$$\frac{X}{x_1}+\frac{Y}{y_1}=1.$$

Soit M (x, y) un point mobile sur une ellipse E; prenons sa polaire m par rapport à une seconde ellipse E′, puis le pôle $M_1(x_1, y_1)$ de m par rapport à une troisième ellipse E_1, ces ellipses ayant leurs axes dirigés suivant les mêmes droites. L'équation de m étant à la fois

$$\frac{Xx}{a'^2}+\frac{Yy}{b'^2}=1, \quad \frac{Xx_1}{a_1^2}+\frac{Yy_1}{b_1^2}=1,$$

on a

$$\frac{x}{a'^2}=\frac{x_1}{a_1^2}, \quad \frac{y}{b'^2}=\frac{y_1}{b_1^2};$$

on en conclut que l'équation de la droite MM_1 est de la forme (6), donc MM_1 est constamment normale à une certaine ellipse.

On sait que la droite m enveloppe une ellipse; si on substitue celle-ci à l'ellipse E_1, M_1 devient le point de contact de m. Donc si on prend la polaire réciproque d'une ellipse E par rapport à une ellipse E′ dont les axes ont les mêmes directions, la droite qui joint un point de E au point de contact de sa polaire avec l'enveloppe de cette droite est constamment normale à une certaine ellipse.

4. Nous rappelons ici quelques théorèmes intéressants énoncés par M. Weill et résultant de la proposition donnée ci-dessus.

Soient E, E′ deux ellipses dont les axes sont dirigés suivant les mêmes droites. Supposons qu'il existe un triangle ABC qui soit à la fois inscrit à E et circonscrit à E′; alors il existe une infinité de triangles jouissant de la même propriété. Désignons par A′, B′, C′ les points de contact des côtés de ABC avec E′. Si (x, y) sont les coordonnées de A, celles de A′ sont de la forme $\alpha x, \beta y$; par suite, lorsque A parcourt l'ellipse E, la droite AA′ reste constamment normale à une certaine ellipse. La perpendiculaire abaissée de A sur BC jouit de la même propriété; car son équation a la forme (6). Il en est de même de la médiane joignant A au milieu de BC, les coordonnées du centre de gravité de ABC ayant pour valeurs

$$x_1=x+\alpha u x, \quad y_1=y+\beta u y,$$

où α et β sont les constantes et u une fonction de x, y.

Soit O le centre des ellipses E, E′ et soient E'_1, E'_1 des ellipses respectivement homothétiques et concentriques à E, E′. Si les droites OA, OA′ rencontrent E_1, E'_1 en A_1, A'_1, il est facile de voir que la droite $A_1 A'_1$ est constamment normale à une certaine ellipse.

5. L'application suivante est également due à M. Weill. D'un point A d'une ellipse E, on peut mener trois normales AB, AC, AD; soient B, C, D leurs points d'incidence, et A′ le centre du cercle circonscrit au cercle BCD. Lorsque A parcourt l'ellipse, la droite AA′ est constamment normale à une seconde ellipse. En effet, si les coordonnées de A sont x, y, celles de A′ sont de la forme αx, βy.

M. Weill a publié un grand nombre de théorèmes très intéressants dans les N. A. M. 1880, pp. 60, 253, 367, 442; 1881, pp. 73, 110; 1882, p. 62. Nous donnons ci-après (p. 13) la démonstration de ceux que M. Desaint a invoqués dans le n° 4 de son article. (J. N.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Sur l'équation bicarrée* (Extrait d'une lettre de M. Hermite.) Permettez-moi de vous communiquer une remarque d'enseignement élémentaire pour les jeunes lecteurs de *Mathesis*, si vous pensez qu'elle leur soit utile. Il s'agit de l'équation bicarrée

$$x^4 + px^2 + q = 0,$$

elle se résout en posant $x^2 = y$, et l'on se contente de donner l'expression des racines par la formule,

$$x = \sqrt{-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}}.$$

Il me semble nécessaire d'y joindre la suivante,

$$x = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{-p + 2\sqrt{q}} + \sqrt{-p - 2\sqrt{q}}\right],$$

afin d'avoir, lorsque q est un carré, deux radicaux séparés au lieu de radicaux superposés. Dans le cas de l'équation $x^4+4=0$, par exemple, la quantité $\sqrt{2\sqrt{-1}}$ est remplacée par $1+i$ ($i=\sqrt{-1}$) qui est beaucoup plus simple, ou bien $\varepsilon + \varepsilon' i$, en supposant ε et ε' égaux à $+1$ ou -1, afin de mettre les quatre racines en évidence.

Pour l'obtenir, je désigne pour un moment, par a, $-a$, b, $-b$, les racines de l'équation proposée, et j'emploie les relations

$$a^2+b^2=-p, \quad a^2b^2=q \quad \text{ou bien} \quad ab=\sqrt{q}.$$

On en tire immédiatement,

$$(a+b)^2=-p+2\sqrt{q}, \quad (a-b)^2=-p-2\sqrt{q},$$

d'où

$$a+b=\sqrt{-p+2\sqrt{q}}, \quad a-b=\sqrt{-p-2\sqrt{q}},$$

et par conséquent la seconde expression des racines.

2. *Solution d'un problème de géométrie.* Dans les questions proposées du Traité de Géométrie de Rouché et de Comberousse on rencontre le problème suivant :

Dans un cercle donné O, *inscrire un quadrilatère* ABCD, *dont on connaît les trois diagonales* AC $= d$, BD $= d'$, EF $= d''$.

Une solution de ce problème vient de paraître dans *El Progreso matematico*; comme elle est élégante mais peu répandue, nous allons la reproduire.

Inscrivons dans le cercle O une corde AC $= d$; considérons ensuite une corde mobile BD, de longueur d'. Le quadrilatère ABCD étant supposé convexe, ses angles A, B, C, D sont connus et par suite aussi les angles E, F formés par les côtés opposés AD et BC, AB et DC. Il en résulte que les points E, F décrivent deux circonférences O_1, O_2 faciles à déterminer au moyen d'une position particulière de BD.

La droite EF, polaire du point d'intersection des droites AC, BD par rapport au cercle O passe constamment par le pôle S de la corde AC. Ce point S est un centre de similitude des cercles O_1, O_2; on peut le démontrer en calculant les angles des rayons O,E, O_2F avec la ligne des centres O_1O_2. La question proposée est donc ramenée à mener par le centre de similitude S des cercles O_1, O_2 une sécante telle que la distance des points homologues E, F où elle rencontre les deux circonférences ait la longueur donnée d''.

SUR UN THÉORÈME DE PONCELET;

par M. J. NEUBERG.

1. Soient

$$U \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, \quad U_1 \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

les équations de deux coniques rapportées à leur triangle autopolaire commun (*). D'un point quelconque A (x_1, y_1, z_1) de U menons les tangentes AB, AC à U_1 ; ces droites ont pour équation

$$u \equiv (x^2 + y^2 + z^2)(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - (xx_1 + yy_1 + zz_1)^2 = 0.$$

L'équation $\lambda U + u = 0$, pour une valeur convenable de λ, représente la corde BC déterminée par les tangentes sur U et la tangente en A à U. Si donc x_2, y_2, z_2 sont les coordonnées du pôle de BC par rapport à U_1, on peut avoir identiquement

$$\lambda U + u \equiv \mu\,(xx_2 + yy_2 + zz_2)(axx_1 + byy_1 + czz_1);$$

ce qui exige

$$\left.\begin{aligned} \lambda a + y_1^2 + z_1^2 - \mu x_1 x_2 &= 0, \\ \lambda b + z_1^2 + x_1^2 - \mu y_1 y_2 &= 0, \\ \lambda c + x_1^2 + y_1^2 - \mu z_1 z_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} 2y_1 z_1 + \mu\,(by_1 z_2 + cy_2 z_1) &= 0, \\ 2z_1 x_1 + \mu\,(cz_1 x_2 + ax_1 z_2) &= 0, \\ 2x_1 y_1 + \mu\,(ax_1 y_2 + by_1 x_2) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Les égalités (2) peuvent prendre la forme

$$\frac{1}{b}\frac{y_2}{y_1} + \frac{1}{c}\frac{z_2}{z_1} = -\frac{2}{\mu bc},$$

$$\frac{1}{c}\frac{z_2}{z_1} + \frac{1}{a}\frac{x_2}{x_1} = -\frac{2}{\mu ca},$$

$$\frac{1}{a}\frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{b}\frac{y_2}{y_1} = -\frac{2}{\mu ab}.$$

On en tire

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{a-b-c}{\mu bc}, \quad \frac{y_2}{y_2} = \frac{b-c-a}{\mu ca}, \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{c-a-b}{\mu ab}. \qquad (3)$$

(*) Si l'équation de U_1 en coordonnées normales est $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 0$, on prend pour coordonnées les quantités $x\sqrt{A}$, $y\sqrt{B}$, $z\sqrt{C}$.

Pour l'obten… … λ et qu'on remplace dans
racines de l'équ… … valeurs déduites de (3), on

$$a^2 \; ;$$

… $= 0$; (4)

On en tire im…

$$(a +$$

… assujetti à la seule condi-

d'où

$$a +$$

… et (4); nous aurons

… $\frac{s_2^2}{\quad} = 0.$ (5)

et par cons…

2. *Solu…*

… *nt inscrit à une conique*
du Traité … … *à une seconde conique* U_1,
problème … … *isième conique* U_2; en effet,
Dans u… … nique (5).
les trois …

Une s…

… $- a^2)^2 - c(c - a - b)^2 = 0$;
matico; …
duire.

… leurs $a - b$, $b - c$ se réduisent à

Inscri…

… $- 2ca = 0,$ (6)
corde m…
convex…
E, F f…

… $= 0.$ (7)
que le…
miner…

… *une infinité de triangles qui*
La … … U_1 (PONCELET).
rappo… … de Poncelet, dans le cas
point…
trer …

… valeurs de λ qui font repré-
tres …
de s…

… de deux droites; cette
poin…

… au moyen des coefficients
lon…

$$\cdots - a + 2\sqrt{ca}, \cdots;$$

$$\frac{\quad}{\quad} \qquad \frac{s_2}{s_1} = \frac{2}{\mu\sqrt{ab}},$$

ou simplement à

$$\frac{x_2}{x_1\sqrt{a}} = \frac{y_2}{y_1\sqrt{b}} = \frac{z_2}{z_1\sqrt{c}}. \qquad (8)$$

Ainsi, entre les coordonnées d'un sommet du triangle ABC et celles du point de contact du côté opposé il existe les relations homographiques (8).

Si les équations des coniques U, U_1 sont

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0, \quad a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0,$$

la condition (7) et les égalités (8) prennent la forme

$$\sqrt{\frac{a}{a'}} + \sqrt{\frac{b}{b'}} + \sqrt{\frac{c}{c'}} = 0, \quad \frac{x_2\sqrt{a'}}{x_1\sqrt{a}} = \frac{y_2\sqrt{b'}}{y_1\sqrt{b}} = \frac{z_2\sqrt{c'}}{z_1\sqrt{c}},$$

Prenons pour U et U_1 deux ellipses :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - 1 = 0,$$

dont les axes sont dirigés suivant les mêmes droites. S'il existe un triangle inscrit à la première courbe et circonscrit à la seconde, on a l'égalité

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + 1 = 0,$$

où a, a', b, b', sont des quantités positives ou négatives; les coordonnées d'un sommet de triangle et celles du point de contact du côté opposé vérifient les relations

$$\frac{x_1}{a} = \frac{x_2}{a'}, \quad \frac{y_1}{b} = \frac{y_2}{b'},$$

BIBLIOGRAPHIE ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE (*).

Teoria de las cantidades imaginarias por D. Atanasio Lasala y Martinez, catedrático di Matemáticas, por oposición, en el instituto de Bilbao. Primera parte, imaginarias en un plano. Bilbao, Viuda de Delmas, 1894 (X — 149 p. grand in-8°). Prix : 6 frs.

(*) Le temps et la place nous manquent à la fois pour pouvoir annoncer comme il le faudrait plusieurs des ouvrages envoyés à la rédaction et *Mathesis*. Plusieurs d'ailleurs sont par leur objet, en dehors du programme de notre Recueil. Pour ces diverses raisons, nous nous contentons souvent d'en donner le titre et la table des matières, ou même le titre seul.

Nous allons, en parcourant cet ouvrage, signaler les particularités qu'il présente.

Voici comment l'auteur définit les imaginaires (13) : IMAGINARIAS *son las cantidades en que se consideran los dos conceptos matematicos de* CANTIDAD y CUALIDAD ; c'est-à-dire les imaginaires sont des grandeurs que l'on peut considérer sous le double aspect quantitatif-qualitatif ou qui ont à la fois une valeur absolue et un mode particulier d'être (§ 2). La géométrie nous offre une représentation de telles grandeurs ; un segment rectiligne comporte l'idée d'une longueur (quantité) et celle d'une direction (qualité). Si l'on se borne aux droites situées dans un même plan, une imaginaire est figurée par un vecteur OA issu d'un point fixe O ; la longueur OA est le module ρ, l'angle de OA avec un axe fixe Ox est l'argument α, et l'imaginaire OA est désignée par la notation ρ_α.

L'addition est la composition (synthèse) de plusieurs imaginaires, considérées à la fois quantitativement et qualitativement ; la multiplication a pour objet de trouver un vecteur qui soit composé en grandeur et en direction avec un vecteur donné comme un autre vecteur donné est composé en grandeur et en direction avec l'unité (d'argument nul) ; la soustraction, la division, les puissances et les racines se définissent comme en algèbre. Partant de ces définitions, l'auteur établit les règles relatives au module et à l'argument du résultat d'une opération. Il introduit ensuite le symbole $\sqrt{-1}$ comme représentant la racine carrée du vecteur $1_{\frac{1}{2}\pi}$ et obtient les règles de calcul de ce symbole, en appliquant celles qui régissent les vecteurs quelconques. La décomposition d'un vecteur en deux autres dirigés suivant les axes rectangulaires Ox, Oy le conduit aux formes binômes,

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \rho(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha),$$

d'une imaginaire quelconque. On voit que la marche suivie par M. Lasala y Martinez est, en quelque sorte, l'inverse de celle que l'on trouve dans les auteurs français.

Un chapitre spécial est consacré aux formules pour l'addition des arcs et la résolution des triangles rectilignes ; ces formules sont déduites de la théorie des imaginaires. Par exemple, la congruence $BC + CA + AB = 0$ donne l'équation

$$a + b(-\cos C + \sqrt{-1}\sin C) = c(\cos B + \sqrt{-1}\sin B),$$

qui se décompose en deux autres :

$$a - b\cos C - c\cos B = 0, \quad b\sin C = c\sin B,$$

dont la première donne le développement de $\sin(B + C)$ si l'on remplace a, b, c par les quantités proportionnelles $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$.

L'auteur passe ensuite à la fonction exponentielle. La limite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ pour $m = \infty$ pourrait être établie avec plus de rigueur ; la définition de a^x pour les valeurs imaginaires de x devrait être donnée avec quelques développements. La formule de $e^{x\sqrt{-1}}$ et les développements en série de $\sin x$ et $\cos x$ sont déduits de la limite de $\left(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{m}\right)^m$ pour $m = \infty$; la réduction de l'exponentielle a^x où a et x ont des valeurs imaginaires, à la forme binôme $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ s'appuie sur

des principes dont la généralité n'a pas été démontrée. Ce chapitre contient un grand nombre de résultats plus curieux qu'utiles.

Après l'étude de la fonction exponentielle vient naturellement celle des logarithmes à base réelle ou imaginaire; cette partie du livre est très développée et renferme beaucoup d'applications.

Les 50 dernières pages contiennent une étude minutieuse de la variation de l'exponentielle a^x, a et x pouvant prendre des valeurs imaginaires. (J. N.).

Recueil de Tables numériques, par l'abbé E. Gelin, docteur en Philosophie et en Théologie, professeur de Mathématiques supérieures au collège Saint-Quirin à Huy. Huy 1881-1882-1894. Prix : 3 francs.

Il nous suffira de donner le sommaire de ce recueil l'un des plus exacts, des plus complets et des plus utiles que nous connaissions.

I. Table des nombres premiers jusqu'à 10000. — II. Table des nombres composés jusqu'à 10000 (On a omis les nombres divisibles par 2, 3, 5, 7. 11). — III. Table des réciproques de 1000 premiers nombres (Cette table peut servir à la conversion des fractions ordinaires en fractions décimales. On a forcé la dixième décimale, toutes les fois que la décimale suivante était 5, 6, 7, 8 ou 9), — IV. Table des carrés et des cubes des 1000 premiers nombres (Cette table peut servir à trouver les trois premiers chiffres de la racine carrée et de la racine cubique des nombres). — V. Table des racines carrées et des racines cubiques des 100 premiers nombres (Les racines carrées sont à 15 décimales et les racines cubiques à 10 décimales). — VI. Tables des puissances successives des 100 premiers nombres (Cette table renferme les puissances quatrième, cinquième, sixième, septième, huitième et neuvième des nombres 1 à 50, et les puissances quatrième, cinquième, sixième, septième et huitième des nombres 51 à 100). — VII. Table pour le calcul des intérêts composés et des annuités (Cette table est à 7 décimales : elle comprend 21 taux différents et s'étend jusqu'à 50 ans). — VIII. Tableau des mesures métriques. — IX. Tableau des dimensions des mesures légales de capacité. — X. Tableau des poids, titres et diamètres des monnaies belges et françaises. — XI. Tableau synoptique des monnaies de compte des principaux pays. — XII. Tableau détaillé des poids, titres et valeurs au pair des monnaies d'or et d'argent des principaux pays (On a corrigé, dans cette table, plus de 25 erreurs qui se trouvent dans une table semblable de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* de Paris). — XIII. Mesures anglaises comparées aux mesures métriques. — XIV. Mesures métriques comparées aux mesures anglaises. — XV. Mesures anciennes de France. — XVI. Anciennes monnaies de Belgique. — XVII. Mesures anciennes de Belgique : Mesures de longueur. Mesures agraires. Mesures pour le bois de chauffage. Mesures de capacité pour les liquides. Mesures de capacité pour les matières sèches. Poids. Monnaies. Système métrique (anciennes dénominations). Calendrier républicain. Principaux ouvrages consultés. Table pour la conversion des anciennes mesures agraires de Liège en mesures métriques. Table pour la conversion des mesures agraires métriques en anciennes mesures de Liège.

Dr S. O. Carboni. **Geometria descrittiva elementare** ed alcune sue applicazioni (proiezioni ortogonali. Volume primo. Problemi fundamentali e metodi della rappresentazione. Piani tangenti, sezioni piane ed intersezioni. Ombre. Torino, Paravia e comp., 1894. (Un vol. petit in-8 de XIII 138 p., avec 62 fig. dans le texte).

Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fondamentales d'après Kronecker, par J. De Seguier, S. J., professeur à l'Université d'Angers. Berlin, F. Dames, Kochstrasse, 3, 1894 (In-8° de VIII-339 p.).

Commentaire et complément de recherches difficiles de Kronecker sur la théorie des fonctions elliptiques et ses relations avec l'arithmétique supérieure.

Introduzione alla teoria matematica della Elasticità par E. Cesaro, Professore ordinario della R. Università di Napoli. Torino, Bocca, 1894 (In-8° de 213 p.) Prix : 6 fr.

Nous signalons cet ouvrage aux ingénieurs qui veulent s'initier à la théorie de l'élasticité. L'auteur déclare dans la préface que son livre ne contient rien de neuf, mais au moins il y a résumé, sous une forme très nette, un grand nombre de recherches dont plusieurs sont peut-être peu connues en dehors de l'Italie.

G. Vivanti. **Il concetto d'infinitesimo** e la sua applicazione alla matematica. Saggio storico. Mantova, G. Mondovi, 1894 (In-8° de 134 p. avec une planche). Prix : 3 francs.

Excellente étude historique, avec citations caractéristiques à l'appui, où l'auteur passe en revue les divers sens que le mot *infiniment petit* a eus depuis Kepler et même auparavant jusqu'à Cauchy. Çà et là, nous ne partageons pas les appréciations de M. Vivanti, par exemple, sur Leibniz. P. M.

Compléments d'arithmétique et d'Algèbre, à l'usage des classes supérieures de la section scientifique des athénées et des collèges, par C. Bergmans, docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur honoraire. Gand, Hoste, 1894. (Un vol. autographié, gr. in-8° de 264 pages). Prix : 5 fr.

Sommaire : I. 1. Différents systèmes de numération. 2. Caractère de divisibilité par un diviseur de $B^n \pm r$. 3. Méthodes abrégées de calcul.

II. 1. Méthode des coefficients indéterminés. 2. Maxima et minima. 3. Fractions continues. 4. Analyse indéterminée du premier degré. 5. Analyse combinatoire. 6. Puissances et racines. 7. Théorie générale des exposants et des radicaux. 8. Equations exponentielles et logarithmes.

III. 1. Déterminants à deux et à trois lignes. 2. Dérivées. Formes. Discriminant. Invariant.

IV. Principes sur les équations algébriques.

La plupart des chapitres sont suivis d'exercices gradués.

Ouvrage utile aux élèves qui se préparent aux examens d'entrée des écoles spéciales belges.

Annuaire pour l'an 1895, publié par le Bureau des Longitudes, in-18 de IV-826 pages, avec 2 cartes magnétiques Paris, Gauthier-Villars et fils, fr. 1-50; franco, fr. 1-85.

Comme tous les ans à pareille époque l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* vient de paraître. L'Annuaire pour 1895 renferme une foule de renseignements pratiques réunis dans ce petit volume pour la commodité des travailleurs. On y trouve également des articles dus aux savants les plus illustres sur les monnaies, la statistique, la géographie, la minéralogie, etc., enfin les notices suivantes : *Les Ondes atmosphériques lunaires*, par M. BOUQUET DE LA GRYE. — *Sur le Congrès géodésique d'Inspruck*, par M. F. TISSERAND. — *L'Observatoire du mont Blanc*, par M. J. JANSSEN. — *La Photométrie photographique*, par M. J. JANSSEN. — *Rapport sur les propositions d'unification des jours astronomique et civil*, par M. H. POINCARÉ.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 821.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 103).

Si a et b sont des nombres entiers et si x, y vérifient la condition $x+y=m$, la quantité

$$m^{b-1}\frac{x^a}{a}-C_{b-1,1}m^{b-2}\frac{x^{a+1}}{a+1}+C_{b-1,2}m^{b-3}\frac{x^{a+2}}{a+2}-\cdots\pm\frac{x^{a+b-1}}{a+b-1}+$$
$$m^{a-1}\frac{y^b}{b}-C_{a-1,1}m^{a-2}\frac{y^{b+1}}{b+1}+C_{a-1,2}m^{a-3}\frac{y^{b+2}}{b+2}-\cdots\pm\frac{y^{a+b-1}}{a+b-1}$$

est indépendante de x et y. (E. CATALAN.

Solution par MM. CRISTESCU et J. JONESCO. Désignons par u la quantité proposée. Si nous considérons y comme une fonction de x donnée par $y=m-x$, nous aurons

$$\frac{du}{dx}=m^{b-1}x^{a-1}-C_{b-1,1}m^{b-2}x^a+C_{b-1,2}m^{b-3}x^{a+1}-\cdots\pm x^{a+b}$$
$$-[m^{a-1}y^{b-1}-C_{a-1,1}m^{a-2}y^b+C_{a-1,2}m^{a-3}y^{b+1}-\cdots\pm y^{a+b}]$$
$$=x^{a-1}[m^{b-1}-C_{b-1,1}m^{b-2}x+C_{b-1,2}m^{b-3}x^2-\cdots\pm x^{b-1}]$$
$$-y^{b-1}[m^{a-1}-C_{a-1,1}m^{a-2}y+C_{a-1,2}m^{a-3}y^2-\cdots\pm y^{a-1}],$$

ou simplement

$$\frac{du}{dx}=x^{a-1}(m-x)^{b-1}-y^{b-1}(m-y)^{a-1}=0.$$

La dérivée $\frac{du}{dx}$ étant nulle, u se réduit à une constante.

Si l'on fait $y = 0$, $x = m$, on trouve

$$u = m^{a+b-1}\left[\frac{1}{a} - \frac{C_{b-1,1}}{a+1} + \frac{C_{b-1,2}}{a+2} - \dots \pm \frac{1}{a+b-1}\right].$$

De même, en posant $x = 0$, $y = m$, on obtient

$$u = m^{a+b-1}\left[\frac{1}{b} - \frac{C_{a-1,1}}{b+1} + \frac{C_{a-1,2}}{b+2} \dots \pm \frac{1}{a+b-1}\right].$$

On en conclut l'égalité

$$\frac{1}{a} - \frac{C_{b-1,1}}{a+1} + \frac{C_{b-1,2}}{a+2} - \dots = \frac{1}{b} - \frac{C_{a-1,1}}{b+1} + \frac{C_{a-1,2}}{b+2} - \dots$$

Question 894.

(Voir *Mathesis* (2), III, p. 264).

On coupe un ellipsoïde par un plan perpendiculaire à un axe et l'on considère la développée de la section. Si le plan se déplace parallèlement à lui-même, la développée engendrera une surface. — Trouver l'équation de cette surface et le volume qu'elle limite. (Petit-Bois.)

Solution par MM. Vladimirescu, Hacken et Absolonne, Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde, V le volume cherché.

La section faite dans l'ellipsoïde par un plan parallèle au plan xOy, mené à la distance z du centre, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2}.$$

La développée de la section a pour équation

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

où

$$\alpha = \frac{(a^2 - b^2)(c^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}}{ac}, \quad \beta = \frac{(a^2 - b^2)(c^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}}{bc},$$

Donc l'équation de la surface est

$$(acx)^{\frac{2}{3}} + (bcy)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}(c^2 - z^2)^{\frac{1}{3}}.$$

En appelant A l'aire de la développée, on sait que

$$A = \frac{3\pi (a^2 - b^2)^2 (c^2 - z^2)}{8abc^2}.$$

Ainsi,

$$V = \int_{-c}^{+c} \frac{3\pi (a^2 - b^2)^2 (c^2 - z^2)\, dz}{8abc^2},$$

$$V = \frac{3\pi (a^2 - b^2)^2}{8abc^2} \left[c^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-c}^{+c} = \frac{\pi (a^2 - b^2)^2 c}{2ab}.$$

Question 902.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 31).

Par un point P ***donné dans le plan d'un triangle*** ABC, ***on peut mener deux transversales*** d'_a, d''_a, ***telles que leurs points de rencontre*** A', A'' ***avec*** BC ***soient les milieux des segments interceptés par l'angle*** BAC; ***Soient*** d'_b ***et*** d''_b, d'_c ***et*** d''_c ***les transversales analogues par rapport aux angles*** CBA, ACB, ***et soient*** B' ***et*** B'', C' ***et*** C'' ***leurs points de rencontre avec*** CA, AB. ***Démontrer que les six points*** A', A'', B', B'', C', C'' ***sont sur une même conique. Trouver l'équation de cette courbe en fonction des coordonnées trilinéaires du point*** P. (Max Greiner.)

Solution par M. Deprez. Supposons qu'une sécante quelconque d menée par P rencontre BC, CA, AB aux points A_1, B_1, C_1 et cherchons l'équation de l'hyperbole H_a, lieu du milieu M_a de la droite $B_1 C_1$.

Soient α, β, γ les coordonnées de M_a et α', β', γ' celles de P; l'équation de la droite B_1C_1 sera

$$\frac{y}{2\beta} + \frac{z}{2\gamma} = 1,$$

avec la condition

$$\frac{\beta'}{2\beta} + \frac{\gamma'}{2\gamma} = 1. \qquad (1)$$

Si l'on considère β, γ comme des coordonnées courantes, l'équation (1) représente aussi l'hyperbole H_a; on peut l'écrire ainsi

$$\frac{2\beta\gamma}{\beta'\gamma'} = \frac{\gamma}{\gamma'} + \frac{\beta}{\beta'},$$

ou sous forme homogène, les coordonnées barycentriques satisfaisant à l'identité $x+y+z=1$:

$$\frac{2\beta\gamma}{\beta'\gamma'}=\left(\frac{\beta}{\beta'}+\frac{\gamma}{\gamma'}\right)(\alpha+\beta+\gamma).$$

Faisons-y $\alpha=0$, et nous aurons une équation à laquelle satisfont les coordonnées des points A', A'' :

$$\frac{\beta^2}{\beta'}+\frac{\gamma^2}{\gamma'}+\beta\gamma\left(\frac{1}{\beta'}+\frac{1}{\gamma'}-\frac{2}{\beta'\gamma'}\right)=0. \qquad (2)$$

Nous aurons de même une équation entre les coordonnées de B', B'' ou celles de C', C''. Il est facile de voir que ces six points sont sur la conique :

$$\Sigma\frac{\alpha^2}{\alpha'}+\Sigma\beta\gamma\left(\frac{1}{\beta'}+\frac{1}{\gamma'}-\frac{2}{\beta'\gamma'}\right)=0.$$

Autre solution par M. Polak (Bruxelles), qui trouve l'équation de la conique sous la forme

$$2(\alpha'\beta\gamma+\beta'\gamma\alpha+\gamma'\alpha\beta)-(\alpha\beta'\gamma'+\beta\gamma'\alpha'+\gamma\alpha'\beta')=0.$$

Question 903.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 32).

On considère une ellipse (E) *et l'ellipse* (E') *ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée de* (E). *Si d'un point quelconque de* (E') *on abaisse des normales sur* (E), *les six pôles des droites joignant les pieds des normales ont leur centre des moyennes distances au centre commun des deux ellipses.* (Barisien.)

Solution par MM. Bastin (Liège) et Droz-Farny (Porrentruy). Les pieds M_1, M_2, M_3, M_4 des quatre normales menées du point (α, β) à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

sont situés sur l'hyperbole

$$c^2xy+b^2\beta x-a^2\alpha y=0. \qquad (1)$$

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2) les coordonnées des pôles des deux cordes M_1M_2, M_3M_4 ; ces cordes auront pour équations

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1, \quad \frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}=1.$$

Toute conique passant par les points M_1, M_2, M_3, M_4 peut être représentée par

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1\right)\left(\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}-1\right)=0.$$

Cette équation doit pouvoir s'identifier avec l'équation (1); on obtient d'abord, en comparant les termes connus, $\lambda = 1$, et ensuite

$$x_1x_2 = -a^2, \quad y_1y_2 = -b^2, \tag{2}$$

$$\frac{x_1y_2+x_2y_1}{c^2} = -\frac{x_1+x_2}{\beta} = \frac{y_1+y_2}{\alpha}. \tag{3}$$

Cherchons les équations qui font connaître x_1 et y_1. En remplaçant dans (3) x_2 et y_2 par leurs valeurs tirées de (2), on trouve

$$\frac{a^2y_1^2+b^2x_1^2}{c^2x_1y_1} = \frac{x_1^2-a^2}{\beta x_1} = \frac{b^2-y_1^2}{\alpha y_1}. \tag{4}$$

Si l'on combine le premier et le troisième des rapports (4), on obtient

$$y_1^2 = \frac{b^2x_1(c^2-\alpha x_1)}{a^2\alpha+c^2x_1};$$

substituant cette valeur dans les deux derniers des rapports (4), on a l'équation demandée :

$$c^2\alpha x_1^6+(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)x_1^5+\cdots=0.$$

Par analogie,

$$c^2\beta y_1^6-(a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4)y_1^5+\cdots=0.$$

On voit que la somme des abscisses et celle des ordonnées du pôle de l'une des cordes passant par deux des points M_1, M_2, M_3, M_4, sont nulles si $a^2\alpha^2+b^2\beta^2-c^4=0$, c'est-à-dire si le point P appartient à l'ellipse ayant pour sommets les points de rebroussement de la développée de l'ellipse proposée.

×Question 916.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 56).

Mettre l'expression

$$u = n^2+(2n-1)^2+(2n+1)^2$$

sous la forme d'une somme de deux nombres triangulaires.

(DE ROCQUIGNY.)

Solution par M. H. BROCARD. En formant le tableau des premières

valeurs numériques de $u = 9n^2 + 2$ et des premiers nombres triangulaires, on trouve aisément

$$\begin{aligned} u = 1 \quad & n = 11 = 1 + 10 \\ 2 \quad & 38 = 10 + 28 \\ 3 \quad & 83 = 28 + 55 \\ 4 \quad & 146 = 55 + 91 \\ \ldots \quad & \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

L'analogie conduit à essayer la décomposition

$$n = \frac{(3n-2)(3n-1)}{2} + \frac{(3n+1)(3n+2)}{2}.$$

Solution analogue par MM. Barbette, De Bózoky, Déprez, Droz Farny, Jonesco et Mandart.

Question 919.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 79).

Trouver le lieu d'un point M *tel que les points d'incidence des normales abaissées de* M *sur une parabole donnée, et le sommet de cette courbe soient sur une conique ayant* M *pour centre.* (E. N. Barisien).

Solution géométrique par M. Cl. Servais. I. Les perpendiculaires abaissées d'un point donné M sur les tangentes d'une parabole, rencontrent les diamètres menés par les points de contact de ces tangentes, en des points situés sur une hyperbole équilatère, qui passe par le point M et dont une asymptote est parallèle à l'axe de la parabole. Cette hyperbole rencontre la parabole en trois points A, B, C autres que leur point commun situé à l'infini, et chacun de ces points est le pied d'une normale abaissée du point M sur la parabole (Chasles, *Sections coniques*, p. 144). Soit M_1 le point diamétralement opposé au point M sur l'hyperbole équilatère; les droites MA et M_1A parallèles à deux diamètres conjugués de l'hyperbole, sont également inclinées sur les asymptotes et par conséquent sur l'axe de la parabole. M_1A est donc perpendiculaire à la corde de courbure au point A. Donc : *Si les normales en trois points d'une parabole concourent en un même point, il en est de même des perpendiculaires élevées en ces points sur les cordes de courbure*(*).

(*) Cette démonstration s'applique au théorème que nous avons donné pour une conique à centre, (2), IV, p. 96.

II. Les droites MA, M_1A interceptent sur l'axe de la parabole un segment II_1 de longueur constante $2p$. Les séries projectives (I) et (I_1) sont donc identiques et n'ont qu'un seul point double à l'infini. *L'axe de la parabole est une asymptote de l'hyperbole équilatère* (*).

III. Les points A et M étant connus, l'hyperbole équilatère est déterminée et on obtient la droite BC en cherchant la seconde corde d'intersection de la parabole avec l'hyperbole. On s'appuie sur le lemme suivant : Si deux coniques se coupent aux points α, β, γ, γ' et si l'on mène par α et β respectivement deux droites qui coupent la première conique en φ, ψ, la seconde en φ_1, ψ_1, les cordes $\varphi\psi$, $\varphi_1\psi_1$ concourent en un point de la droite $\gamma\gamma'$. Dans le cas qui nous occupe, supposons que le point α soit le point A et β le point à l'infini de la parabole. Menons par A une perpendiculaire à l'axe, le point φ est le point A' symétrique de A par rapport à cet axe, le point φ_1 est à l'infini. Comme sécante issue de β considérons l'axe de la parabole ; le point ψ est le sommet O de la parabole et ψ_1 est à l'infini ; $\varphi_1\psi_1$ étant la droite de l'infini, OA' est parallèle à BC.

Les droites OA *et* BC *sont antiparallèles par rapport à l'axe et les quatre points* O, A, B, C *sont sur une circonférence (Mathesis* 1887, p. 41).

IV. Soient K et K_1 les projections de M et M_1 sur l'axe de la parabole ; les droites MK et M_1K_1 se coupant sur l'hyperbole, on a $KK_1 = II_1 = 2p$ et comme $MK = -M_1K_1$, *les deux points* M *et* M_1 *sont correspondants dans deux figures inversement semblables dont le point double est à l'infini.* Cette corrélation entre les points M et M_1 permet de passer des propriétés relatives au point M, à des propriétés relatives au point M_1.

V. Le centre S de l'hyperbole est le milieu du segment KK_1 et la perpendiculaire élevée au point S sur l'axe OK sera la seconde asymptote. L'hyperbole, la parabole, la corde BC et la parallèle à l'axe menée par A déterminent sur cette asymptote trois couples de points en involution. Cette involution ayant un point double à l'infini, le second point double sera le milieu S du segment intercepté par la parabole ; donc si BC et la parallèle à l'axe coupent l'asymptote aux points N' et N on a $SN = SN'$. Par conséquent : *La corde* BC *et la parallèle à l'axe menée par le point* A' *se coupent sur une asymptote de l'hyperbole.*

(*) Ce que montre l'équation, (1), t. VIII, p. 111.

Soient A'' et E les points où les droites AA' et BC coupent l'axe de la parabole, on a

$$OE = A'N' = A''S = IK \text{ (*)}.$$

La quadrilatère ABCM étant inscrit dans l'hyperbole, les côtés opposés et l'hyperbole déterminent sur OK des couples de points en involution. Cette involution ayant un point double à l'infini, on voit que : *Les côtés* BC, CA, AB, *et les normales aux points* A, B, C *déterminent sur l'axe de la parabole, des points* $\alpha, \beta, \gamma, \alpha' \beta' \gamma'$ *tels que les segments* $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ *ont même milieu.*

VI. Soit Q l'intersection de BC avec la tangente au sommet O de la parabole, on a

$$\frac{AA''}{A''I} = \frac{KM}{IK} = \frac{KM}{OE}, \quad \frac{AA''}{A''I} = \frac{2OA''}{AA''} = \frac{2OE}{OQ},$$

d'où

$$\frac{KM}{OE} = \frac{2OE}{OQ} \quad \text{ou} \quad \overline{OE}^2 = OQ \cdot \frac{KM}{2}.$$

Par conséquent, si H est la projection de M sur la tangente OQ et R le milieu de OH, RE est perpendiculaire à BC. Ainsi se trouve établi géométriquement ce théorème dû à M. de Longchamps : *Soit* ABC *un triangle inscrit à une parabole et tel que les normales aux points* A, B, C *soient concourantes, les perpendiculaires élevées aux côtés de ce triangle aux points où ils rencontrent l'axe, concourent sur la tangente au sommet.* (*Mathesis*, (1) VIII, p. 111).

Corollaire. Le cercle circonscrit au triangle ABC passe par le point R.

VII. Soit U l'intersection de l'axe de la parabole avec la perpendiculaire élevée sur BC au point N'. On a

$$SE.\,SU = \overline{SN'}^2 = \overline{AA''}^2 = 2p.\,OA'' = 2p.\,SE,$$

donc

$$SU = 2p.$$

Les perpendiculaires élevées aux côtés du triangle ABC *aux points où ils rencontrent l'asymptote* SN, *concourent en un point de l'axe de la parabole.*

VIII. Le lieu des centres des coniques passant par les points A, B, C, O

(*) L'égalité OE = IK a servi à M. de Longchamps pour déterminer BC connaissant A et M. (*Mathesis*, (1), t. VIII, p. 111).

est une hyperbole équilatère (H) dont une asymptote est l'axe de la parabole. L'hyperbole (H) est équilatère parce que les quatre points A, B, C, O sont sur une même circonférence. Le centre de la parabole étant sur le lieu, une asymptote est parallèle à l'axe. Soit G le milieu de OA, F celui de BC; ces points sont à égale distance de l'axe, car OA′ et BC sont parallèles, donc le milieu de FG, c'est-à-dire que le centre W de l'hyperbole, est situé sur l'axe. Ce point est le centre des moyennes distances des quatre points A, B, C, O. Soient B″ et C″ les projections de B et C sur l'axe, on a

$$OA'' = OS - OE, \quad OB'' = OE - B''E, \quad OC'' = OS + SC''$$

Mais $B''E = SC''$, car $BE = CN'$; donc :

$$OA'' + OB'' + OC'' = 2\,OS,$$

le point W est le milieu du segment OS. Le point M sera le centre d'une conique passant par les points A, B, C, O s'il est situé sur l'hyperbole (H), c'est-à-dire si l'on a

$$WK \cdot KM = GA_2 \cdot A_2W = \frac{AA''}{2} \cdot \frac{A''S}{2};$$

A_2 est la projection de G sur l'axe.

Mais on a

$$SK \cdot KM = AA'' \cdot A''S;$$

donc

$$4\,WK = RK \quad \text{ou} \quad 4\left(OK - \frac{OS}{2}\right) = p,$$

et, par conséquent,

$$OK = -\frac{p}{2}.$$

Si les normales aux points A, B, C *concourent en un point* M *de la directrice, le point* M *est le centre d'une conique circonscrite au quadrilatère* ABCO.

De même :

Si les perpendiculaires aux cordes de courbure menées aux points A, B, C *concourent en un point* M_1 *de l'ordonnée focale, le point* M_1 *est le centre d'une conique circonscrite au quadrilatère* ABCO.

IX. Pour déterminer la droite BC (voir III), prenons pour sécantes AM et l'axe de la parabole; la droite $\varphi\psi$ est la droite OA_2, A_2 étant l'extrémité de la corde normale au point A; la droite $\varphi_1\psi_1$ est la parallèle

menée par le point M à l'axe OK. De là cette construction du point A_5 : *On détermine la corde* BC *joignant les pieds des normales passant par un point* M *de la normale au point* A ; *cette corde et la parallèle à l'axe menée par le point* M *se coupent sur la droite joignant le sommet de la parabole au point* A_5.

De même :

La corde BC *et la parallèle à l'axe menée par* M_1, *se coupent sur la droite joignant le sommet de la parabole à l'extrémité de la corde perpendiculaire à la corde de courbure au point* A.

X. Si l'on suppose que les points A et C coïncident, le point M devient le centre de courbure au point A, et les développements qui précèdent, conduisent immédiatement à des propriétés du centre de courbure en un point d'une parabole.

Les questions 919 et 881 sont identiques. Outre les solutions analytiques, mentionnées dans la livraison d'octobre 1894, p. 234, nous avons encore à signaler une solution analogue de M. Jonesco.

Question 938.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 80.)

D'un point fixe situé sur la tangente au sommet d'une parabole on mène une sécante quelconque. Les normales aux deux points d'intersection de cette sécante avec la parabole, se coupent sur une autre parabole.

(E. N. Barisien.)

Solution par M. H. Brocard. On peut ramener cette question aux problèmes depuis longtemps classiques proposés en 1859 au Concours Général (N. A. M., XVIII, 1859, p. 293) et antérieurement, par O. Terquem en 1858, N. A. M., quest. 443, résolue et étudiée, t. XVIII, 1859, pp. 77-81 (A. Terquem), 261-264 et 406-407 (E. de Jonquières), 444 (énoncé 495) (Desboves); t. XIX, 1860, pp. 47-51 et 253-269 (Desboves). On en trouve l'indication plus ancienne encore, d'après M. G. Salmon (*Conic Sections*, 1855) (Voir N. A. M., XX., 1861, pp. 16-17, O. Terquem).

Il s'agit, en définitive, de la détermination du lieu géométrique des intersections des normales aux extrémités de la corde de contact des tangentes à une parabole (ou à une conique) menées d'un point M (α, β) mobile sur une courbe donnée.

Or, pour que les cordes de contact passent par un point fixe A, il faut que les tangentes soient issues de la polaire de ce point A.

On a donc à établir cette propriété :

Étant donnée une parabole, des différents points (α, β) d'une droite fixe (ou, dans le cas présent, d'une sécante issue du sommet), on mène les tangentes à la courbe ; les normales en ces points se rencontrent sur une parabole (dont l'axe est perpendiculaire à la droite fixe).

En effet, on a pour le point (x, y) de concours des normales,

$$x = \frac{2\beta^2}{p} + p - \alpha, \quad y = -\frac{2\alpha\beta}{p}.$$

Par hypothèse,

$$\beta = m\alpha.$$

On en conclut

$$2m(x + my - p)^2 + py = 0,$$

équation d'une parabole. (Voir *loc. cit.* 1860, p. 50).

Note. Une question tout à fait analogue, celle du lieu des rencontres des normales aux extrémités d'une corde focale de l'ellipse, a fait l'objet de l'énoncé des N. A. M., n° 433 (Rouché). Elle a été résolue, t. XVII, 1858, 285-288.

Solution par M. Cristescu. Soient $y^2 = 2px$ l'équation de la parabole donnée et

$$(0, a), \qquad \left(\frac{y'^2}{2p}, y'\right), \qquad \left(\frac{y''^2}{2p}, y''\right),$$

les coordonnées du point fixe P, et celles des points M', M'' où la sécante coupe la parabole. Les équations des normales menées en M' et M'' sont

$$y - y' = -\frac{y'}{p}\left(X - \frac{y'^2}{2p}\right), \quad y - y'' = -\frac{y''}{p}\left(X - \frac{y''^2}{2p}\right).$$

Les coordonnées (x, y) du point d'intersection N de ces normales seront donc

$$\left.\begin{aligned} x &= p + \frac{(y' + y'')^2 - y'y''}{2p}, \\ y &= -\frac{y'y''(y' + y'')}{2p^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Les points P, M′, M″ étant en ligne droite, on a l'équation de condition

$$\frac{y'-a}{\frac{1}{2p}y'^2}=\frac{y''-y'}{\frac{1}{2p}y''^2-\frac{1}{2p}y'^2},$$

ou

$$a(y'+y'')-y'y''=0. \qquad (2)$$

Si l'on élimine les quantités $(y'+y'')$ et $y'y''$ entre les équations (1) et (2), on trouve que le lieu cherché est la parabole

$$(ax+py-ap)^2+\frac{1}{2}a^3y=0.$$

Solution analogue par MM. Gillet, Droz-Farny, Verdeyen, Buisseret (Université de Gand), Mandart. MM. Greenstreet et Déprez trouvent que le lieu est encore une parabole lorsque le point fixe par lequel on mène les sécantes est quelconque.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

668. On joint les sommets A, A′ du grand axe d'une ellipse à deux points quelconques M, M′ de la courbe. Démontrer que le point de concours N des droites AM, A′M′ et le point de concours N′ des droites AM′, A′M sont sur une même perpendiculaire à AA′. (E. N. Barisien).

Les deux points N, N′ appartiennent à la polaire du point de rencontre des droites MM′, AA′. — Pour une démonstration analytique, on peut représenter les droites AM, A′M′, AM′, A′M par

$$y=m_1(x-a),\quad y=m_2(x+a),\quad y=m_3(x-a),\quad y=m_4(x+a),$$

avec la condition $m_1m_4=m_2m_3$.

667. Soit un parallélogramme ABCD. Par le centre O on mène une droite PP′ parallèle aux côtés BC, AD, et limitée à deux points P, P′ symétriques par rapport à O. Les points d'intersection des droites PA et P′D, PD et P′A, PB et P′C, PC et P′B, lorsque les distances OP, OP′ changent, décrivent une même droite. (Couturier.)

Les points se trouvent sur la ligne joignant les milieux des bases des trapèzes PADP′, PBCP′.

668. Un prisme a pour section droite un triangle équilatéral de côté donné m. Déterminer un plan qui coupe ce prisme suivant un triangle

ayant une surface donnée k^2 et dont un côté ait une longueur donnée a. On demande de calculer les deux autres côtés du triangle et de discuter le problème. (*Baccalauréat*, MONTPELLIER, 1893).

Soit ABC la section demandée. Menons par A la section droite AB'C' et posons $BB' = x$, $CC' = y$; nous aurons

$$a^2 = m^2 + (x-y)^2, \quad b^2 = m^2 + x^2, \quad c^2 = m^2 + y^2,$$
$$16k^4 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 3m^4 + 4m^2(x^2 + y^2 - xy).$$

Les inconnues auxiliaires x, y résultent des équations

$$x^2 + y^2 - xy = \frac{16k^4 - 3m^4}{4m^2},$$
$$x^2 + y^2 - 2xy = a^2 - m^2,$$

qu'on ramène aisément à

$$x + y = \frac{\sqrt{16k^4 - 3a^2m^2}}{m}, \quad x - y = \sqrt{a^2 - m^2}.$$

On doit avoir $a > m$, $16k^4 > 3a^2m^2$.

669. Trouver la somme

$$\frac{1}{\cos a \cos(a+h)} + \frac{1}{\cos(a+h)\cos(a+2h)} + \cdots + \frac{1}{\cos(a+\overline{n-2}h)\cos(a+nh-h)}.$$

Le terme général

$$\frac{1}{\cos(a+ih)\cos(a+ih+h)} = \frac{\sin[(a+ih+h)-(a+ih)]}{\sin h \cos(a+ih)\cos(a+ih+h)}$$
$$= \frac{1}{\sin h}[\operatorname{tg}(a+ih+h) - \operatorname{tg}(a+ih)].$$

La somme demandée est donc

$$\frac{1}{\sin h}[\operatorname{tg}(a+\overline{n-1}h) - \operatorname{tg} h)].$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

***1001.** Un disque circulaire mobile autour d'un axe passant par son centre et perpendiculaire à son plan reste immobile sous l'action de trois forces tangentielles AA', BB', CC', appliquées en des points quelconques de son périmètre, lorsque ces forces sont inversement proportionnelles aux longueurs des tangentes; ces lignes étant mesurées depuis le point de

contact de chacune d'elles A, B ou C jusqu'à la droite BC, CA ou AB menée par les deux autres points de contact. (F. J.)

1002. Si une courbe algébrique, dépourvue de nœuds et de rebroussements, est de la classe n, sa podaire a $3n$ points d'inflexion. (Retali.)

1003. Soient α, β, γ, δ les points de Gergonne des cercles inscrits aux faces BCD, CDA, DAB, ABC d'un tétraèdre. Trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire les arêtes

$$BC = a,\ CA = b,\ AB = c,\ DA = a',\ DB = b',\ DC = c',$$

pour que les droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$, $D\delta$ soient les génératrices d'un même mode d'un hyperboloïde, ou pour qu'elles concourent en un même point. (E. Genty.)

×**1004.** Sur les côtés AB, AC d'un triangle ABC on construit extérieurement les losanges ABDE, ACFI dont les côtés AE, AI sont sur les prolongements les côtés CA, BA du triangle. Les droites DE, FI se coupent en un point L ; les droites BF, CD se coupent en un point J et rencontrent respectivement AB, AC aux points P, N.

1° On a AP = AN.

2° Les points L et J sont situés sur la symédiane de ABC.

3° Le triangle BJC et le quadrilatère APJN sont équivalents.

4° J divise la symédiane issue de A dans le rapport $(b^2 + c^2 : bc)$.

5° Les droites qui joignent B et C aux centres des losanges ACFI, ABDE se coupent au milieu de la bissectrice de l'angle BAC. (A. C.)

1005. Par le foyer F d'une parabole on mène une corde AFB. Le cercle de diamètre AB rencontre la parabole en deux autres points C et D ; le cercle de diamètre FA rencontre la parabole en trois autres points B′, C′ et D′ ; le cercle passant par F et tangent à la parabole en A rencontre la parabole en deux autres points B″ et C″. O étant le sommet de la parabole, démontrer les relations

$$FA + FB - FC - FD = 8FO,$$
$$FA - FB' - FC' - FD' = 4FO,$$
$$4FA - FB'' - FC'' = 8FO,$$
$$2(FC + FD - FB) - 6(FB' + FC' + FD') + (FB'' + FC'') = 0.$$

(E. N. Barisien.)

QUESTIONS DE MAXIMUM ET DE MINIMUM ;

par un ABONNÉ.

1. *Solution, par l'algèbre élémentaire, de la question posée au concours général de Belgique en 1891.* La question était posée dans les termes suivants :

Si a, b, c sont les côtés d'un triangle rectiligne et T *sa surface, quelles sont les valeurs de x, y, z qui rendent maximum la fonction*

$$ayz + bzx + cxy \qquad (1)$$

sachant que

$$ax + by + cz = 2T?$$

L'équation de condition montre que x, y, z sont les perpendiculaires abaissées d'un point intérieur au triangle sur les trois côtés de ce triangle et le problème est ramené à déterminer la position de ce point.

Egalons le trinôme qu'il s'agit de rendre un maximum à une quantité indéterminée m et, dans l'équation résultante, remplaçons z par sa valeur tirée de l'équation de condition, nous parvenons à une équation du second degré en x et y, qu'on peut écrire sous la forme ordinaire,

$$x^2 - \frac{2bT - (a^2 + b^2 - c^2)y}{ab}\,x + \frac{aby^2 - 2aTy + cm}{ab} = 0.$$

Si l'on résout cette équation par rapport à x, la quantité sous le radical se présente sous la forme d'un trinôme du second degré en y, savoir :

$$[(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2]\,y^2 - 4bT\,[b^2 - a^2 - c^2]\,y + 4b^2T^2 - 4abcm.$$

Cette expression peut s'écrire sous une forme plus simple. D'une part, le coefficient de y^2 peut être décomposé en un produit de quatre facteurs qui, comme on le reconnaît aisément est égal à $-16T^2$; d'autre part, le coefficient de y est égal à

$$-8abcT\cos B ;$$

ce trinôme peut donc s'écrire

$$-16T^2y^2 + 8abcT\cos B\,.\,y + 4b^2T^2 - 4abcm,$$

ou encore

$$-16T^2y^2 + 16bT^2\cot g\,B\,.\,y + 4b^2T^2 - 4abcm, \qquad (\alpha)$$

si l'on se rappelle que l'on a

$$2T = ac\sin B.$$

Pour que la valeur de x soit réelle, cette quantité (α) devra être positive. Afin de reconnaître aisément dans quel cas il en sera ainsi, écrivons-là sous la forme

$$16T^2\left[\left(\frac{b^2}{4\sin^2 B}-\frac{abc.m}{4T^2}\right)-\left(y-\frac{b}{2}\cotg B\right)^2\right].$$

Il est visible que pour que x soit réel on devra avoir

$$\frac{abc}{4T^2}\cdot m < \frac{b^2}{4\sin^2 B}-\left(y-\frac{b}{2}\cotg B\right)^2,$$

et à plus forte raison, puisque $y-\frac{b}{2}\cotg B$ peut être nul,

$$\frac{abc}{4T^2}\cdot m < \frac{b^2}{4\sin^2 B}.$$

La plus grande valeur que m puisse avoir est donc

$$m=\frac{4T^2}{abc}\cdot\frac{b^2}{4\sin^2 B} \quad \text{ou} \quad m=\frac{abc}{4},$$

correspondant à

$$y=\frac{b}{2}\cotg B.$$

Pour ces valeurs de m et de y l'expression radicale dans la valeur de x est nulle et cette valeur est simplement

$$x=\frac{2bT-(a^2+b^2-c^2)y}{2ab}.$$

Si l'on y remplace y par sa valeur

$$\frac{b}{2}\cotg B \quad \text{et} \quad a^2+b^2-c^2 \quad \text{par} \quad 2ab\cos C,$$

elle pourra s'écrire sous la forme

$$x=\frac{T}{a}(1-\cotg B\cotg C$$

ou

$$x=\frac{T}{a}\cotg A\cotg B+\cotg A\cotg C,$$

d'après la formule connue

$$\cotg A\cotg B+\cotg B\cotg C+\cotg C\cotg A=1.$$

La valeur de x peut se simplifier. Au lieu de T mettons sa valeur $\frac{1}{2}bc \sin A$ et, après quelques réductions faciles à apercevoir, nous aurons

$$x = \frac{a}{2} \operatorname{cotg} A.$$

Ces expressions de x et de y montrent que le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Discussion. Pour que les valeurs précédentes de x, y, z répondent au problème dans le sens de son énoncé il faut qu'elles soient positives ou que les angles du triangle ABC soient tous les trois aigus; autrement dit, il faut que le centre du cercle circonscrit soit à l'intérieur du triangle.

Si l'un des angles, A par exemple, est obtus, la valeur de x est négative et le point O passe de l'autre côté de la base BC. Dans ce cas les valeurs des inconnues, prises positivement, font passer par un maximum le trinôme

$$ayz - bzx - cxy$$

lorsque les variables sont liées entre elles par l'équation

$$by + cz - ax = 2T.$$

Dans tous les cas l'aire du triangle PQR formé en joignant les pieds perpendiculaires abaissées sur les trois côtés du triangle d'un point O, pris dans le plan du triangle, passe par un maximum.

Cependant lorsque le point O est en dehors du cercle circonscrit au triangle ABC, l'expression (1) est négative et sa valeur absolue peut croître autant qu'on veut; pour un point de la circonférence ABC, la quantité (1) est nulle.

Remarque. Soient P, Q, R les pieds des perpendiculaires OP, OQ, OR abaissées d'un point intérieur O sur les côtés BC, CA, AB du triangle ABC et joignons ces points deux à deux par des droites de manière à former le triangle PQR (Le lecteur est prié de tracer la figure).

Cela posé, la valeur de u qu'il s'agit de rendre un maximum peut s'écrire

$$u = \frac{a}{\sin A}(yz \sin A + zx \sin B + xy \sin C),$$

et il est facile de voir que la quantité entre parenthèses représente le double de l'aire du triangle PQR; on peut donc mettre u sous la forme

$$u = \frac{2a}{\sin A} \times \text{aire PQR};$$

par conséquent la somme u passera par un maximum quand l'aire du triangle PQR sera elle-même un maximum.

Pour que l'aire du triangle PQR soit un maximum, il faut qu'elle ne puisse pas croître lorsque l'un quelconque de ses sommets, P par exemple, se transporte en P', dans un sens ou dans le sens opposé sur le côté correspondant CB, les deux autres sommets (ou, au moins, l'un d'entre eux) se transportant en Q', R', sur les autres côtés de manière que les perpendiculaires à CB, AC, AB se rencontrent en un point. On conclut de cette remarque, par induction, que la base QR doit être parallèle au côté opposé CB et que de même les côtés RP, PQ doivent être parallèles aux côtés correspondants AC, BA du triangle ABC. Le triangle PQR doit donc avoir ses côtés respectivement parallèles à ceux du triangle ABC; par conséquent, les pieds P, Q et R des trois perpendiculaires ne sont autres que les milieux des trois côtés et le point cherché O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

3. On peut traiter, d'une manière analogue, la question suivante : *Inscrire dans un triangle donné* ABC *un triangle* PQR *dont le périmètre soit un minimum* (Le lecteur est prié de tracer la figure).

Pour que le périmètre du triangle PQR soit un minimum, il faut nécessairement qu'il ne subisse aucune diminution lorsque l'un des sommets, P par exemple, se déplace infiniment peu, dans un sens ou dans le sens opposé, sur le côté correspondant BC. Soit PP' ce déplacement; on devra donc avoir

$$PQ + PR = P'Q + P'R.$$

Cette égalité prouve que le point P se déplace sur une ellipse ayant pour foyers les points Q et R; et puisque les deux points P et P' sont infiniment voisins, la droite BC est une tangente à cette ellipse, et, partant, la perpendiculaire PO en sera la normale. Or, dans une ellipse la normale partage en deux parties égales l'angle formé par les deux rayons vecteurs menés au point de contact ; donc la droite OP doit faire des angles égaux avec les droites PQ et PR. On arrive à une conséquence analogue pour la perpendiculaire QO en Q sur BC. Donc les perpendiculaires en P, Q, R sur les côtés sont les bissectrices intérieures des angles du triangle PQR et, par suite, *le point* O *n'est autre que le point de rencontre des trois hauteurs du triangle.*

Remarque. Pour que le problème soit possible, il faut que le point de

rencontre O des trois hauteurs du triangle ABC soit à l'intérieur du triangle.

Si l'un des angles du triangle ABC est obtus, l'angle A par exemple, le point de rencontre O des trois hauteurs AP, BQ, CR est en dehors du triangle et dans ce cas il est facile de voir que ce n'est pas le périmètre du triangle PQR qui passe par un minimum, mais bien la somme

$$PQ + PR - QR,$$

le côté QR étant alors considéré comme négatif. En effet, pour que cette nouvelle somme soit un minimum il faut que les trois points P, Q, R se déplacent de manière :

1° Que la somme PQ + QR reste constante et le point P se meut sur une ellipse comme précédemment;

2° Que la différence PQ — QR reste constante et le point Q se déplace infiniment peu sur une hyperbole, dont les foyers sont P et R ; le côté AC du triangle ABC est alors une tangente à cette hyperbole laquelle partage encore l'angle PQR en deux parties égales;

3° Enfin, que la différence PR — QR reste aussi constante ou que le point R se déplace sur une hyperbole dont P et Q sont les foyers, et, partant, que AB partage l'angle PRQ en deux parties égales.

Si l'angle A est droit, le triangle PQR se réduit à une droite : la hauteur AP du triangle.

SUR UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE(*);

par NAUTICUS.

Si l'on multiplie le nombre 123456789 = N, *écrit dans le système décimal par* 2, 4, 5, 7 *ou* 8, *les différents produits obtenus s'écrivent en permutant simplement les chiffres de* N. *Cette propriété que j'ai constatée par hasard, m'a conduit à la proposition empirique suivante que j'ai vérifiée sur un grand nombre d'exemples, et que je crois vraie, mais dont je n'ai*

(*) Ce théorème est la question 400 de l'*Intermédiaire des mathématiciens*. La démonstration très simple donnée par notre savant correspondant et le complément remarquable, dont il l'accompagne, ne manqueront pas d'intéresser nos lecteurs. — Au moment de mettre sous presse, nous recevons une autre démonstration, due à M. Meurice. Nous le publierons dans la livraison de mars. (*Rédaction.*)

cependant aucune démonstration : *Soit* $123\ldots n = N$ *un nombre écrit dans le système de numération de base* $n + 1$. *Si l'on forme le produit de ce nombre par un multiplicateur inférieur à* n *et premier avec* n, *ce produit s'écrira au moyen des* n *chiffres* $1, 2, 3, \ldots, n$, *pris chacun une seule fois et convenablement permutés. Quelque correspondant pourrait-il me donner une démonstration de ce théorème d'arithmétique, ou en établir l'inexactitude.* (A. Laisant.)

Réponse. Soit A (qu'on doit écrire 10) la base d'un système de numération, et $N = 1234\ldots89\ abc\ldots mnp\ldots tuv$, le nombre formé par les chiffres *significatifs*, écrits dans leur ordre naturel. Le produit λN de N par l'un quelconque λ de ces chiffres : 1° Les contient tous, une seule fois chacun, si λ est premier avec $A - 1$ ou v; 2° Il n'en contient que quelques-uns avec le zéro en sus, qui s'y répète périodiquement, si λ n'est pas premier avec v; le zéro fait alors partie de la période.

Désignons par μ et ρ (accentués ou non) l'un *quelconque* μ des chiffres significatifs et le chiffre de *retenue* ρ à ajouter au produit $\lambda\mu$ pour former le produit partiel $\lambda\mu + \rho$, dont le dernier chiffre à droite est celui qui entre, à son rang hiérarchique, dans la composition du produit λN. La valeur de ρ décroît successivement depuis $\lambda - 1$ jusqu'à 0 inclusivement; les μ se trouvent ainsi partagés en $\lambda - 1$ catégories, dans chacune desquelles ρ demeure constant.

Démonstration. I. Il s'agit de prouver que, λ *étant premier avec* v, 1° aucun produit partiel $\lambda\mu + \rho$ ne se termine par un zéro, et que 2° deux produits partiels $\lambda\mu + \rho$, $\lambda\mu' + \rho'$ ne se terminent pas par un même chiffre significatif.

Remarquons d'abord, puisque le chiffre des unités nous importe seul dans chaque produit, qu'il est permis, sans que la valeur de ce chiffre soit troublée, d'ajouter aux produits, ou d'en retrancher selon le cas, un nombre quelconque de dizaines, par exemple ρ. Cela étant, 1° quelle condition doit remplir λ pour qu'on ait

$$\lambda\mu + \rho = \rho.10, \quad \text{d'où} \quad \lambda\mu = \rho(10 - 1) = \rho v\ ?$$

λ, diviseur du premier membre, et d'ailleurs $> \rho$, doit donc : ou être égal à v, ou être un diviseur de v, ou enfin avoir un facteur (simple ou composé) commun avec v, l'autre facteur divisant ρ. Ces conditions, dont les conséquences seront étudiées plus loin (II), étant écartées par l'hypothèse (I), aucun zéro ne figure dans λN, si λ est premier avec v.

2° Il reste à prouver qu'on ne peut avoir

$$(\lambda\mu + \rho) - (\lambda\mu' + \rho') = mult.\ 10;$$

ce qui revient à dire que les deux produits partiels ne peuvent se terminer par le même chiffre. Si l'on écrit $\rho - \rho' = \sigma$, et qu'on prenne σ pour le *multiple* de 10 du second membre, la relation précédente devient

$$\lambda(\mu - \mu') = \sigma(10 - 1) = \sigma v;$$

λ doit donc diviser σv. Or λ est, par hypothèse, premier avec v, et il est plus grand que σ, puisque $\lambda > \rho > \rho'$. Donc la dite relation ne peut exister.

Le cas de $\mu = v$ n'échappe pas à la démonstration, qu'il suffit de modifier dans un de ses détails, parce que ρ est alors nul. On ajoute 10 à μ', et l'on a la relation $\lambda(10 + \mu' - \mu) = \rho' v$, qui est, comme la précédente, impossible. Le théorème est donc démontré.

Remarquons encore, comme il est très facile de s'en rendre compte, que le chiffre des unités du deuxième produit

$$\lambda u + \rho = \lambda(v - 1) + \rho$$

est *toujours* inférieur d'une seule unité à celui du premier produit λv. Cette particularité met, comme nous allons le voir, le chiffre terminal de ce deuxième produit dans des conditions exceptionnelles à certains égards.

II. λ *n'est pas premier à* v. Il est donc : égal à v, ou diviseur de v, ou bien il a, sans être diviseur, un facteur, simple ou composé, commun avec v; trois hypothèses où le zéro apparaît :

1° Si $\lambda = v$, le premier produit $\lambda v = v^2$ ne s'accroît d'aucune retenue et se termine par un 1, puisqu'il n'est autre que $(A - 1)(A - 1)$. Le terme suivant $vu + v - 1$, moindre que v^2 d'une unité, a donc zéro pour chiffre terminal, mais il est seul dans ce cas. En effet, le troisième produit

$$vt + v - 2 = v(u - 1) + v - 2$$

étant moindre que le second de v unités, se termine par 1, comme v^2. Il en est de même de tous les produits complets qui suivent, parce que désormais la diminution de chacun d'eux est constamment de 10 unités, savoir : celle v, provenant de la multiplication par $\lambda = v$ des chiffres μ

qui décroissent consécutivement d'une unité, plus celle de la retenue qui diminue chaque fois d'une unité, en sorte que

$$vN = 11111 \ldots 101.$$

2° Si $\lambda = \lambda_0$ est l'un des diviseurs de v, autre que v lui-même, il résulte de (I, 1°), en désignant par β le quotient de la division de v par λ_0, que

$$\mu_0 = \rho \frac{v}{\lambda_0} = \rho\beta,$$

l'indice 0 signifiant qu'alors le zéro terminal apparaît. Les valeurs de μ_0, ainsi caractérisées, sont donc les termes successifs de la progression arithmétique $(\lambda_0 - 1)\beta, (\lambda_0 - 2)\beta, \ldots, 2\beta, \beta, 0$, puisque, comme il a été dit, ρ prend les valeurs successives $\lambda_0 - 1, \lambda_0 - 2, \ldots, 2, 1, 0$.

Les chiffres terminaux intermédiaires se reproduisent périodiquement, d'un zéro à l'autre, dans un même ordre, sans immixtion des autres chiffres, la période se composant de β chiffres, y compris le zéro, et le nombre des périodes étant λ_0. Toutefois, la première période du produit $\lambda_0 N$, à droite, contient le chiffre terminal du second produit $\lambda_0 \alpha + \rho$; mais ce chiffre ne reparaît pas dans les autres périodes; il est comme un intrus dans la première. Il s'agit de démontrer tout cela. Considérons, par exemple, le premier produit $\lambda_0 v$, dont le chiffre terminal est $(10 - \lambda_0)$, et prouvons qu'il reparaît dans le produit qui suit immédiatement soit μ_0, soit $\mu'_0, \ldots$, etc. Pour $\mu_0 - 1$, par exemple, le produit $\lambda_0(\mu_0 - 1)$, auquel il faut ajouter la retenue $\lambda_0 - 1$, donne, eu égard à la valeur ci-dessus de μ_0, et en y ajoutant 10 pour pouvoir le comparer à $\lambda_0 v$, l'égalité

$$\lambda_0[(\lambda_0 - 1) \cdot \beta - 1] + \lambda_0 - 1 + 10 = \lambda_0 v.$$

Remplaçant β par sa valeur $\frac{v}{\lambda_0}$, il s'ensuit l'identité $v = 10 - 1$, toutes réductions faites.

Comparons encore le *troisième* produit $\lambda_0(v - 2) + \lambda_0 - 1$, à celui qui vient *deux* rangs après μ_0, c'est-à-dire à $\lambda_0(\mu_0 - 2) + (\lambda_0 - 2) + 10$. Égalant ces deux expressions et réduisant, on aboutit à l'identité $(\lambda_0 - 1)v + v = \lambda v$, etc., ce qu'il fallait prouver.

3° λ a un facteur commun avec v, sans être diviseur. Si $\lambda = \beta\gamma$ et que β divise v, tandis que γ divise ρ, les conclusions relatives au nombre

des périodes et à celui des chiffres de la période sont les mêmes que dans le paragraphe précédent ; les valeurs des chiffres de la période seules diffèrent, nous ne répèterons pas la démonstration, qui découle des mêmes principes par des raisonnements analogues.

III. Sans entrer ici dans plus de détails, disons seulement que, pour deux multiplicateurs λ_0 et $v - \lambda_0$, non premiers à v et complémentaires à v, les chiffres de même rang dans les deux périodes respectives sont complémentaires à v, sauf les premiers qui sont complémentaires à A, de telle sorte que, si l'on connaît le produit $\lambda_0 N$, on peut écrire immédiatement le produit $(v - \lambda_0)$ N. Nous ne pouvons ici, faute d'espace, qu'indidiquer ces curieux détails, en passant sous silence plusieurs autres particularités relatives à la composition des produits λN, dont quelques-unes sont dignes d'attention. Après ce que nous avons dit, il sera aisé de les reconnaître et de s'en rendre compte, en les étudiant sur l'exemple suivant :

Exemple : A = 31 et $v = 30$ (31 et 30 étant écrits dans le système décimal). Les multiplicateurs premiers avec 30, pour lesquels *tous* les chiffres significatifs apparaissent dans le produit λN, sont 7, 11, 13, 19, 23 et 29 (écrits, comme ceux qui vont suivre, dans le système décimal).

Le diviseur 2 et tous les nombres pairs ne contenant ni le facteur 3, ni le facteur 5 fournissent un produit λN composé de deux périodes, de quinze chiffres chacune. Ainsi, pour 2, la période est *urpmkigeca* 86420 ; pour 28, la période est complémentaire : 3579 *bdfhjlnqsu* 0.

Le diviseur 3, ainsi que ses dérivés 9, 21, 27 : trois périodes de dix chiffres chacune, dont le zéro. — Le diviseur 5 et son dérivé 25 : cinq périodes de six chiffres chacune, dont le zéro. — Le diviseur 6 (*) et ses dérivés 12, 18, 24 : six périodes de cinq chiffres chacune, dont le zéro. — Le diviseur 10 et son dérivé 20, dix périodes de trois chiffres chacune, dont le zéro.

(*) Pour $\lambda = 6$, la période, lue de droite à gauche, est $q\,i\,c\,6\,0$, écrite dans le système à base 31 ; et pour $\lambda = 30 - 6 = 24$, la période, lue de droite à gauche, est $7\,d\,j\,q\,0$, et l'on voit que $q + 7 = 31 = A$, tandis que

$$i + d = c + j = 6 + q = 30 = v,$$

ainsi qu'il a été dit. Quant aux premières périodes respectives, celles de droite du produit λN, elles sont pour $\lambda = 6$, ... $q\,(p)\,i\,c\,6\,0$, et pour $\lambda = 24$, ... $7\,(6)\,d\,j\,q\,0$ avec intercalation exceptionnelle du chiffre p au second rang de la première et du chiffre 6 au second rang de la seconde.

Le diviseur 15 : quinze périodes de deux chiffres chacune, dont le zéro. (La période est $g0$, avec intercalation du chiffre f, dans la première période de droite, au rang des dizaines).

Paris, 20 janvier 1895.

RÉSUMÉ DES PROPRIÉTÉS CONCERNANT LES TRIANGLES D'AIRE MAXIMUM INSCRITS DANS L'ELLIPSE.

par M. le Capitaine E. N. Barisien.

Nous résumons dans cet article les propriétés connues sur les triangles d'aire maximum inscrits dans l'ellipse, en y joignant quelques résultats provenant de nos recherches personnelles (*).

1. Si on considère l'ellipse comme la projection d'un cercle, tout triangle équilatéral inscrit dans le cercle se projette dans l'ellipse suivant un triangle T inscrit d'aire maximum.

2. Les tangentes aux trois sommets du triangle T sont parallèles aux côtés opposés.

3. Le centre de gravité du triangle T est au centre de l'ellipse.

4. L'aire du triangle T est constante et égale à $\frac{3ab\sqrt{3}}{4}$.

5. Si par les trois sommets B, C, D du triangle T, on mène des droites antiparallèles aux tangentes en ces sommets par rapport à un axe de l'ellipse, ces trois droites concourent en un même point A situé sur l'ellipse.

6. Par un point A de l'ellipse, il passe trois cercles osculateurs ayant leurs points d'osculation en B, C, D. Le triangle BCD est un triangle d'aire maximum inscrit dans l'ellipse. (Steiner)(**).

(*) La rédaction de *Mathesis* accueillera avec empressement les propriétés nouvelles relatives à ces triangles, que l'on voudra bien lui communiquer. Ces résultats peuvent également être adressés à l' « *Intermédiaire des Mathématiciens* » de MM. Laisant et Lemoine, et feront ensuite l'objet d'un article complémentaire de la présente note.

(**) *Journal de Crelle*, t. LXVI, p. 237; *Gesammelte Werke*, t. II, p. 691. Les propriétés 5, 6, 7, 8 se déduisent l'une de l'autre. A est le *point de Steiner* du triangle BCD.

7. Les cercles osculateurs aux trois sommets du triangle T ont un point commun situé sur l'ellipse.

8. Les quatre points A, B, C, D sont situés sur une même circonférence.

9. Soient A′, B′, C′, D′ les symétriques de A, B, C, D par rapport au centre O de l'ellipse. Les angles BAB′, CAC′, DAD′ sont respectivement égaux aux angles des diamètres BB′, CC′, AA′ avec leurs conjugués ou avec les côtés CD, DB, BC.

10. Les normales en B, C, D et A′ concourent en un même point H.

Les points A′, B, C, D, H, O sont situés sur une même hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux axes de l'ellipse et dont le centre est au milieu du rayon OA′ de l'ellipse.

11. Le lieu du centre des cercles circonscrits aux triangles T est une ellipse ayant pour équation

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{c^4}{16}.$$

12. Le lieu du point de rencontre H des hauteurs du triangle T est l'ellipse

$$a^2x^2 + b^2y^2 = \frac{c^4}{4}.$$

Cette ellipse est tangente à la développée de l'ellipse donnée.

13. L'hyperbole d'Apollonius relative au point H précédent enveloppe une kreuzcurve ayant pour équation

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 4.$$

14. Les côtés du triangle T enveloppent l'ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{4}.$$

De sorte que les triangles T sont, à la fois, inscrits à l'ellipse donnée et circonscrits à l'ellipse concentrique, homothétique à l'ellipse donnée et d'axes moitié moindres.

15. Soient φ_1, φ_2, φ_3 les angles d'anomalie excentrique aux sommets du triangle T. On a les relations suivantes :

$$\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2 + \cos\varphi_3 = 0, \quad \sin\varphi_1 + \sin\varphi_2 + \sin\varphi_3 = 0.$$

16. Soit φ l'angle d'anomalie excentrique en A (propriété 6). On a les relations

$$\cos\varphi = 4\cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\varphi_3, \quad \sin\varphi = 4\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3;$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\varphi_2\operatorname{tg}\varphi_3;$$

$$3\operatorname{tg}\varphi = -(\operatorname{tg}\varphi_1+\operatorname{tg}\varphi_2+\operatorname{tg}\varphi_3), \quad 3\operatorname{cotg}\varphi = -(\operatorname{cotg}\varphi_1+\operatorname{cotg}\varphi_2+\operatorname{cotg}\varphi_3)$$

$$3\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = -\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi_1}{2}+\operatorname{tg}\frac{\varphi_2}{2}+\operatorname{tg}\frac{\varphi_3}{2}\right),$$

$$3\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} = -\left(\operatorname{cotg}\frac{\varphi_1}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\varphi_2}{2}+\operatorname{cotg}\frac{\varphi_3}{2}\right).$$

17. La somme des carrés des côtés du triangle T est constante et égale à $\frac{9}{2}(a^2+b^2)$.

Tous les triangles T ont même angle de Brocard V, donné par

$$\cot V = \frac{3(a^2+b^2)}{2ab\sqrt{3}}. \qquad (3)$$

18. La somme des distances d'un des foyers de l'ellipse aux trois sommets du triangle T est constante et égale à $3a$.

19. Les trois droites perpendiculaires à BA en B, à CA en C et à DA en D, concourent en un même point I (Point de Tarry du triangle BCD).

20. Le lieu de ce point I est l'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2 = \frac{(a^2+b^2)^2}{4}.$$

21. L'enveloppe du cercle circonscrit au triangle T est une anallagmatique du quatrième ordre.

22. Le produit des rayons de courbure en B, C, D, sommets du triangle T, est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle.

23. Les droites joignant le symétrique, par rapport au centre O, du quatrième point d'intersection du cercle BCD avec l'ellipse, aux trois sommets B, C, D de T, enveloppent une développée d'ellipse.

Cette ellipse, concentrique et homothétique à l'ellipse précédente a pour longueurs de ses demi-axes

$$A = \frac{2a^2b}{c^2}, \quad B = \frac{2b^2a}{c^2}.$$

24. La puissance du centre de l'ellipse par rapport au cercle BCD est constante et égale à $\frac{a^2+b^2}{2}$.

25. Dans le triangle BCD, on a

$$\frac{BC}{N_D}=\frac{CD}{N_B}=\frac{DB}{N_C}=\frac{ab\sqrt{3}}{c^2}=\frac{4S}{3c^2},$$

N_B, N_C, N_D sont les longueurs des normales ayant leurs pieds en B, C et D, et interceptées entre les axes; S est l'aire du triangle BCD.

26. Les rayons de courbure aux sommets B, C, D du triangle T sont entre eux comme les cubes des côtés opposés CD, BD, BC.

(Question 940 de *Mathesis*, DROZ-FARNY.)

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de géométrie descriptive, à l'usage des élèves de l'enseignement secondaire moderne, par M. CH. BRISSE, professeur à l'École Centrale et au Lycée Condorcet, Répétiteur à l'École Polytechnique. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1895 (XX-144-116 pages grand in-8, avec 345 fig. dans le texte). Prix : 7 fr.

Sommaire. — PREMIÈRE PARTIE. — Chapitre I : Du point et de la ligne droite; 1. Représentation du point. 2. Représentation de la droite. 3. Tracé des épures. 4. Tracé des ombres. — Chapitre II : Du plan — 1. Représentation du plan. 2. Intersection de deux plans, d'un plan et d'une droite. 3. Intersections de polyèdres. 4. Ombres dans les polyèdres. — Chapitre III : Rotations et Rabattements. — I. Rotation d'une figure plane autour d'une droite de son plan. 2. Rotation d'une figure quelconque. — Chapitre IV : Distances et perpendiculaires. — 1. Distance de deux points. 2. Distance d'un point à une droite. 3. Distance d'un point à un plan. 4 Plus courte distance de deux droites. — Chapitre V : Angles de droites et de plans. — 1. Angle de deux droites. 2. Angle de deux plans. 3. Angle d'une droite et d'un plan.

SECONDE PARTIE. — Chapitre VI : Du cône et du cylindre. — 1. Propriétés géométriques. 2. Plans tangents aux cônes et aux cylindres. 3. Section plane d'un cône ou d'un cylindre. 4. Intersections de cônes et de cylindres. — Chapitre VII : Des surfaces de révolution. — 1. Propriétés géométriques. 2. Plans tangents aux surfaces de révolution. 3. Section plane d'une sphère. — Chapitre VIII : Des projections cotées. — 1. Préliminaires. 2. De la droite. 3. Du plan. 4. Distances et perpendiculaires. 5. Angles de droites et de plans. 6. Représentation des surfaces.

APPENDICE : Notions de perspective. — 1. Principes. 2. Exemples. 3. Éléments de perspective cavalière.

Algèbre à l'usage des candidats aux baccalauréats de l'enseignement secondaire classique, 1ère partie. 2e partie, 2e série, moderne, 1ère partie, 2e partie, 2e et 3e séries (*), par M. L. Giraud, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur agrégé de Mathématiques au Lycée de Bordeaux. Paris, Société d'éditions scientifiques, Place de l'École de Médecine, 4, rue Antoine-Dubois (II, 162 pages in 18). Prix : 2 fr.

Sommaire : 1. Nombres négatifs; fractions algébriques; calcul algébrique. 2. Equations et inégalités du premier degré. 3. Equations et inégalités du second degré. Théorie des maxima et minima. 4. Progressions et logarithmes; intérêts composés et annuités. 5. Compléments. Notions de géométrie analytique, équation d'une droite, coefficient angulaire, construction d'une droite donnée par son équation. Dérivées, variation des fonctions.

Petit livre excellent que nous conseillons à tous les professeurs d'algèbre de mettre dans leur bibliothèque. On remarquera l'introduction des nombres négatifs dès le début du livre, innovation introduite depuis longtemps par Faifofer dans son Algèbre et imposée maintenant en France par le programme officiel. Le grand mérite de M. Giraud, dans son manuel d'Algèbre, est d'avoir nettement indiqué les difficultés (discussion des équations, limites, etc.) et de les avoir résolues, quand le programme l'exigeait.

Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen von Professor Dr. L. Schlesinger, Privatdocenten an der Universität zu Berlin. In zwei Bänden. Erster Band. Leipzig, Teubner, 1895 (In 8e de XX-487 pages). Prix : 16 marcs.

Exposé systématique et complet de toutes les recherches tant anciennes que nouvelles des géomètres sur les équations linéaires. Le premier volume est consacré surtout aux théories générales; le second traitera des équations linéaires spéciales. L'auteur présuppose seulement chez le lecteur la connaissance des principes de la théorie générale des fonctions. Autant qu'on peut juger à première vue, le Traité de M. le Dr Schlesinger a sa place marquée dans la bibliothèque de tous les analystes(**).

(*) Le titre de ce petit livre rappelle les défuntes sections A, B, C de l'enseignement de nos classes d'humanités, sections qui, en pratique, portaient les noms B, C, D parce que l'on avait imaginé une section officieuse A différente des sections officielles A, B, C.

(**) Une introduction historique très intéressante se trouve en tête du volume; elle est précédée d'indications bibliographiques très nombreuses classées d'après les divers chapitres de l'ouvrage. Nous y relevons les noms d'Euler, Legendre, Gauss, Abel, Jacobi, Cauchy, Eisenstein, Weierstrass, Riemann, Fuchs, Briot, Bouquet, Poincaré, Königsberger, Hamburger, J. Tannery, Heffter, Christoffel, Petzval, Frobenius, Pasch, Appell, Vessiot, Brassinne, v. Escherich, Thomé, d'Alembert, Libri, Floquet, Lagrange, Hesse, Jurgens, Malmstén, Joachimsthal, Lacroix, Baltzer, Puiseux, Laplace, Casorati, Ed. Weyr, Sauvage, Jordan, Seiffert, Pochhammer, Schafheitlin, Dirichlet, Pfaff, Gudermann, Kummer, Goursat,

Questions de Mécanique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales, par X. Antomari et C. A. Laisant, docteurs en sciences mathématiques. Un vol. Paris, Nony et Cie. (In-8° de 224 pages, avec 67 fig. dans le texte). Prix : fr. 3-50.

L'ouvrage est annoncé comme faisant suite aux *Leçons de Cinématique et de Dynamique* publiées en 1892 par M. Antomari et dont un compte rendu a été inséré dans ce Journal (1893, pp. 39-40). Le lecteur voudra bien aussi consulter les ouvrages de M. Carvallo : les *Leçons de statique*, 1892, et le *Traité de Mécanique*, 1893 (analysé également dans Mathesis, 1893, p. 115).

On voit donc dans quel esprit est rédigé le recueil de questions.

Chacun des six chapitres dont il se compose est divisé en trois parties : un résumé des notions générales, une discussion de plusieurs questions résolues, et une vingtaine de questions proposées, dont la résolution est toute préparée.

L'ouvrage lui aussi se divise en trois parties ayant trait respectivement à la Cinématique, à la Dynamique et à la Statique ; elles sont précédées et terminées par quelques notions de géométrie vectorielle qui ont en Mécanique notamment leur place toute marquée. Le lecteur, en effet, le moins familiarisé avec la théorie des quantités géométriques dans le plan ou des équipollences et la théorie des quaternions qui en est l'extension à l'espace à trois dimensions ne peut manquer, ce nous semble, d'être frappé de la corrélation philosophique de ces deux généralisations de la géométrie avec l'étude et la science du mouvement.

La notion de force est le trait d'union de ces trois branches des mathématiques, et avant même que cette notion intervienne effectivement, il en est fait une assimilation tacite dans la théorie de la composition des vecteurs. L'importance de cette méthode pour l'étude de la Mécanique a été mise en lumière par M. Laisant dans les ouvrages depuis longtemps classiques qu'il a publiés pour la vulgariser.

Par les simplifications qu'elle procure, elle prend chaque jour plus de faveur dans l'enseignement mathématique.

Son inscription définitive dans les programmes doit donc être demandée et souhaitée ; nul doute qu'elle n'y exerce une heureuse influence. H. B.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 885.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 240).

On donne une circonférence O *et un diamètre fixe* AB. *D'un point variable* P *de* O *comme centre on décrit une circonférence tangente à* AB. *Soit* C *le point de contact.*

Helge von Koch, Hill, Mittag-Leffler, Fabry, Cayley, P. Günther, Caqué, Vogt, Heun, Newton, Ruffini, Liouville, Hermite, Schwarz, Schottky, Klein, Picard, Laguerre, Brioschi, Halphen !

On demande : 1° l'enveloppe de l'axe radical des circonférences O *et* P; *2° le lieu de l'intersection de cet axe avec le rayon de contact* PC; *3° le lieu des points d'intersection de la tangente en* P *au cercle* O *avec le cercle* P.

(Droz Farny.)

Solution par M. H. Brocard (Bar-le-Duc). — Soient D, E les projections des points A, B sur la tangente en P au cercle O. Comme PA est la bissectrice de l'angle CPD, on a AC = AD, PC = PD = PE; donc le cercle P a pour diamètre la projection de AB sur la tangente en P au cercle O. Il en résulte que les points D, E décrivent deux cardioïdes, podaires des points A, B par rapport au cercle O; ce qui résout la troisième partie.

Soit LL′ la corde commune aux cercles P et O, rencontrant PC en M, et soient F le point de rencontre de DE avec AB, G le milieu de CF. La division BACF étant harmonique, on a

$$\overline{GC}^2 = GA.GB;$$

donc G appartient à l'axe radical des deux cercles. On conclut de là que M est le milieu de CP; donc ce point décrit une ellipse ayant pour axes AB et $\frac{1}{2}$AB.

Au lieu de chercher l'enveloppe de LL′, il est préférable, comme je l'ai fait remarquer à diverses reprises, de chercher sa podaire par rapport à l'origine. Soient donc I le milieu de LL′, et $r = OI$, $\theta = IOA$ ses coordonnées polaires. De l'égalité

$$\overline{OI}^2 - \overline{IP}^2 = \overline{OL}^2 - \overline{LP}^2 = R^2 - R^2\sin^2\theta,$$

on conclut

$$r^2 - (R - r)^2 = R^2\cos^2\theta, \quad \text{ou} \quad r = \frac{R}{2}(1 + \cos^2\theta)$$

Le lieu de I est donc une courbe ovale, du 6e degré, ayant mêmes sommets que l'ellipse (M).

MM. Barisien, Cristescu, Déprez, Gillet et Mandart ont donné des solutions analytiques de la question 885. Nous allons résumer la première.

En prenant pour axes coordonnés OA et une perpendiculaire en O, et en posant $POA = \varphi$, les équations des deux cercles sont

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0, \quad (x - R\cos\varphi)^2 + (y - R\sin\varphi)^2 = R^2\sin^2\varphi;$$

celle de l'axe radical LL′ est donc

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = \frac{R}{2}(1 + \cos^2\varphi). \qquad (1)$$

Différentions cette équation par rapport à φ ; il vient

$$x \sin \varphi - y \cos \varphi = R \sin \varphi \cos \varphi. \qquad (2)$$

L'équation (2) représente la perpendiculaire abaissée de C sur LL' ; donc LL' touche son enveloppe au pied de la perpendiculaire menée de C(*). Des égalités (1) et (2) on tire

$$x = \frac{R}{2} \cos \varphi (3 - \cos^2 \varphi), \quad y = \frac{R}{2} \sin^3 \varphi ;$$

en éliminant φ, on trouve

$$4 (x^2 + y^2 - R^2)^3 + 27 R^2 y^4 = 0.$$

L'enveloppe cherchée est donc une courbe unicursale, du 6me degré. Elle a pour aire $\frac{15}{32} \pi R^2$.

L'équation de PC étant $x = R \cos \varphi$, on trouve pour les coordonnées du point de rencontre de LL' avec PC,

$$x = R \cos \varphi, \quad y = \frac{R}{2} \sin \varphi ;$$

ce point est donc le milieu de CP et, par suite, il décrit une ellipse.

Soient D, E les intersections de la circonférence P avec la tangente en P au cercle O. En projetant les contours OPD, OPE successivement sur les deux axes coordonnés, on trouve

$$D \begin{cases} x = R \cos \varphi - R \sin^2 \varphi, \\ y = R \sin \varphi + R \sin \varphi \cos \varphi ; \end{cases} \qquad E \begin{cases} x = R \cos \varphi + R \sin^2 \varphi, \\ y = R \sin \varphi - R \sin \varphi \cos \varphi. \end{cases}$$

Si l'on élimine φ, on trouve

$$(x^2 + y^2 \pm Rx - R^2)^2 + R^2 (x^2 + y^2 - 2R^2) = 0.$$

Le lieu de la projection de O sur l'axe radical des cercles O, P est la courbe

$$4 (x^2 + y^2)^3 - R^2 (2x^2 + y^2)^2 = 0,$$

qui a pour aire $\frac{19}{32} \pi R^2$.

Les centres de similitude des deux cercles se meuvent sur deux paraboles ayant pour foyer commun O et passant par A et B.

(*) Le point de contact de LL' avec son enveloppe est évidemment l'intersection de deux axes radicaux consécutifs; ou le centre radical du cercle O et de deux positions consécutives du cercle P. Mais l'axe radical de ces positions du cercle P est la perpendiculaire abaissée de C sur la tangente en P au cercle O; par suite, le centre radical est la projection de C sur LL'.

Question 906.

(Voir *Mathesis*. (2), IV, p. 32.)

Démontrer que

$$\frac{1}{1^4.3^4}+\frac{1}{5^4.7^4}+\frac{1}{9^4.11^4}+\cdots=\frac{1}{1536}(\pi^4-6\pi^3+30\pi^2-60\pi).$$

(Barniville).

Solution par MM. Cristescu et J. Jonesco (Bucharest) et Poort (Groningue). Le terme d'ordre n de cette série est :

$$\frac{1}{(4n-3)^4(4n-1)^4}.$$

Si l'on décompose ce terme en fractions rationnelles, et que l'on groupe les fractions qui ont le même exposant, on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(4n-3)^4(4n-1)^4}\\&=\frac{1}{2^4}\left[\frac{1}{(4n-3)^4}+\frac{1}{(4n-1)^4}\right]-\frac{1}{2^3}\left[\frac{1}{(4n-3)^3}-\frac{1}{(4n-1)^3}\right]\\&+\frac{5}{2^3}\left[\frac{1}{(4n-3)^2}+\frac{1}{(4n-1)^2}\right]-\frac{5}{2^3}\left[\frac{1}{(4n-3)}-\frac{1}{(4n-1)}\right].\end{aligned}$$

Si dans cette égalité on fait $n=1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ etc. et si l'on ajoute membre à membre les égalités obtenues, on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1^4.3^4}+\frac{1}{5^4.7^4}+\frac{1}{9^4.11^4}+\cdots\\&=\frac{1}{2^4}\left[\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots\right]-\frac{1}{2^3}\left[\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots\right]\\&+\frac{5}{2^3}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots\right]-\frac{5}{2^3}\left[\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right].\end{aligned}$$

Les séries du second membre sont connues (voir J. A. Serret, *Traité de Trigonométrie*, pag. 262 et 268). On a

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8},\quad \frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots=\frac{\pi^4}{96};$$

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4},\quad \frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{\pi^3}{32}.$$

On en conclut

$$\frac{1}{1^4.3^4}+\frac{1}{5^4.7^4}+\frac{1}{9^4.11^4}+\cdots=\frac{1}{1536}(\pi^4-6\pi^3+30\pi^2-60\pi)$$
$$=\frac{1}{2^9.3}(\pi^4-6\pi^3+30\pi^2-60\pi).$$

Remarque. D'une manière analogue on trouve que

$$\frac{1}{1^4.3^4}+\frac{1}{3^4.5^4}+\frac{1}{5^4.7^4}+\frac{1}{7^4.9^4}+\cdots=\frac{1}{2^8.3}(\pi^4+30\pi^2-384).$$

Le terme de rang n de cette série est :

$$\frac{1}{(2n-1)^4(2n+1)^4},$$

et l'on a :

$$\frac{1}{(2n-1)^4(2n+1)^4}$$
$$=\frac{1}{2^4}\left[\frac{1}{(2n-1)^4}+\frac{1}{(2n+1)^4}\right]-\frac{1}{2^3}\left[\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n+1)^3}\right]$$
$$+\frac{5}{2^3}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}\right]-\frac{5}{2^3}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right].$$

Si l'on fait $n=1, 2, 3, 4, \cdots n$, et que l'on ajoute les égalités ainsi obtenues, on trouve

$$\frac{1}{1^4.3^4}+\frac{1}{3^4.5^4}+\frac{1}{5^4.7^4}+\cdots\frac{1}{(2n-1)^4(2n+1)^4}$$
$$=\frac{1}{2^3}\left[1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^4}\right]+\frac{5}{2^4}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$$
$$-\left[\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^3}+\frac{5}{2^3}+\frac{5}{2^3}\right]+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{(2n+1)^3}+\frac{5}{2^3}+\frac{1}{(2n+1)}.$$

Quand n augmente indéfiniment, on a

$$\frac{1}{1^4.3^4}+\frac{1}{3^4.5^4}+\frac{1}{5^4.7^4}+\cdots$$
$$=\frac{1}{2^3}\left[1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\cdots\right]+\frac{5}{2^4}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\right]-\frac{1}{2},$$
$$=\frac{1}{2^8.3}[\pi^4+30\pi^2-384].$$

×Question 917.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 56).

Soient AC *une corde fixe d'une circonférence* O, BD *une corde mobile de longueur invariable. Trouver : 1° les lieux des points* M, N, *intersections des couples de droites* (AB, CD), (BC, AD); *2° l'enveloppe de la droite* MN. (J. Gillet).

Solution par MM. Poort, Droz-Farny, J. Jonesco *et* Deprez. 1° Les angles AMC, ANC sont constants; car les arcs AC, BD compris entre leurs côtés sont invariables. Il en résulte que les points M, N ont pour lieu géométrique les circonférences de deux segments capables décrits sur AC. Il est facile de voir que tout point de l'une ou l'autre de ces circonférences fait partie du lieu.

2° La droite MN est la polaire, par rapport au cercle donné, du point d'intersection des cordes AC, BD; donc elle passe par le pôle de AC. Ce pôle est l'enveloppe demandée.

La première partie de la question est connue; voir, par exemple, *Géométrie de Legendre-Cambier*, p. 83.

M. Déprez accompagne sa solution de plusieurs remarques intéressantes, dont la plupart se retrouvent dans la question 50 que nous avons proposée dans *Mathesis*, (1) I, p. 200. La suivante est cependant nouvelle : Si P est le point d'intersection des droites AC, BD, la droite MP enveloppe une conique ayant pour foyer le centre O du cercle donné; car cette droite est la polaire, par rapport à ce cercle, du point N qui décrit une circonférence. La droite NP enveloppe également une conique de foyer O. (J. N.).

Solution par M. Retali. Les deux points B et D marquent sur la circonférence donnée O^2 deux ponctuelles projectives dont les points unis sont les deux points circulaires à l'infini. Les deux faisceaux A (B...), C (D...) sont donc projectifs (directement égaux) et leur produit est un cercle M^2 passant par les deux points A et C; de même N décrit un autre cercle N^2 passant par A et C. Si nous menons par le point C les deux cordes CE et CF égales à BD, les extrémités E et F sont les points qui correspondent, sur le cercle donné O^2, à C suivant que l'on considère ce point comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux ponctuelles projectives; les droites CE et CF sont, par conséquent, tangentes au point C respectivement aux cercles M^2 et N^2.

Soient μ, ν, ω les centres des cercles M^2, N^2, O^2, et appelons M, N, O

les points d'intersection de la tangente menée à O^2 au point C, avec les droites AF, AE et $\mu\nu$: évidemment le point O est le pôle de la droite AC par rapport à O^2, et les droites $C\omega$, CO sont les bissectrices des angles formés par les rayons $C\mu$, $C\nu$ des cercles M^2, N^2 ; *les deux points* O *et* ω *sont donc les centres de similitude des cercles* M^2, N^2.

Les deux ponctuelles marquées par les points M et N respectivement sur les cercles M^2 et N^2 sont évidemment projectives ; en outre, elles ont en chacun des deux points circulaires à l'infini un point uni ; l'enveloppe de la droite $\overline{MN}$ est donc en général un faisceau de la deuxième classe : mais dans notre cas particulier, au point C, suivant qu'on le considère comme appartenant au cercle M^2 ou au cercle N^2, correspondent les deux points N et M en ligne droite avec C, donc l'enveloppe de la droite MN dégénère en un faisceau de la première classe ayant O pour centre, compté deux fois. Notre enveloppe se réduit donc *au pôle de la droite* AC *par rapport au cercle donné, compté double.*

Observation. Avec les mêmes raisonnements on parvient au résultat suivant : Si nous avons sur une conique O^2 deux ponctuelles projectives (B) et (D), dont les points unis soient I et J, et deux points fixes A et C ; en appelant E et F les points correspondants à C, suivant que ce point est considéré comme appartenant à l'une ou à l'autre des deux ponctuelles projectives, le lieu du point $(AB, CD) \equiv M$, est la conique M^2 passant par A, C, I, J et tangente à la droite CF ; le lieu du point $(AC, BD) \equiv N$ est la conique menée par A, C, I, J et tangente à la droite CE. L'enveloppe de la droite MN dégénère en un faisceau de la première classe (compté double) ayant son centre au pôle O de la droite AC par rapport à O^2. Le point O et le pôle de la droite IJ par rapport à O^2 sont deux points ombilicaux des deux coniques M^2 et N^2.

×Question 921.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 79).

Soient AH', BH'', CH''' *les hauteurs d'un triangle* ABC, H *leur point de concours. On prolonge* AB *de* $BB_1 = AB$, AC *de* $CC_1 = AC_1$, HB *de* $BB'_1 = HB$, HC *de* $CC'_1 = HC$; *de même on prolonge* BA *de* $AB_2 = BA$, CA *de* $AC_2 = CA$, BH *de* $HB'_2 = BH$, CH *de* $HC'_2 = CH$. *Démontrer 1° que les points* H'', H''', B_1, C_1, B'_1, C'_1 *sont sur une même circon-*

férence E_a ; 2° *que les points* H'', H''', B_2, C_2, B'_2, C'_2 *sont sur une même circonférence* E'_a ; 3° *que la droite* $E_aE'_a$ *et les deux analogues* $E_bE'_b$, $E_cE'_c$ *se coupent au centre* O_9 *du cercle des neuf points de* ABC ; 4° *que les six points* E_a, E'_a, E_b, E'_b, E_c, E_c *sont sur une même circonférence concentrique avec la circonférence* O_9 *et d'un rayon triple.* (P. J. V.).

Solution par M. E. Lemoine. 1° Les quatre points C_1, C'_1, H'', H''' sont sur une circonférence E_a, car

$$CH'''.CC'_1 = CH''.CC_1 .$$

La circonférence E_a passe aussi en B'_1 et en B_1, car

$$HC'_1.HH''' = HB'_1.HH'' \quad \text{et} \quad BH''.BB'_1 = BH'''.BB_1 .$$

2° On établirait de même que H'', H''', B_2, B'_2, C_2, C'_2 sont sur une circonférence E'_a.

3° La perpendiculaire au milieu de H''H''' passe par E_a, E'_a, O_9 ; puisque H''H''' est une corde de ces trois cercles.

4° Soient O le centre du cercle circonscrit à ABC, M le milieu de BC, M_1 le milieu de B_1C_1, N le point où la droite $E_aE'_a$ coupe AH. $E_aE'_a$ passe en M puisque c'est le centre du cercle CH''H'''B ; donc puisque $MA = MM_1$, on a $ME_a = MN$. O_9 étant le milieu de OH, on a : $O_9N = O_9M$, d'où $ME_a = 2O_9M$ et par suite $O_9E_a = 3O_9M$. E_a est donc sur un cercle de rayon $3O_9M$ et de centre O_9 ; de même E'_a, E_b, etc.

Ont résolu la même question MM. Jonesco, Tzitzéica, F. Verhelst (Anvers), Droz Farny, François (La Haye). Pour démontrer la première partie, on peut observer que les droites $B_1B'_1$ et $C_1C'_1$ sont égales et parallèles à AH, que B_1C_1 et $B'_1C'_1$ sont égales et parallèles à BC ; donc la figure $B_1C_1C'_1B'_1$ est un rectangle inscriptible dans une circonférence E_a dont $B_1C'_1$ et $C_1B'_1$ sont deux diamètres. Les angles $B_1H'''C'_1$, $B'_1H''C_1$ étant droits, la même circonférence passe par H''' et H''.

M. Déprez signale la généralisation suivante : si AH', BH'', CH''' sont trois droites concourantes quelconques, et qu'on prenne sur AB, AC, HB, HC les longueurs

$$BB_1 = AB_2 = \lambda.AB, \quad CC_1 = AC_2 = \lambda.AC,$$
$$BB'_1 = HB'_2 = \lambda.HB, \quad CC'_1 = HC'_2 = \lambda.HC,$$

les points B_1, C_1, B'_1, C'_1, H'', H''' sont sur une même conique E_a, et les points B_2, C_2, B'_2, C'_2, H'', H''' sur une seconde conique E'_a ; les droites $E_aE'_a$, $E_bE'_b$, $E_cE'_c$, qui joignent les centres de ces coniques et des coniques analogues se coupent au centre d'une conique ε qui passe par les points H', H'', H''' et les milieux des côtés de ABC ; ces sept coniques sont semblables entre elles ; les centres E_a, E'_a, E_b, E'_b, E_c, E'_c sont sur une conique ε' semblable à ε ; le rapport de similitude des coniques ε', ε est égal à $2\lambda + 1$.

QUESTIONS D'EXAMEN.

670. Démontrer que

$$\frac{1}{\sin a \sin(a+h)}+\frac{1}{\sin(a+h)\sin(a+2h)}+\cdots$$
$$+\frac{1}{\sin(a+nh-2h)\sin(a+nh-h)}=\frac{1}{\sin h}[\cot g\, a-\cot g(a+nh-h].$$

671. Trouver les sommes

$$\frac{1}{\sin x \sin 2x}+\frac{1}{\sin 2x \sin 3x}+\cdots+\frac{1}{\sin(n-1)x \sin nx},$$
$$\frac{1}{\cos x \cos 3x}+\frac{1}{\cos 3x \cos 5x}+\cdots+\frac{1}{\cos(2n-1)x \cos(2n+1)x}.$$

672. On donne une circonférence et deux rayons rectangulaires Qx, Oy. Dans l'angle xOy on trace deux circonférences tangentes à ses côtés et à la circonférence donnée, l'une intérieure et l'autre extérieure. Montrer que leurs rayons sont fournis par les deux racines convenablement interprétées d'une équation du second degré. Les construire géométriquement. (*Baccalauréat*, RENNES, 1893.)

Équation du problème : $(R \mp x)^2 = 2x^2$, d'où $R \mp x = x\sqrt{2}$.

673. Les droites qui joignent un point quelconque M d'une ellipse aux extrémités d'un diamètre AA′ sont conjuguées harmoniques de celles qui joignent le même point aux extrémités B, B′ du diamètre conjugué. (BARISIEN.)

Prendre pour axes AA′, BB′ et vérifier que les coefficients angulaires des droites MA, MA′, MB, MB′ satisfont à la relation

$$(m+m')(p+p') = 2mm' + 2pp'.$$

Autrement : le théorème est vrai pour une circonférence parce que MB, MB′ sont les bissectrices de l'angle AMA′ et de l'angle adjacent supplémentaire, etc.

674. La normale en un point quelconque M d'une parabole rencontre l'axe en un point N ; un point P qui divise MN dans un rapport constant décrit une parabole. (BARISIEN.)

La sous-normale étant égale à p, les coordonnées de P sont de la forme

$$x = x_1 + kp, \quad y = (1-k)y_1, \quad \text{où} \quad y_1^2 = 2px, \quad \text{etc,}$$

Si MP = 2MN, P est le *point de Frégier* relatif au point; c'est le point par lequel passent les hypoténuses de tous les triangles rectangles inscrits dans la parabole et dont le sommet de l'angle droit est en M.

675. Soient A, B, C, D, E, F les sommets consécutifs d'un hexagone régulier dont le centre est un point O. On demande autour de quel point du plan il faudrait faire tourner le côté AB pour l'amener sur le rayon OD. Calculer l'aire décrite (ou balayée) par la droite AB dans ce mouvement de rotation. (*Baccalauréat classique*, CAEN, 1893.)

Le centre de rotation est à l'intersection des perpendiculaires élevées aux milieux des droites AO, BD, donc en F. L'aire décrite par AB est égale à la moitié de celle du triangle augmentée de celle d'un segment sous-tendu par la corde BD dans le cercle de rayon FB, et diminuée de celle du segment sous-tendu par la corde AO dans le cercle de rayon FA; il est facile de voir que cette expression se ramène à la différence de deux secteurs ayant pour rayons FO, FB et même angle au centre DFB.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1006. A est un point fixe d'une circonférence O et C, C′ sont les extrémités d'un diamètre variable; on prolonge les cordes AC, AC′ des quantités CD = AC′, C′D′ = AC. Trouver le lieu géométrique : 1° du point de rencontre M des droites CC′, DD′; 2° du point d'intersection N des droites CD′, C′D; 3° de la projection P de N sur le diamètre CC′. Démontrer que la droite MN pivote autour d'un point fixe.

(MANDART.)

1007. Soient TM, TM′ deux tangentes à une conique. On mène deux autres tangentes parallèles quelconques, qui coupent TM en P et Q, TM′ en P′ et Q′. Si F, F′ sont les foyers de la conique, démontrer que

$$TP.\,TQ' = TP'.\,TQ = TF.\,TF'. \qquad \text{(E. P. ROUSS.)}$$

***1008.** Soient ABC un triangle donné, A′B′C′ le triangle formé par les milieux des côtés de ABC; ω, le centre du cercle inscrit dans ABC, ω′ le centre du cercle inscrit dans A′B′C′ et O le centre du cercle circonscrit à ABC. Démontrer les relations

$$\overline{\omega\omega'}^2 + \overline{\omega'O}^2 = (R - r)(R - 2r), \quad \frac{\overline{\omega\omega'}^2 + \overline{\omega'O}^2}{\overline{\omega O}^2} = 1 - \frac{r}{R},$$

r et R étant les rayons des cercles inscrit et circonscrit à ABC.

(E. N. BARISIEN.)

***1009.** Quels sont les nombres triangulaires qui, augmentés d'une unité, sont égaux à un carré. (DE ROCQUIGNY.)

Rectification. Page 5, ligne 5, *lire :* S_D est la polaire réciproque de s_d, *au lieu de :* D est la polaire de *d*.

QUESTIONS D'ARITHMOLOGIE;

par M. DE ROCQUIGNY.

1. Si

$$a+b+c+d=0,$$

l'expression

$$a^2+b^2+c^2+d^2$$

est la somme de trois carrés.

En effet,

$$(a+b)^2+(a+c)^2+(a+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2a(a+b+c+d)$$
$$=a^2+b^2+c^2+d^2.$$

Autrement :

$$a^2+b^2+c^2+(a+b+c)^2=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2.$$

En prenant pour a, b, c, d les nombres $a, -(a+1), -b, b+1$, on trouve

$$a^2+(a+1)^2+b^2+(b+1)^2=(a-b)^2+(a+b+1)^2+1.$$

2. Si

$$T_n=\tfrac{1}{2}n(n+1),$$

on a

$$T_1T_n+T_2T_{n-1}+T_3T_{n-2}+\cdots+T_nT_1=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}.$$

3. Le nombre $4n^4+2n^2$, double d'un nombre triangulaire, est aussi la somme de deux nombres triangulaires distincts.

Car

$$4n^4+2n^2=(n^2+n)[2(n^2+n)-1]+(n^2-n)[2(n^2-n)-1].$$

4. Si a et b sont des entiers quelconques, le produit de deux quelconques des quatre nombres triangulaires

$$T_{a-1}, T_a, T_{b-1}, T_b$$

par la somme des deux autres est aussi une somme de deux nombres triangulaires.

En effet

$$(T_{a-1}+T_a)(T_{b-1}+T_b)=T_{c-1}+T_c,\quad c=ab;$$
$$(T_{a-1}+T_{b-1})(T_a+T_b)=T_m+T_n,\quad \begin{cases} m=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+a-b-2),\\ n=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-a+b-2);\end{cases}$$
$$(T_{a-1}+T_b)(T_a+T_{b-1})=T_p+T_q,\quad \begin{cases} p=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-a-b-2),\\ q=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+a+b-2);\end{cases}$$

5. Les fractions

$$\frac{ma+1}{(m+1)a+1}, \quad \frac{ma-1}{(m+1)a-1}$$

sont irréductibles. Il en est de même des fractions

$$\frac{ma-1}{(m+1)a+1}, \quad \frac{ma+1}{(m+1)a-1},$$

pourvu que $ma \mp 1$ soit premier avec $2m+1$.

6. Quel théorème d'arithmétique peut-on déduire de l'identité

$$\frac{(2a+1)^2+(2b+1)^2}{2}+1 = a^2+(a+1)^2+b^2+(b+1)^2 ?$$

7. On a

$$\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = (a^3+b^3)^2.$$

8. On a

$$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix} = (a^3-b^3)^2.$$

9. Démontrer que la somme des nombres consécutifs

$$n^2, \quad n^2+1, \quad n^2+2, \quad \ldots, \quad (n+1)^2-1,$$

est égale à

$$6[1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2].$$

10. Le produit de deux nombres triangulaires consécutifs est la moitié d'un nombre triangulaire.

11. Le produit de deux nombres triangulaires de rangs n et $n+2$ est le double d'un nombre triangulaire.

12. La somme $T_{n-2}T_{n+2}+1$ est un carré.

13. Vérifier que

$$T_{n-3}+T_{n-1}+T_{n+1}+T_{n+3} = n^2+(n+1)^2+3^2.$$

14. On partage la suite naturelle des nombres en groupes renfermant respectivement $1, a, a^2, a^3, \ldots$ termes. La somme des termes du n^e groupe a pour expression

$$\frac{a^{n-1}(a^{n-1}+1)}{2}+\frac{a^{n-1}(a^{n-1}-1)}{a-1}. \qquad (\alpha)$$

Si $a = 2$, cette somme est un carré augmenté d'un nombre triangulaire, ou la somme de trois nombres triangulaires.

Si $a = 3$, l'expression (α) est le carré du nombre des termes du n^e groupe.

15. On partage la suite naturelle des nombres en groupes, tels que le n^e groupe renferme an termes. La somme des termes du n^e groupe est égale à $\frac{1}{2} an(an^2 + 1)$.

16. Mettre les différences

$$(n+1)^3 - n^3, \quad (n+3)^3 - n^3, \quad (n+4)^3 - n^3,$$

sous la forme d'une somme de trois nombres triangulaires.

17. La différence $(n+2)^3 - n^3$ est la somme de trois carrés.

18. Mettre la somme des carrés de cent termes consécutifs d'une progression arithmétique sous la forme d'une somme de quatre carrés.

On a, par exemple,

$$(a-49r)^2 + \cdots + a^2 + \cdots + (a+50r)^2 = (10a+5r)^2 + (283r)^2 + (56r)^2 + (10r)^2$$
$$= (10a+5r)^2 + (280r)^2 + (70r)^2 + (5r)^2.$$

19. Vérifier la relation

$$(T_{n-2} + T_n)(T_{n-1} + T_{n+1}) = T_{n^2-1} + T_{n^2+1}.$$

Comparez la 2^{me} égalité de l'exercice 4.

20. La somme des produits 2 à 2 de quatre nombres impairs consécutifs n'est jamais une puissance exacte.

Si $2n-3, 2n-1, 2n+1, 2n+3$ sont les nombres, la somme en question est $24n^2 - 10$; elle est divisible par 2 sans l'être par 4, etc.

21. La somme des produits 2 à 2 de trois nombres impairs quelconques, n'est jamais un carré.

Car elle est de la forme $4n + 3$.

22. Vérifier l'identité

$$1^2 + 5^2 + 9^2 + \cdots + (4n-3)^2 + (n^2-n)^2 + (2n)^2$$
$$= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 + (n^2+n)^2.$$

23. Résoudre l'équation

$$(n+1)^3 = n^3 + (n-2)^3 + 1.$$

Réponse : 8 et les racines cubiques imaginaires de -1.

SUR QUELQUES CONIQUES DU PLAN D'UN TRIANGLE ABC,

par J. NEUBERG.

I. Une sécante parallèle à une direction donnée l coupe les côtés AC, AB, BC aux points B_1, C_1, A_1; soit M le point d'intersection des droites BB_1, CC_1. Lorsque la sécante se déplace, M décrit une conique Σ_a circonscrite au triangle ABC. Menons par A, B, C des sécantes parallèles à l; soient α, β, γ les points où elles rencontrent les côtés opposés du triangle ABC. Les points A, B, C de Σ_a correspondent respectivement à ces sécantes. Les droites $B\beta$, $C\gamma$ sont même tangentes en B et C; car ce sont les rayons des faisceaux homographiques générateurs (BB_1), (CC_1) qui sont les homologues de BC considéré dans l'autre faisceau.

Les tangentes en B et C étant parallèles, le centre de Σ_a est le milieu A' du BC.

Les tangentes en A, B, C forment un triangle homologique avec le triangle ABC, l'axe d'homologie est évidemment la droite $\beta\gamma$; par suite, si $\beta\gamma$ coupe BC en α_1, $A\alpha_1$ est la tangente en A. Les droites $A\alpha$ et $A\alpha_1$ sont conjuguées harmoniques par rapport à l'angle BAC.

Si $A\alpha_1$ rencontre $B\beta$, $C\gamma$ en β', γ', le produit $B\beta'.C\gamma'$, d'après un théorème connu, est égal au carré du demi-diamètre parallèle à l. On connaît ainsi le diamètre BC et son conjugué, ce qui permet de déterminer les axes de Σ_a.

Pour obtenir les asymptotes, il faut mener une sécante B_2C_2 parallèle à l et telle que les droites BB_2, CC_2 soient parallèles entre elles. Comme

$$\frac{AB_2}{AC} = \frac{AB}{AC_2}, \quad \frac{AB_2}{AC_2} = \frac{A\beta}{AB},$$

on a

$$AB_2 = \pm\sqrt{AC.A\beta}.$$

Si $A\beta$ et AC sont de même sens, la courbe est une hyperbole, et les directions des deux asymptotes s'obtiennent en portant sur AC à partir de A, dans les deux sens, les segments

$$AB_2 = AB'_2 = \sqrt{AC.A\beta};$$

les asymptotes sont parallèles aux droites BB_2, BB'_2.

Les trois droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent aux sommets d'un triangle MNP. Les points M, N, P décrivent trois coniques Σ_a, Σ_b, Σ_c circonscrites au triangle ABC et tangentes respectivement à deux des droites $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$; les centres de ces courbes sont les milieux A', B', C' des côtés BC, CA, AB de ABC.

Toute conique à centre admet le mode de génération qui vient d'être considéré : on prendra pour B, C les extrémités d'un diamètre quelconque, pour A un point quelconque de la courbe, pour l la direction des tangentes en B et C.

Nous avons traité le cas où l est parallèle à une bissectrice (intérieure ou extérieure) de l'angle BAC, dans l'*Annuaire de l'Ass. fr. pour l'av. des sciences* (année 1893). M. Tücker a étudié le même cas et celui où l est anti-parallèle à BC par rapport à l'angle BAC, dans les *Proceedings of The Edinburgh Math. Soc.*, 1894, p. 69.

II. Soient α un point quelconque du côté BC d'un triangle ABC, α_1 et α_2 ses projections sur CA et AB. Les points α, α_1, α_2 décrivant trois ponctuelles semblables, la droite $\alpha_1\,\alpha_2$ enveloppe une parabole P_a qui touche AC et AB.

Si α coïncide avec C ou B, $\alpha_1\,\alpha_2$ coïncide avec les hauteurs CC' ou BB' ; donc P_a touche les hauteurs BB', CC'.

Les quatre tangentes AB, AC, BB', CC' déterminent complètement la parabole. Comme AB, AC sont deux hauteurs du triangle HBC (H est l'orthocentre de ABC), P_a est aussi l'enveloppe des droites qui joignent les projections d'un point quelconque de BC sur BB', CC'.

Cette remarque conduit à ce théorème de géométrie élémentaire : *Si l'on projette un point quelconque* α *de* BC *sur les côtés* AB, AC, *la droite qui unit les projections rencontre les hauteurs* BB', CC' *en deux points tels que les perpendiculaires élevées en ces points sur les hauteurs correspondantes concourent sur* BC.

Le foyer de P_a est au pied A' de la hauteur issue de A : car les circonférences circonscrites aux triangles ACC', ABB' formés par trois tangentes se rencontrent au foyer.

La directrice est la droite B'C', qui joint les sommets de deux angles droits circonscrits. Le demi-paramètre est la distance de A' à B'C'.

Soient A'_1, A'_2 les projections de A' sur CA, BB : la droite $A'_1A'_2$ est évidemment la tangente au sommet de P_a ; elle passe donc par les milieux de A'B', A'C' (résultat connu).

Si la perpendiculaire en A sur AB coupe BC en D, la projection E de D sur AC est le point de contact de AC avec P_a; car si l'on place α en D, α_1 et α_2 coïncident avec E et A. Comme la tangente AC fait des angles égaux avec le rayon vecteur A'E et avec l'axe qui est perpendiculaire à B'C', on voit facilement que A'E est perpendiculaire à A'B'; d'où un second moyen de construire le point E.

L'orthocentre du triangle circonscrit $AA'_1A'_2$ est situé sur la directrice B'C'.

Si l'on projette un point quelconque β de CA sur BC et BA, ou un point quelconque γ de AB sur CA et CB, la droite qui joint les projections enveloppe respectivement une parabole P_b ou P_c ayant pour foyer B' ou C', et pour directrice C'A' ou A'B'.

Les paraboles P_b, P_c ont pour tangentes communes le côté BC et la hauteur AA'; leur troisième tangente commune forme avec les deux premières un triangle tel que la circonférence circonscrite passe par les foyers B', C' des deux courbes. Cette circonférence est donc celle des neuf points de ABC; elle rencontre BC en son milieu A'', AA' au milieu A''' de AH. Par suite, A''A''' est une tangente commune à P_b et P_c. Elle rencontre BC et BA en deux points tels que les perpendiculaires élevées en ces points sur BC et BA se coupent sur CA; de même, les perpendiculaires élevées sur les hauteurs AA', CC' en leurs points de rencontre avec A''A''' concourent sur AC. Ces propriétés résultent de la génération de P_b, et l'on en obtient d'autres analogues en considérant A''A''' comme une tangente de P_c.

Les paraboles P_c, P_b, P_c ont été étudiées par M. Tücker (*Proceedings of the Edinburgh Math. Soc.*, 1894, p. 79). Nous avons emprunté au géomètre anglais les énoncés des propriétés démontrées ci-dessus, sauf la construction des tangentes communes.

III. Pour généraliser, soit H un point quelconque du plan ABC, et soient A', B', C' les points de rencontre des droites AH, BH, CH avec BC, CA, AB. Par un point quelconque α de BC menons les droites $\alpha\alpha_1$, $\alpha\alpha_2$ parallèles à BH, CH et rencontrant AC, AB respectivement en α_1, α_2. La droite $\alpha_1\alpha_2$ enveloppe une parabole Q_a, qui touche les quatre droites AB, AC, BB', CC'. Menons AD parallèle à CH et rencontrant BC en D, puis DE parallèle à BH et rencontrant AC en E; E sera le point de contact de AC avec Q_a.

Le foyer F_a est à l'intersection des circonférences ABB', ACC' et la directrice passe par les orthocentres des triangles ABB', ACC'.

A' est le pôle de B'C' par rapport à Q_a; c'est ce que l'on voit en projetant cylindriquement le triangle ABC de manière que H se projette suivant l'orthocentre de la projection de ABC. Pour démontrer directement cette propriété, menons $A'A'_1$, $A'A'_2$ parallèles à BB', CC' et rencontrant AC, AB respectivement en A'_1, A'_2; $A'_1A'_2$ est une tangente de Q_a, laquelle est parallèle à B'C' et passe par les milieux de A'B', A'C', car les droites A'_1B', A'_1A', $A'_1A'_2$, A'B' sont parallèles aux rayons du faisceau harmonique B' (ABC'A').

SUR LES PREMIERS PRINCIPES DE LA MÉTAGÉOMÉTRIE ET DE LA GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE(*).

1. *Premiers principes de la métagéométrie.* Partons des définitions de la droite et du plan dues à Cauchy (**), et admettons que : 1° la distance CE d'un point C d'une droite AB à un point extérieur E est déterminée par des distances AB, CA, CB, EA, EB ; 2° la distance DE d'un point D d'un plan ABG à un point extérieur E est déterminée par les distances AB, BG, GA, DA, DB, DG, EA, EB, EG. Nous pouvons établir les théorèmes suivants : α) *La droite* AC *est identique à la droite* AB; car, si E est extérieur à AB, c'est-à-dire si un second point E', au moins, est tel AE' = AE, BE' = BE, on aura aussi E'C = EC, et, par suite, E et E' sont extérieurs à AC ; et réciproquement. β) *Le plan* ABD *est identique à* ABG. Démonstration analogue. γ) *La droite* MN *est tout entière dans le plan* ABG *contenant les points* M *et* N. Car, d'après β, le plan ABG est identique à MBG et aussi à MNG. Si E est extérieur au plan MNG, il y a un second point E' tel que ME' = ME, NE' = NE, GE' = GE; donc, à cause des deux premières de ces égalités, E, E' sont extérieurs à MN; etc.

2. *Deux droites quelconques d'un plan riemannien se coupent en deux*

(*) Cette note est le complément de notre *Essai sur la Géométrie riemannienne* qui a paru en supplément dans la livraison de février.

(**) La notion de distance étant regardée comme une notion première irréductible, un point M est dit appartenir à la droite AB (ou au plan ABG) si aucun point de l'espace n'est distant de A et B (ou de A, B et G) comme l'est M.

points situés à une distance constante. Soient 1,2 les intersections de deux droites riemanniennes A1B, A2B, avec un cercle de centre A tracé dans le plan de ces droites avec un rayon moindre que AB. Portons sur la circonférence des arcs 23, 34, 45, etc., égaux à 12, dans un sens déterminé. Il est facile de voir que les droites A3, A4, A5, etc., passent toutes par B. Si l'arc 12 est une partie incommensurable de la circonférence, ces droites seront en nombre indéfini, et, par passage à la limite, on pourra conclure que toute droite passant par A, dans le plan A12, passe par B. Si 12 est une partie commensurable de la circonférence, la construction indiquée subdivisera cette circonférence en n parties égales, que l'on pourra chacune diviser à son tour en 2, 4, 8, etc. parties égales aussi petites que l'on veut. Les droites en nombre indéfini émanant de A et passant par ces points de subdivision aboutiront encore en B et conduiront à la même conclusion. Etc., etc. (P. M.).

SUR UN THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE,

par M. Meurice.

(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 37.)

Soit $123 \ldots n = N$ *un nombre écrit dans le système de numération de base* $n + 1$. *Si l'on forme le produit de ce nombre par un multiplicateur inférieur à* n *et premier avec* n, *ce produit s'écrira au moyen des* n *chiffres* $1, 2, 3, \ldots, n$, *pris chacun une seule fois et convenablement permutés. Quelque correspondant pourrait-il me donner une démonstration de ce théorème d'arithmétique, ou en établir l'inexactitude ?* (A. Laisant.)

Multiplions le nombre N par n ; nous aurons

$$N \times n = N \times (n + 1) - N = 123 \ldots n0 - 123 \ldots n;$$

puis, en effectuant la soustraction et en marquant par un indice le nombre des chiffres du résultat :

$$N \times n = (111 \ldots 110\,1)_{n+1}.$$

Soit λ un nombre inférieur à n et premier avec n ; on a

$$N \times n \times \lambda = (\lambda\lambda\lambda \ldots \lambda\lambda 0\lambda)_{n+1}.$$

Appelons N′ le second membre de cette égalité. Pour obtenir le

produit $N \times \lambda$, nous divisons N′ par n en employant le procédé ordinaire. Les nombres

$$\lambda, \quad \lambda\lambda, \quad \lambda\lambda\lambda, \quad \ldots, \quad (\lambda\lambda \ldots \lambda)_{n-1}, \quad (\lambda\lambda \ldots \lambda 0)_n, \tag{1}$$

étant divisés par n donnent des restes que nous représentons par

$$\lambda, \quad r_1, \quad r_2, \quad \ldots, \quad r_{n-2}, \quad r_{n-1}. \tag{2}$$

Les dividendes partiels de la division de N′ par n seront alors

$$\lambda\lambda, \quad r_1\lambda, \quad r_2\lambda, \quad \ldots, \quad r_{n-2}0, \quad r_{n-1}\lambda, \tag{3}$$

et les quotients de la division des nombres (3) par n seront les chiffres successifs du produit $N \times \lambda$.

Comme n est égal à la base du système de numération moins un, les restes de la division des nombres (1) par n seront les mêmes que ceux de la somme des chiffres de ces nombres, ou de

$$\lambda, \quad 2\lambda, \quad 3\lambda, \quad \ldots, \quad (n-1)\lambda, \quad (n-1)\lambda \tag{4}$$

Nous voyons d'abord que $r_{n-2} = r_{n-1}$. Ensuite, aucun des restes (2) n'est nul, puisque les nombres (4), de la forme $p\lambda$ où $p < n$, ne sont pas divisibles par n. Enfin, si l'on fait abstraction du dernier terme de la suite (4,) deux nombres de cette suite, divisés par n, ne peuvent donner des restes égaux; autrement la différence de ces nombres, qui est de la forme $p\lambda$, où $p < n$, serait divisible par n.

Cela posé, comme le reste de la division de $(n-1)\lambda$ par n est égal à $-\lambda$ ou plutôt à $n - \lambda$, on a

$$r_{n-2} = r_{n-1} = n - \lambda.$$

Les deux derniers dividendes partiels (3) sont donc

$$(n-\lambda)0 = (n-\lambda) \times (n+1) = n^2 - n(\lambda - 1) - \lambda,$$
$$(n-\lambda)\lambda = (n-\lambda) \times (n+1) + \lambda = n^2 - n(\lambda - 1);$$

les quotients des divisions de ces dividendes par n sont $n - \lambda$ et $n - \lambda + 1$, et tels sont aussi les deux derniers chiffres du produit $N \times \lambda$.

Considérons ensuite les dividendes partiels

$$\lambda\lambda, \quad r_1\lambda, \quad r_2\lambda, \quad \ldots, \quad r_{n-3}\lambda, \quad r_{n-1}\lambda.$$

La différence de deux quelconques de ces nombres étant au moins égale à $n + 1$, les quotients de la division de ces nombres par n sont inégaux; donc les $n - 2$ premiers chiffres et le dernier chiffre du produit $N \times \lambda$ sont inégaux.

Le dividende partiel $r_{n-2}0$ diffère de ceux qui le précèdent, d'au moins $n+1$ unités ; il y a exception pour le dividende partiel de la forme

$$(r_{n-2}-1)\lambda=(n-\lambda-1)\times(n+1)+\lambda=n^2-n\lambda-1,$$

mais le quotient de ce dernier par n étant $n-\lambda-1$, on voit que l'avant-dernier chiffre du produit $N\times\lambda$ est différent de tous les autres.

Donc la proposition de M. Laisant est démontrée.

Remarque. D'après un théorème connu, le nombre 12345679 multiplié par l'un des nombres 9, 18, 27, ..., 81 donne un produit dont tous les chiffres sont égaux entre eux. Si l'on multiplie ce nombre par l'un des nombres 2, 4, 5, 7, 8, premiers avec 9, le produit s'écrit au moyen de huit chiffres significatifs inégaux. Plus généralement, si l'on multiplie le nombre

$$P=123\ldots(n-2)\,n$$

écrit dans le système de base $n+1$, par un nombre λ premier avec n, le produit s'écrit avec $(n-1)$ chiffres significatifs inégaux ; le chiffre manquant est $n-\lambda$.

La démonstration est analogue à celle que nous avons donnée ci-dessus pour le théorème de M. Laisant(*).

Suite(**). 1. Reprenons l'égalité

$$N\times n\times\lambda=(\lambda\lambda\ldots\lambda0\lambda)_{n+1},$$

et considérons le cas où λ et n ont un plus grand codiviseur δ ; si $n=\delta\mu$, le moindre comultiple de λ et n est $\lambda\mu$.

Pour obtenir le produit $N\times\lambda$, nous divisons encore le nombre N′ par n. Partageons N′ en δ tranches de μ chiffres, la dernière tranche à droite ayant toutefois $\mu+1$ chiffres. Les $\delta-1$ premières tranches, de la forme $(\lambda\lambda\ldots\lambda)_\mu$, sont divisibles par n ; on démontre comme ci-dessus, que leur quotient par n se compose de $\mu-1$ chiffres significatifs différents a, b, ..., p, q. La dernière tranche de N′ est de la forme $(\lambda\lambda\ldots\lambda0\lambda)^{\mu}_{+1}$; son quotient par n est $[ab\ldots p\,(q-1)\,q]_\mu$, c'est ce qu'on peut établir facilement comme plus haut.

Le produit $N\times\lambda$ a donc maintenant la forme

$$[ab\ldots pq\,0\,ab\ldots pq\ldots\ldots 0\,ab\ldots p\,(q-1)\,q]_n.$$

(*) D'autres produits remarquables ont été signalés par Lucas, dans la *Théorie des Nombres*, p. 28.

(**) Cette suite nous a été inspirée par la solution *Nauticus*. (L. M.).

2. Soient λ, λ' deux multiplicateurs complémentaires à N ($\lambda + \lambda' = n$) et non premiers avec n; si δ est le plus grand codiviseur de λ et n, et que $n = \delta\mu$, le moindre comultiple de λ et n est $\lambda\mu$, et celui de λ' et n est $\lambda'\mu$. Donc les deux produits $N \times \lambda$, $N \times \lambda'$ ont des périodes $0\,ab \ldots pq$, $0\,a'b' \ldots p'q'$ composées chacune de μ chiffres (*). Des égalités

$$\frac{(\lambda\lambda \ldots \lambda)_\mu}{n} = ab \ldots pq, \quad \frac{(\lambda'\lambda' \ldots \lambda')_\mu}{n} = a'b' \ldots p'q',$$

on déduit, par addition,

$$(111 \ldots 1)_\mu = ab \ldots pq + a'b' \ldots p'q';$$

donc les chiffres a et a', b et b', ... p et p' sont complimentaires à $n + 1$; q et q' sont complémentaires à $n + 2$ (**).

3. Si l'on multiple le nombre

$$P \equiv 123 \ldots (n - 2)\, n,$$

écrit dans le système à base $n + 1$, par un nombre λ inférieur à n et non premier avec n, le produit $P \times \lambda$ sera entièrement périodique et de la forme

$$(0\,ab \ldots pq\,0\,ab \ldots pq \ldots 0\;ab \ldots pq)_n.$$

4. Le nombre N renversé, c'est-à-dire le nombre

$$M \equiv n\,(n - 1)\,(n - 2) \ldots 321$$

jouit des mêmes propriétés que N. En effet, M a pour complément arithmétique le nombre P, de sorte que

$$M + P = (100 \ldots 00)_{n+1},$$
$$M \times \lambda + P \times \lambda = (\lambda 00 \ldots 00)_{n+1}.$$

Si λ est premier avec n, le produit $P \times \lambda$ s'écrit avec $(n - 1)$ chiffres significatifs inégaux $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, le chiffre manquant étant $n - \lambda$; dans ce cas

$$M \times \lambda = (\lambda 00 \ldots 00)_{n+1} - a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}$$
$$= (\lambda - 1)\, n\, (n - a_1)\,(n - a_2) \ldots (n - a_{n-2})\,(n - a_{n-1} + 1).$$

Tous les chiffres du produit $M \times \lambda$ sont différents entre eux : il en est d'abord ainsi des chiffres n, $n - a_1$, $n - a_2$, ..., $n - a_{n-2}$, qui compren-

---

(*) Pour la facilité du langage, nous appelons *période* du produit $N \times \lambda$ le nombre $0\,ab \ldots pq$. (L. M.).

(**) Une erreur s'est glissée dans la remarque III, p. 41. (L. M.).

nent le zéro ; ces chiffres ne comprennent pas le chiffre λ puisqu'aucun des nombres $a_1, a_2, \ldots$ n'est égal à $n - \lambda$; ils ne comprennent pas non plus $\lambda - 1$, puisque $n - a_{n-1} + 1$ étant égal à λ, on a $n - a_{n-1} = \lambda - 1$.

Si λ n'est pas premier avec n, le produit $P \times \lambda$ est de la forme

$$(0ab \ldots pq\, 0ab \ldots pq \ldots 0ab \ldots pq)_n, \quad \text{où} \quad q = n - \lambda + 1.$$

Si on le retranche de $(\lambda 00 \ldots 00)_{n+1}$, on obtient un nombre périodique à l'exception du premier chiffre de droite qui est égal à λ.

BIBLIOGRAPHIE.

Lezioni di Mecanica razionale di F. Castellano, Prof. nella R. Accademia militare. Torino, G. Candaletti, 1894 (509 p. in 8°).

Sommaire. Introduction (vecteur, bivecteur, trivecteur, etc.). I. *Cinématique.* 1. Mouvement, vitesse, accélération. 2. Cinématique des systèmes invariables. 3. Mouvement autour d'un point. 4. Mouvement composé. 5. Mouvement quelconque. II. *Statique et dynamique du point.* 6. Statique du point. 7-9. Dynamique du point libre ou mobile sur une ligne ou une surface. 10 Frottement. III. *Mécanique des systèmes.* 11. Systèmes ; masse. 12. Centre de gravité. 13. Moment d'inertie. 14-17. Équilibre des systèmes. Polygone funiculaire. 18-19. Dynamique des systèmes : Systèmes rigides. 20. Forces instantanées, chocs et percussions. 21. Principe des vitesses virtuelles ; équations de Lagrange.

Très bon manuel didactique, d'après un compte rendu détaillé de M. G. Peano, dans la *Rivista di Matematica* (1895, pp. 11-18) ; l'auteur a introduit dès le début les notions de vecteur, bivecteur et trivecteur en se servant des notations de Grassmann. L'emploi du calcul géométrique, que l'enseignement de M. Massau à l'Université de Gand, depuis 1878, a vulgarisé sous une autre forme, en Belgique, permet à M. Castellano d'introduire de grandes simplifications dans l'exposition des questions classiques faisant l'objet d'un cours de mécanique rationnelle.

Trattato di Aritmetica razionale, *libro di testo per i ginnasi superiori, per le scuole secondarie superiori e per gl' istituti militari,* per G. Garbieri, professore all' Università di Genova. Terza edizione migliorata. Padova, F. Sacchetto, 1894. Un volume petit in-8° de 200 pages. Prix : 2 frs.

L'auteur *désire,* dans sa préface, que l'on sache qu'il s'est efforcé de donner à son travail une forme et un cachet franchement et principalement italiens, *una forma e un' impronta schiettamente e principalmente italiana.* Par cette déclaration, il veut probablement nous faire entendre que son livre est une œuvre franchement personnelle, et non une simple compilation ou traduction d'auteurs étrangers.

Quoi qu'il en soit, le *Traité d'Arithmétique* élémentaire et purement théorique de M. Garbieri est divisé en trois parties : nombres entiers, nombres fractionnaires,

racines et proportions. Pourquoi réunir, dans une même partie, ces deux derniers sujets, qui n'ont rien de commun?

Les définitions sont soigneusement analysées et généralisées au fur et à mesure de l'exigence des théories.

Les démonstrations sont exposées avec rigueur, et, généralement, d'une manière suffisamment développée ; quelquefois, cependant, avec une concision qui évite les longueurs, mais réclame les explications du maître.

A propos de chacune des quatre opérations, l'auteur indique si elle est *distributive, commutative, associative, uniforme*.

L'auteur dit, page 204, qu'*on ne peut extraire la racine carrée d'un nombre non carré*, tel que 16/5. Et il prouve successivement qu'en effet la racine carrée de 16/5 ne peut être : 1° un nombre entier ; 2° un nombre fractionnaire. Cette démonstration nous semble superflue, la proposition énoncée n'étant qu'une conséquence immédiate de la définition de la racine carrée. Si on veut la démontrer, il suffit de dire : si un nombre non carré avait une racine carrée, le carré de cette racine serait, *par définition*, égal au nombre ; celui-ci serait donc un carré, ce qui est contre l'hypothèse.

L'auteur traite, avec un soin particulier, la théorie des fractions décimales périodiques (*f. d. p.*), à laquelle il donne des développements considérables, y consacrant jusqu'à la cinquième partie de son livre. Nous appelons donc sur ce chapitre l'attention spéciale des professeurs. L'auteur fait ressortir, par de nombreux exemples convenablement développés, la notion de *limite;* il fait voir qu'une f. d. p. ne peut avoir deux génératrices différentes; que toute f. d. p. a une limite unique, égale à la génératrice unique, lorsque celle-ci existe ; qu'il y a des f. d. p., telles que 0.5999..., qui n'ont pas de génératrice, quoi qu'elles aient une limite, etc.

Ajoutons, enfin, que les différents chapitres du traité de M. Garbieri sont accompagnés de sommaires ou questionnaires, ainsi que d'un choix intéressant d'exercices d'arithmétique théorique ou d'arithmologie.

Voici, par exemple, quelques-unes des 25 questions que l'auteur propose sur le p. g. c. d. et le p. p. c. m. : **4.** Trouver le plus grand nombre par lequel il faut diviser 8504, 4753, 3702, 3731, pour avoir respectivement les restes 8, 9, 6, 11. **5.** Dans la recherche du p. g. c. d. de deux nombres, le quotient de la dernière division ne peut être inférieur à r. **6.** Le p. g. c. d. de a et b est le même que celui de a et $a - b$ (Cette simple proposition est très utile dans la pratique.) **11.** Deux nombres consécutifs sont premiers entre eux. **12.** Deux nombres impairs consécutifs sont aussi premiers entre eux. **13.** Tout diviseur d'un nombre est premier avec le nombre suivant. **17.** Dans la recherche du p. g. c. d. de deux nombres, chaque reste est moindre que la moitié de celui qui le précède de deux rangs. **18.** Limite supérieure du nombre des divisions à effectuer pour trouver le p. g. c. d. de deux nombres... **2** Pour trouver le p. g. c. d. de trois nombres a, b, c, on peut former les c premiers multiples de a et de b : $a, 2a, 3a, \ldots, ca$; $b, 2b, 3b, \ldots, cb$, et chercher combien de fois deux nombres de même rang de cette double suite sont simultanément divisibles par c : ce nombre de fois est le p. g. c. d. cherché.

3. Pour trouver le p. g. c. d. du nombre a et du produit bc, on peut chercher le p. g. c. d. D de a et b; diviser a par D, et chercher le p. g. c. d. d du quotient q et de c: le produit Dd est le p. g. c. d de a et bc. **4.** Étendre cette règle au cas d'un nombre et d'un produit de trois ou plusieurs facteurs. **7.** Soit p un nombre premier avec a, b, c, d : si $ab - cd$ et $a - c$ sont divisibles par p, $b - d$ est aussi divisible par p. Pour la solution de quelques-unes de ces questions, l'auteur indique très brièvement la marche à suivre. (E. Gelin.)

Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques, à l'usage des candidats à la licence ès sciences mathématiques par Ch. Henry, maître de conférences à l'École pratique des Hautes études, etc. Paris, Nony et C^ie^, 1895 (126 pages in-8°) Prix : 3 francs.

Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques telle qu'elle est exposée dans la deuxième édition du *Cours d'Analyse* de M. Jordan. « Mettre en relief les idées principales, signaler nettement l'objet qu'on se propose, éviter les longues transformations algébriques qui ne servent qu'à le masquer, telle est la pensée qui a présidé à la composition de cet opuscule, d'ailleurs purement didactique. »

Voici l'indication des matières traitées. I. Généralités sur les fonctions elliptiques (périodes, transformation, théorèmes généraux). II. Les fonctions pu, ζu, σu. Addition et multiplication de l'argument de pu. — Division de l'argument et des périodes de pu. III. Les fonctions snu, cnu, dnu. IV. Les fonctions thêta et leurs relations avec pu, snu, cnu, dnu.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 884.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 240).

Soient $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ *quatre masses attachées aux sommets d'un tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$, *et soient* B_1 *le centre de gravité des masses* (μ_2, μ_3, μ_4), B_2 *celui des masses* (μ_3, μ_4, μ_1), etc.

Connaissant les points B_1, B_2, B_3, B_4 *et les masses* $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$, *déterminer le tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$.

Calculer les arêtes du tétraèdre $B_1B_2B_3B_4$, *en fonction de celles du tétraèdre* $A_1A_2A_3A_4$ *et des masses* $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$.

Solution par M. Quint. 1° Le centre de gravité G des masses $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ divise les droites B_1A_1, B_2A_2, B_3A_3, B_4A_4 respectivement dans les rapports

$$\frac{\mu_1}{\mu_2+\mu_3+\mu_4}, \quad \frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_3+\mu_4}, \quad \frac{\mu_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}, \quad \frac{\mu_4}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}.$$

On peut aussi considérer ce point comme le centre de gravité des masses

$$\mu_2+\mu_3+\mu_4,\quad \mu_2+\mu_3+\mu_4,\quad \mu_1+\mu_2+\mu_4,\quad \mu_1+\mu_2+\mu_3,$$

attachées respectivement aux points B_1, B_2, B_3, B_4; car on arrive à ce système de masses en supposant les points A_1, A_2, A_3, A_4 chargés des masses $3\mu_1$, $3\mu_2$, $3\mu_3$, $3\mu_4$ et en remplaçant ensuite les quatre groupes

$$(\mu_2, \mu_3, \mu_4),\quad (\mu_1, \mu_3, \mu_4),\quad (\mu_1, \mu_2, \mu_4),\quad (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

chacun par une masse unique.

Il résulte de là un moyen de déterminer le point G, connaissant les points B_1, B_2, B_3, B_4 et les masses μ_1, μ_2, μ_3, μ_4. Le point A_1 résulte ensuite de la proportion

$$\frac{B_1G}{GA_1}=\frac{\mu_1}{\mu_2+\mu_3+\mu_4}.$$

Les points A_2, A_3, A_4 s'obtiennent de la même manière.

2 Soient a_{rs}, b_{rs} les arêtes A_rA_s, B_rB_s des deux tétraèdres. Si C est le centre de gravité des masses μ_3, μ_4, on a les proportions

$$\frac{A_3C}{CA_4}=\frac{\mu_4}{\mu_3},\quad \frac{A_3B_1}{B_1C}=\frac{\mu_3+\mu_4}{\mu_3},\quad \frac{A_1B_3}{B_3C}=\frac{\mu_3+\mu_4}{\mu_1}.$$

Pour calculer B_1B_2 nous appliquons le théorème de Stewart aux triangles A_1B_1C, A_1A_2C, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$. En posant $A_1C=x$, $A_2C=y$, $A_1B_1=z$ et observant que $B_1C=\frac{\mu_2 y}{\mu_2+\mu_3+\mu_4}$, on trouve

$$\mu_1 z^2+\frac{\mu_2^2(\mu_3+\mu_4)}{(\mu_2+\mu_3+\mu_4)^2}y^2=(\mu_1+\mu_3+\mu_4)b_{12}^2+\frac{\mu_1(\mu_3+\mu_4)}{\mu_1+\mu_3+\mu_4}x^2,$$

$$\mu_2 a_{12}^2+(\mu_3+\mu_4)x^2=(\mu_2+\mu_3+\mu_4)z^2+\frac{\mu_2(\mu_3+\mu_4)}{\mu_2+\mu_3+\mu_4}y^2,$$

$$\mu_3 a_{13}^2+\mu_4 a_{14}^2=(\mu_3+\mu_4)x^2+\frac{\mu_3\mu_4}{\mu_3+\mu_4}a_{34}^2,$$

$$\mu_3 a_{23}^2+\mu_4 a_{24}^2=(\mu_3+\mu_4)y^2+\frac{\mu_3\mu_4}{\mu_3+\mu_4}a_{34}^2.$$

Il reste à éliminer x, y, z entre ces quatre égalités.

Pour résoudre la seconde partie, on peut d'abord chercher la formule générale de la distance de deux points M, N dont les coordonnées barycentriques sont

$$(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4),\quad (\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4).$$

Si l'on suppose

$$\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=1,$$

et qu'on représente les coordonnées cartésiennes des points A_1, A_2, A_3, A_4 par $(x_1, y_1, z_1), \ldots$, celles des points M, N sont

$$\Sigma\mu_1x_1,\quad \Sigma\mu_1y_1,\quad \Sigma\mu_1z_1;\quad \Sigma\nu_1x_1,\quad \Sigma\nu_1y_1,\quad \Sigma\nu_1z_1;$$

on en déduit, en posant $\mu_r-\nu_r=\lambda_r$,

$$\overline{MN}^2=\Sigma^2\lambda_1x_1+\Sigma^2\lambda_1y_1+\Sigma^2\lambda_1z_1,$$
$$=\Sigma\lambda_1^2(x_1^2+y_1^2+z_1^2)+2\Sigma\lambda_1\lambda_2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2).$$

Mais de

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$$

on déduit

$$\lambda_1^2=-\lambda_1\lambda_2-\lambda_1\lambda_3-\lambda_1\lambda_4,\quad \lambda_2^2=-\lambda_2\lambda_1-\lambda_2\lambda_3-\lambda_2\lambda_4,\ \text{etc.};$$

par suite

$$\overline{MN}^2=-\Sigma(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4)(x_1^2+y_1^2+z_1^2)$$
$$+2\Sigma\lambda_1\lambda_2(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)$$

En ordonnant suivant les produits $\lambda_1\lambda_2, \lambda_1\lambda_3, \ldots$, on obtient

$$\overline{MN}^2=-a_{12}^2\lambda_1\lambda_2-a_{13}^2\lambda_1\lambda_3-a_{14}^2\lambda_1\lambda_4-a_{23}^2\lambda_2\lambda_3-a_{24}^2\lambda_2\lambda_4-a_{34}^2\lambda_3\lambda_4.$$

Pour trouver δ_{12} au moyen de cette formule, nous observons que les coordonnées barycentriques des points B_1, B_2, sous la condition que la somme des coordonnées d'un point égale l'unité, sont

$$0,\ \frac{\mu_2}{\mu_2+\mu_3+\mu_4},\ \frac{\mu_3}{\mu_2+\mu_3+\mu_4},\ \frac{\mu_4}{\mu_2+\mu_3+\mu_4},$$
$$\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_3+\mu_4},\ 0,\ \frac{\mu_3}{\mu_1+\mu_3+\mu_4},\ \frac{\mu_4}{\mu_1+\mu_3+\mu_4}.$$

Nous prenons donc

$$\lambda_1=-\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_3+\mu_4},\quad \lambda_2=\frac{\mu_2}{\mu_2+\mu_3+\mu_4},$$
$$\lambda_3=\frac{\mu_3(\mu_1-\mu_2)}{(\mu_2+\mu_3+\mu_4)(\mu_1+\mu_3+\mu_4)},\quad \lambda_4=\frac{\mu_4(\mu_1-\mu_2)}{(\mu_2+\mu_3+\mu_4)(\mu_1+\mu_3+\mu_4)}.$$

(J. N.)

Question 898.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 280).

Soient P,Q *les projections d'un point* M *d'une ellipse sur les axes principaux. Trouver : 1° l'enveloppe de l'axe radical des cercles décrits sur* MP *et* MQ *comme diamètres ; 2° l'aire de cette courbe.* (E. N. Barisien.)

Solution par M. Vladimirescu. En représentant par $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$

les coordonnées de M, on trouve pour les équations des deux cercles

$$x^2 + y^2 - 2ax\cos\varphi - by\sin\varphi + a^2\cos^2\varphi = 0,$$
$$x^2 + y^2 - ax\cos\varphi - 2by\sin\varphi + b^2\sin^2\varphi = 0;$$

donc celle de leur axe radical est

$$by\sin\varphi - ax\cos\varphi = b^2\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi. \qquad (1)$$

La dérivée de cette équation par rapport à φ est

$$by\cos\varphi + ax\sin\varphi = 2(a^2 + b^2)\sin\varphi\cos\varphi. \qquad (2)$$

Les coordonnées d'un point de l'enveloppe sont donc

$$x = \frac{(2a^2 + b^2)\cos\varphi - (a^2 + b^2)\cos^3\varphi}{a},$$
$$y = \frac{(a^2 + 2b^2)\sin\varphi - (a^2 + b^2)\sin^3\varphi}{b}.$$

La différentielle de l'aire U de cette courbe est ydx ou

$$\frac{d\varphi}{ab}[(a^2 + 2b^2)\sin\varphi - (a^2 + b^2)\sin^3\varphi][3(a^2 + b^2)\cos^2\varphi\sin\varphi - (2a^2 + b^2)\sin\varphi].$$

En remplaçant $\cos^2\varphi$ par $1 - \sin^2\varphi$, on trouve pour l'aire totale U

$$\frac{4}{ab}\left[(a^2+2b^2)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi + 3(a^2+b^2)^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi d\varphi - 4(a^2+b^2)(a^2+2b^2)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi d\varphi\right].$$

Or

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi d\varphi = \frac{3\pi}{16}, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\varphi d\varphi = \frac{5\pi}{32}.$$

Donc

$$U = \frac{\pi}{8ab}(a^4 + b^4 + 10a^2b^2) = \frac{\pi c^4}{8ab} + \frac{3\pi ab}{2},$$

c'est-à-dire que l'aire est égale au tiers de l'aire de la développée de l'ellipse, plus trois fois la moitié de celle de l'ellipse.

Autre solution par M. GILLET.

L'axe radical des deux cercles (MP), (MQ) est la perpendiculaire abaissée de M sur la ligne des centres ou sur sa parallèle PQ; le second point d'intersection de ces cercles est la projection de M sur PQ. Si l'ellipse est remplacée par une circonférence, PQ, ayant une longueur constante, enveloppe une hypocycloïde à quatre

rebroussements; le point de contact de PQ est alors la projection R de M sur PQ, et la droite MR, axe radical des cercles (MP), (MQ), est la normale à l'hypocycloïde; l'enveloppe de cet axe devient la développée d'une hypocycloïde, ou une seconde hypocycloïde à quatre rebroussements.

La droite (2) joint les projections sur les axes coordonnés, d'un point de l'ellipse

$$a^2x^2 + b^2y^2 = 4(a^2 + b^2)^2; \qquad (3)$$

elle a donc pour enveloppe une développée d'ellipse. Cette droite passe par le point $(2a\cos\varphi,\ 2b\sin\varphi)$, symétrique du centre par rapport à M. Les droites (1) et (2) sont parallèles à deux diamètres conjugués de l'ellipse (3).

Si l'on représente l'équation (1) par $Ax + By = 1$, de sorte que

$$A = -\frac{a\cos\varphi}{b^2\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi},\quad B = \frac{b\sin\varphi}{b^2\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi},$$

on trouve, en éliminant φ entre les valeurs de A et B, l'équation en coordonnées tangentielles :

$$a^2b^2(A^2 - B^2)^2 = A^2b^2 + B^2a^2.$$

Question 931.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 104.)

D'un point M ***quelconque, situé sur une des diagonales du rectangle des axes d'une ellipse, on mène les tangentes à cette courbe. Soient*** t, t' ***les perpendiculaires abaissées du centre sur les tangentes; et*** n, n' ***les perpendiculaires abaissées du centre sur les normales correspondantes. Démontrer que***

$$\frac{t}{t'} = \frac{n}{n'}. \qquad (1)$$

(Barisien.)

Solution par MM. Hacken et Droz Farny. Soient (x', y'), (x'', y'') les coordonnées des points de contact M′, M″ des tangentes issues de M. Les équations de la tangente et de la normale en M′ étant

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} = 1,\quad \frac{a^2x}{x'} - \frac{b^2y}{y'} = c^2,$$

on trouve facilement

$$t = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x'^2}{a^4} + \dfrac{y'^2}{b^4}}},\quad n = \frac{c^2}{\sqrt{\dfrac{a^4}{x'^2} + \dfrac{b^4}{y'^2}}};$$

d'où

$$\frac{t}{n} = \frac{a^2b^2}{c^2x'y'}.$$

Il en résulte que l'égalité (1) exige

$$x'y' = x''y''. \tag{2}$$

Or, si M est sur l'une des diagonales du rectangle des axes, sa polaire M'M'' est parallèle à l'autre diagonale ; par suite, son équation est de la forme

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = \lambda.$$

Les coordonnées x' et y', x'' et y'' vérifient donc les équations

$$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = \lambda, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

en retranchant de la seconde égalité le carré de la première, on obtient

$$\pm \frac{2xy}{ab} = \lambda^2 - 1, \quad \text{d'où} \quad x'y' = x''y''.$$

Solutions analogues, un peu moins simples, par MM. Bovy (Liége), et Cristescu. MM. Petrescu et Jonesco cherchent le lieu des points M tels qu'on ait la relation (1) ou, ce qui revient au même, l'égalité (2). Or si (α, β) sont les coordonnées de M, les points M', M'' vérifient les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 1;$$

de celles-ci on déduit

$$x = a^2 \frac{b^2\alpha \pm \beta R}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}, \quad y = b^2 \frac{a^2\beta \mp \alpha R}{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}, \quad \text{où} \quad R = \sqrt{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 - a^2b^2}$$

Par conséquent,

$$xy = a^2b^2 \frac{a^2b^2\alpha\beta \pm (a^2\beta^2 - b^2\alpha^2) R - \alpha\beta R^2}{(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)^2};$$

pour que ces deux valeurs de xy soient égales, on doit avoir $a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 = 0$; donc le point M doit appartenir à l'une des diagonales du rectangle des axes.

Solution par M. E. Lemoine. Soient O le centre de l'ellipse et N le point de concours des normales menées aux points de contact M', M'' des tangentes issues de M. Le quadrilatère MM' NM'' est inscriptible, et la relation (1) exprime que O est sur la circonférence MM'M''. Or, on peut démontrer facilement que les angles M'MM'', M'OM'' sont supplémentaires en calculant leurs tangentes en fonction des anomalies φ, φ' des points M', M'', ces anomalies étant d'ailleurs liées par la relation $\varphi + \varphi' = \frac{1}{2}\pi$.

Solution analogue par MM. Servais et Déprez. On peut démontrer très simplement que le quadrilatère MM'OM'' est inscriptible. En effet, soit AA' le grand axe

de l'ellipse, et considérons cette courbe comme étant la projection orthogonale d'une circonférence décrite sur AA' comme diamètre. Si m, m', m'' sont les points qui se projettent en M, M', M'', les droites Om', Om'' font des angles complémentaires avec OA ; comme mm' est perpendiculaire à Om', les droites mm', Om'' sont antiparallèles par rapport à OA. Il en est de même de mm'' et Om', et par suite aussi de MM'', OM' et de MM', OM'.

M. Déprez démontre que

$$CM'.CM'' = CO.CM,$$

C étant le milieu de la corde M'M'' ; donc les points M, M', M'', O sont concycliques.

×Question 958.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 175.)

Trouver une valeur de x *qui rende l'expression*

$$(x+a^2)(x+b^2)(x+c^2)$$

carré parfait. (Thomas.)

Solution par M. Fauquembergue. I. On peut appliquer la méthode de Fermat pour résoudre en nombres rationnels l'équation

$$y^2 = a^2b^2c^2 + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)x + (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + x^3,$$

qui est de la forme

$$y^2 = \alpha^2 + \beta x + \gamma x^2 + x^3.$$

1° Supposons que la racine carrée du polynôme soit $\alpha + \frac{\beta}{2\alpha}x$; alors

$$\alpha^2 + \beta x + \gamma x^2 + x^3 = \alpha^2 + \beta x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}x^2,$$

d'où, en réduisant,

$$x = \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \gamma = \frac{(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - 4\,a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)}{4\,a^2b^2c^2}.$$

Cette valuer de x rend chaque facteur carré parfait :

$$x + a^2 = \left(\frac{a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2}{2abc}\right)^2, \quad x + b^2 = \left(\frac{b^2c^2 + b^2a^2 - c^2a^2}{2bc}\right)^2,$$

$$x + c^2 = \left(\frac{c^2a^2 + c^2b^2 - a^2b^2}{2abc}\right)^2.$$

L'expression proposée est alors le carré de

$$\frac{(a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2)(b^2a^2 + b^2c^2 - a^2c^2)(c^2a^2 + c^2b^2 - a^2b^2)}{8\,a^2b^2c^2}.$$

2° Egalons le polynôme au carré de

$$\alpha + \frac{\beta}{2\alpha}x + mx^2;$$

nous aurons

$$\alpha^2 + \beta x + \gamma x^2 + x^3 = \alpha^2 + \beta x + \left(2\alpha m + \frac{\beta^2}{4\alpha^2}\right)x^2 + \frac{\beta m}{\alpha}x^3 + m^2x^4.$$

Les deux premiers termes se détruisent, et, pour faire disparaître les termes en x^3, il suffit de faire

$$2\alpha m + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} = \gamma, \quad \text{ou} \quad m = \frac{4\alpha^2\gamma - \beta^2}{8\alpha^3}.$$

On obtient ainsi, après avoir divisé par x^2,

$$x = \frac{\alpha - \beta m}{\alpha m^2}$$

$$= \frac{8a^2b^2c^2(a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2)(c^2a^2 - a^2b^2 - b^2c^2)(b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2)}{(ab + bc + ca)^2(ab - bc - ca)^2(ca - ab - bc)^2(bc - ca - ab)^2}.$$

Cette valeur de x rend encore chaque facteur carré parfait; soit D la racine carrée du dénominateur, on trouve

$$x + a^2 = \frac{a^2[(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - 4b^2c^2(a^4 + b^2c^2)]^2}{D^2},$$

$$x + b^2 = \frac{b^2[(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - 4a^2c^2(b^4 + a^2c^2)]^2}{D^2},$$

$$x + c^2 = \frac{c^2[(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - 4a^2b^2(c^4 + a^2b^2)]^2}{D^2}.$$

3° Une solution étant désignée par $x = k$, si l'on fait $x = k + x'$, et qu'on substitue cette valeur dans l'expression proposée, celle-ci deviendra de la forme

$$\alpha' + \beta' x' + \gamma' x'^2 + x'^3,$$

dans laquelle α' sera un carré, et en appliquant les méthodes précédentes, on obtiendra deux nouvelles solutions. D'où l'on voit qu'une première valeur connue de x suffit pour en faire trouver une infinité d'autres.

II. On peut aussi se proposer de résoudre la *triple égalité*

$$x + a^2 = t^2, \quad x + b^2 = u^2, \quad x + c^2 = v^2. \qquad (1)$$

La première équation est vérifiée pour

$$x = 2ay + y^2, \quad t = a + y,$$

y étant une nouvelle indéterminée. Les deux autres deviennent alors

$$\left.\begin{aligned} b^2 + 2ay + y^2 &= u^2, \\ c^2 + 2ay + y^2 &= v^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Pour les résoudre d'après les procédés de Diophante, retranchons-les membre à membre après avoir multiplié par c^2 les deux membres de la première et par b^2 les deux membres de la seconde ; il en résulte

$$b^2v^2 - c^2u^2 = 2a(b^2 - c^2)y + (b^2 - c^2)y^2.$$

On satisfait à cette relation en posant

$$bv + cu = 2bc + \frac{bc}{a}y, \quad bv - cu = \frac{a(b^2 - c^2)}{bc}y.$$

De ces équations on tire

$$v = c + \frac{a^2b^2 + b^2c^2 - c^2a^2}{2ab^2c}y, \quad u = b + \frac{b^2c^2 + c^2a^2 - a^2b^2}{2abc^2}y.$$

En substituant la valeur de u ou de v dans une des équations (2), on obtient pour y

$$y = \frac{4ab^2c^2(a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2)}{(a^2c^2 + b^2c^2 - a^2b^2)^2 - 4a^2b^2c^4}.$$

La valeur de x qui en résulte est la même que celle qui a été trouvée par la seconde méthode de Fermat.

III. Dans les identités

$$\begin{aligned} &(A^2 + a^2)(B^2 + b^2)(C^2 + c^2) \\ &= (ABC + Abc + Bca - Cab)^2 + (BCa + CAb - ABc + abc)^2, \\ &= (ABC + Cab + Abc - Bca)^2 + (ABc + BCa - CAb + abc)^2, \\ &= (ABC + Bca + Cab - Abc)^2 + (CAb + ABc - BCa + abc)^2, \\ &= (ABC - Abc - Bca - Cab)^2 + (BCa + CAb + ABc - abc)^2, \end{aligned}$$

faisons $A = B = C = \sqrt{x}$; l'expression proposée pourra s'écrire des quatre manières suivantes :

$$\begin{aligned} &x(x + bc + ca - ab)^2 + [(a + b - c)x + abc]^2, \\ &x(x + ab + bc - ca)^2 + [(c + a - b)x + abc]^2, \\ &x(x + ca + ab - bc)^2 + [(b + c - a)x + abc]^2, \\ &x(x - bc - ca - ab)^2 + [(a + b + c)x - abc]^2. \end{aligned}$$

Elle se réduira à un carré parfait si l'on prend pour x l'une des valeurs :

$$ab - bc - ca\,,\quad ca - ab - bc\,,\quad bc - ca - ab\,,\quad ab + bc + ca\,,$$

qui annulent les premiers termes des sommes précédentes et donnent respectivement pour cette expression :

$$(a+b)^2\,(b-c)^2\,(a-c)^2\,,$$

$$(c+a)^2(a-b)^2(c-b)^2,\quad (b+c)^2(b-a)^2(c-a)^2,\quad (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2.$$

Mais pour ces valeurs de x, chaque facteur n'est plus un carré parfait.

En annulant les seconds termes, on aurait, en désignant par P le produit donné,

$$x=\frac{abc}{c-a-b},\ \dots\ P=\frac{abc}{c-a-b}\left[\frac{(a+b)(b-c)(a-c)}{c-a-b}\right]^2,$$

$$x=\frac{abc}{b-a-c},\ \dots\ P=\frac{abc}{b-a-c}\left[\frac{(a+c)(a-b)(c-b)}{b-a-c}\right]^2,$$

$$x=\frac{abc}{a-b-c},\ \dots\ P=\frac{abc}{a-b-c}\left[\frac{(b+c)(b-a)(c-a)}{a-b-c}\right]^2,$$

$$x=\frac{abc}{a+b+c},\ \dots\ P=\frac{abc}{a+b+c}\left[\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c}\right]^2.$$

Si les valeurs de a, b, c étaient telles que les expressions $\frac{abc}{c-a-b}$, $\frac{abc}{b-a-c}$, etc. fussent des carrés, les valeurs correspondantes de P seraient aussi carrés parfaits.

Solutions partielles par MM. Fairon (Seraing), Jonesco et Cristescu.

ˣQUESTIONS D'EXAMEN.

676. Résoudre le système

$$x^2 + x^2y^2 + y^2 = 49,\quad x + xy + y = 11.$$

677. Résoudre et construire le triangle isoscèle dont on donne le périmètre $2p$ et la hauteur h.

678. A une sphère de rayon R on inscrit un cône dont l'angle au sommet est égal à α. — Trouver la surface latérale et le volume de ce cône.

679. Résoudre un triangle ABC, connaissant l'angle A et les sommes $b+c$, b^2+c^2.

680. Calculer l'angle sous lequel se coupent les lignes représentées par les équations

$$y^2 = 6x, \quad y = -3x + 12.$$

681. Décomposer la fraction $\frac{101}{110}$ en deux autres ayant pour dénominateurs 5 et 22.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1010. Sur la normale en un point X d'une ellipse (E) on porte des longueurs XP et XQ égales au demi-diamètre parallèle à la tangente en X. Par les points P et Q on fait passer deux cercles dont les centres sont situés respectivement sur les diamètres passant par P et Q. La tangente en X rencontre ces deux cercles en deux couples de points M, M′ et N, N′. Si le point X varie sur (E), l'un des couples décrit une ellipse, l'autre une hyperbole. Ces deux courbes et l'ellipse (E) sont confocales. (Cl. Servais.)

1011. Par un point quelconque M d'une parabole on mène deux cordes MA, MB, parallèles chacune à une direction donnée. 1° La corde AB enveloppe une parabole ; 2° Le lieu du centre de gravité du triangle MAB est une parabole. (E. N. Barisien.)

×**1012.** Résoudre le système

$$\operatorname{tg}(y + x) = 4 \sin x + 2 \cos x,$$
$$\operatorname{tg}(y - x) = 4 \sin x - 2 \cos x. \qquad \text{(J. Jonesco.)}$$

1013. On donne dans un même plan une ellipse O et un cercle (C) ; soient P un point quelconque de l'ellipse, F l'un des foyers, et M, N les points où la circonférence décrite de P comme centre avec PF comme rayon coupe la circonférence (C). Démontrer que : 1° Les centres de similitude S, S′ des cercles (C) et (P) décrivent des coniques ; 2° le centre du cercle OMN décrit une conique ; 3° l'axe radical des cercles (C) et (P) enveloppe une conique ; 4° les polaires de S et S′ par rapport au cercle (P) enveloppent des coniques. 5° L'enveloppe du cercle OMN est une podaire de conique. (Déprez.)

PROPRIÉTÉS CONCERNANT LES TRIANGLES D'AIRE MAXIMUM INSCRITS DANS L'ELLIPSE;

(Voir *Mathesis*, (2), V, p. 42.)

A) par M. DÉPREZ, professeur à Charleroi(*).

1. Etant donné un triangle T d'aire maximum inscrit à une ellipse, on prend le symétrique de l'orthocentre par rapport au centre du cercle circonscrit et on projette ce point sur les axes de l'ellipse : les deux projections sont séparées harmoniquement par le point de Steiner du triangle et l'anticomplémentaire du point de Lemoine.

2(**). Le point de Lemoine de T décrit l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^4}{4(a^2+b^2)^2}.$$

Si φ est l'anomalie d'un sommet de T, les coordonnées du point de Lemoine sont

$$-\frac{ac^2\cos 3\varphi}{2(a^2+b^2)^2},\qquad -\frac{bc^2\sin 3\varphi}{2(a^2+b^2)}.$$

3. Le réciproque de l'orthocentre de T parcourt l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{c^4}{(a^2+b^2)^2}.$$

4. Le centre du cercle des neuf points de T décrit l'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2=\frac{c^4}{64}.$$

5. Le centre du cercle de Longchamps se meut sur l'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2=c^4.$$

(*) M. Déprez, en nous envoyant la solution de la question 767, dont l'énoncé se trouve rectifié dans le n° 1 de son article, nous avait communiqué la plupart des autres propriétés que nous publions aujourd'hui.

M. Cristescu nous fait remarquer que la proposition n° 26 de l'article de M. Barisien, ou la question 940 de *Mathesis*, se rencontre dans les *Exercices de Köhler*, t. I, p. 216. (J. N.).

(**) Les propriétés 2, 11 de l'article de M. Déprez, et 11, 12, 20 de celui de M. Barisien nous ont été signalées également par M. Tzitzéica. Nous publions ci-après des propriétés nouvelles dues à notre honorable correspondant de Bucharest.

6. La droite de Lemoine enveloppe l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2(a^2+3b^2)^2}+\frac{y^2}{b^2(b^2+3a^2)^2}=\frac{1}{4c^4}.$$

L'équation de cette droite est

$$\frac{x\cos 3\varphi}{a(a^2+3b^2)}+\frac{y\sin 3\varphi}{b(b^2+3a^2)}+\frac{1}{2c^2}=0.$$

7. L'axe orthique de T enveloppe l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(a^2+b^2)^2}{4c^4}.$$

8. L'axe radical du cercle des neuf points et du cercle de Brocard enveloppe l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}=\frac{1}{c^4}.$$

9. Le diamètre de Brocard est représenté par

$$\frac{by(3a^2+b^2)}{\sin 3\varphi}-\frac{ax(3b^2+a^2)}{\cos 3\varphi}=\frac{c^4}{2}.$$

Il est constamment normal à une certaine ellipse. (Voir *Mathesis*, (2), V, p. 8).

10. L'enveloppe du cercle des neuf points est la quartique

$$[8(x^2+y^2)-(a^2+b^2)]^2=4c^4\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

11. Le cercle de Brocard enveloppe la quartique

$$[8(a^2+b^2)(x^2+y^2)-c^4]^2=4c^8\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

12. La droite qui joint le point de Steiner à l'anticomplémentaire du point de Lemoine a pour équation

$$\frac{ax}{\cos 3\varphi}+\frac{by}{\sin 3\varphi}=c^2.$$

Elle est constamment normale à l'ellipse donnée.

13. La droite joignant le point de Steiner au point de Tarry a pour équation

$$\frac{ax(3b^2+a^2)}{\cos 3\varphi}+\frac{by(3a^2+b^2)}{\sin 3\varphi}=a^4-b^4.$$

Elle est normale à une ellipse fixe.

14. La droite de Simson du point de Steiner a pour équation

$$\frac{ax\,(3b^2+a^2)}{\cos 3\varphi}-\frac{by\,(3a^2+b^2)}{\sin 3\varphi}=(a^2+b^2)^2.$$

Elle est normale à une ellipse fixe.

15. La normale à l'ellipse au point de Steiner du triangle T passe par le symétrique de l'orthocentre par rapport au centre de gravité (Théorème connu).

16. Nous indiquons encore les équations du cercle circonscrit à T, du cercle des neuf points et du cercle de Brocard :

$$x^2+y^2-\frac{c^2\cos 3\varphi}{2a}x-\frac{c^2\sin 3\varphi}{2b}y-\frac{a^2+b^2}{2}=0;$$

$$x^2+y^2+\frac{c^2\cos 3\varphi}{4a}x+\frac{c^2\sin 3\varphi}{4b}-\frac{a^2+b^2}{8}=0;$$

$$x^2+y^2+\frac{c^4\cos 3\varphi}{4a\,(a^2+b^2)}x-\frac{c^4\sin 3\varphi}{4b\,(a^2+b^2)}y-\frac{c^4}{8\,(a^2+b^2)}=0.$$

B) par M. Tzitzéica (Bucharest).

Les notations sont celles de M. Barisien.

1. L'hyperbole d'Apollonius relative à l'orthocentre H de T est aussi l'hyperbole de Kiepert de T ; elle a pour équation

$$2xy+b\sin\varphi\,.\,x+a\cos\varphi\,.\,y=0.$$

2. Les centres isogones V, V′ de T ont pour coordonnées

$$-\frac{c^2\cos 3\varphi}{2(a\pm b)},\quad \mp\frac{c^2\sin 3\varphi}{2(a\pm b)};$$

ils décrivent les circonférences

$$x^2+y^2=\frac{c^4}{4(a\pm b)^2}.$$

3. Les points V, V′ sont conjugués par rapport à l'hyperbole

$$x^2-y^2=\frac{c^2}{4}.$$

4. La droite VV′ passe par le point de Lemoine, par le centre de l'hyperbole de Kiepert et par les projections de l'orthocentre sur les axes de l'ellipse.

5. La polaire du point de Steiner, par rapport au cercle de Brocard de T, passe par le centre de gravité de T.

ARTHUR CAYLEY (1821-1895).

Arthur Cayley, le grand mathématicien que l'Angleterre vient de perdre, est né à Richmond (Surrey), le 16 août 1821.

Après avoir fait des études classiques dans une école privée à Blackhead et à King's College School à Londres, il entra à Trinity College, à Cambridge, à l'âge de 17 ans. Il y fit de brillantes études et, en 1842, il fut *Senior Wrangler* et *First Smith's Prizeman*. Il fut élu *Fellow* de Trinity College la même année et il fut Assistant Tutor de ce Collège pendant trois ans environ.

Peu de temps après, il entra au barreau, mais sans cesser de cultiver les mathématiques où il fit dès lors de brillantes découvertes.

En 1863, il abandonna la belle carrière juridique qui s'ouvrait devant lui pour occuper la chaire de *Sadlerian Professor*, qui venait d'être créée à l'université de Cambridge. Il fit, à cette université, pendant de longues années, des cours sur les sujets les plus variés, sans jamais donner deux fois les mêmes leçons; il prenait pour sujet de son enseignement les recherches dont il était occupé au moment où il faisait son cours. A cause de cette circonstance, ses leçons étaient difficiles à suivre pour ceux qui n'y étaient pas préparés par des études antérieures.

En 1882, il fit un cours temporaire à l'université de John Hopkins à Baltimore.

Cayley était un algébriste incomparable. Grâce à sa prodigieuse facilité dans le maniement des symboles, il pouvait retrouver, par une voie personnelle, les résultats auxquels étaient arrivés d'autres mathématiciens, rien qu'en s'assimilant leurs notations et les propositions nouvelles contenues dans leurs mémoires.

Cayley a fait paraître un seul ouvrage, une *Théorie des fonctions elliptiques*, d'après Legendre et Jacobi (*); mais il a écrit plus de 800 mémoires ou notes dont l'université de Cambridge a entrepris la publication en 1889, sous la direction de l'auteur lui-même (**). Sept volumes

---

(*) *An Elementary Treatise on Elliptic Functions* by ARTHUR CAYLEY, Sadlerian Professor of Pure Mathematics in the University of Cambridge. Cambridge : Deighton, Bell, and Co. London : Bell and Sons. 1876. (All Rights reserved.). M. Brioschi a publié une traduction italienne de cet ouvrage.

(**) *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley*. Cambridge, University Press.

in-4° de 600 pages contenant 585 articles ont déjà paru. Les mémoires restants rempliront encore quatre à cinq volumes.

Les travaux de Cayley se rapportent à presque toutes les branches des mathématiques : Théorie des nombres, Algèbre, Analyse infinitésimale, Géométrie analytique, Astronomie. En Algèbre, il est l'un des créateurs de l'invariantologie; en Analyse, il a déduit, l'un des premiers, avec rigueur, la théorie des fonctions elliptiques, de la considération des produits doublement périodiques; en Astronomie, il a prouvé, par une méthode indépendante, l'exactitude de la valeur donnée par Adams pour l'accélération séculaire du moyen mouvement de la lune(*).

Cayley était membre ou associé des principales Académies de l'Europe. Il avait une intelligence large et un caractère décidé. Il est mort le 26 janvier 1895 (D'après une notice de M. J. W. L. Glaisher, dans *The Cambridge Review*, Vol. XVI, n° 398, 7 février 1895, pp. 174-176(**)). (P. M.)

×NOTES MATHÉMATIQUES.

×**3**. *Note sur le triangle.* Posons

$$p_a = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}, \quad p_b = \frac{c^2+a^2-b^2}{2}, \quad p_c = \frac{a^2+b^2-c^2}{2},$$

$$P = \frac{a^2+b^2+c^2}{2};$$

les quantités p_a, p_b, p_c, P se présentent fréquemment dans les formules relatives au triangle.

Si H_a, H_b, H_c, H sont les pieds des hauteurs et l'orthocentre, on a

$$p_a = AH_b \cdot b = AH_c \cdot c = AH.AH_a, \text{ etc.}$$

On peut aussi remarquer que

$$p_a = bc\cos A, \quad p_b = ca\cos B, \quad p_c = ab\cos C, \quad P = p_a + p_b + p_c;$$

(*) C'est Cayley qui le premier, en 1859, a trouvé, en géométrie euclidienne, les propriétés des coniques et des quadriques qui sont la traduction de propriétés toutes différentes des distances et des angles en géométrie non euclidienne.

(**) Voir dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. CXX, n° du 4 février 1895, pp. 233-234, une *Notice sur Cayley*, par M. Hermite, et dans ceux de l'Académie royale des *Nuovi Lincei*, séance du 3 mars 1895, pp. 177-185, une autre due à M. Brioschi, où l'œuvre mathématique de l'illustre géomètre anglais est apprécié d'une manière plus détaillée.

de là,

$$P^2 + p_a^2 + p_b^2 + p_c^2 = a^4 + b^4 + c^4,$$

$$\frac{ap_a}{\cos A} = \frac{bp_b}{\cos B} = \frac{cp_c}{\cos C} = abc = 4SR, \quad \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B} = \frac{p_b}{p_c},$$

$$S = \tfrac{1}{2}\sqrt{p_a p_b + p_b p_c + p_c p_a}.$$

Si l'on appelle P la *puissance* totale, et p_a, p_b, p_c les *puissances partielles* du triangle ABC, on peut énoncer les propositions suivantes :

1° Les triangles de même surface et de même puissance totale ont même angle de Brocard; la somme des carrés des inverses des rayons des cercles tritangents est constante.

2° Si l'on donne les sommets B, C d'un triangle et la puissance p_a ou p_b, le sommet A décrit respectivement une circonférence ou une perpendiculaire à BC.

3° Tous les triangles qui sont inscrits à une même circonférence et qui ont même centre de gravité (ou même orthocentre) ont aussi même puissance totale.

4° Si l'on donne l'angle A en grandeur et en position, et si la puissance partielle p_a est constante, le côté BC enveloppe une hyperbole.

5° A une circonférence donnée, on inscrit des triangles ABC ayant même sommet A et même puissance partielle p_a; les hauteurs BH_b, CH_c enveloppent une même parabole de foyer A, et le côté BC enveloppe une conique. (D'après D. Juan y Duran Loriga).

On peut rapprocher ces développements de la question 968 de *Mathesis*.

×4. *Vocabulaires mathématiques*. Nous avons proposé à l'*Association française pour l'avancement des sciences*, dans son Congrès de Caen, le vœu qu'il soit publié un *vocabulaire français-anglais-italien-allemand* des termes de mathématiques.

Les première et deuxième sections de l'Association, après une discussion approfondie, à laquelle ont pris part un grand nombre de membres, ont voté la résolution suivante : Elles « approuvent absolument l'idée de M. Mansion, relative à la rédaction de *Vocabulaires mathématiques* et applaudissent au commencement de réalisation que M. le commandant Brocard a déjà donné à cette idée, par la préparation d'un vocabulaire mathématique français. »

M. le professeur F. Müller de Berlin nous écrit qu'il vient de terminer un vocabulaire allemand auquel il a travaillé pendant plus de vingt ans. Ce vocabulaire comprend environ 5500 mots, sans la table des

noms. Chaque mot est suivi de l'indication de la partie des mathématiques où on le rencontre principalement, de la définition ou d'indications bibliographiques qui permettent de la retrouver, d'une notice historique et enfin de renvois au *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, que M. Müller a fondé, il y a 25 ans, avec le regretté C. Ohrtmann. (P. M.).

5. *Constructions linéaires du centre de courbure des podaires*, par M. M. d'Ocagne. — Soit (M) la podaire de la courbe (A) pour le pôle O. On sait que si la normale en M à la courbe (M) coupe la normale en A à la courbe (A) au point N, la figure OMAN est un rectangle. Il s'agit maintenant de lier, par un tracé *linéaire*, le centre de courbure μ de la courbe (M) au centre de courbure α de la courbe (A). Voici deux tels tracés d'une extrême simplicité :

1° Si la perpendiculaire élevée en N à MN coupe OM au point H, la droite qui joint le point H au milieu I de Oα passe par le centre de courbure μ.

2° Si on abaisse du point α la perpendiculaire αK sur OA et du point K la perpendiculaire KL sur AN, la droite OL passe par le point μ.

Ces constructions sont à rapprocher de celles qui ont été données par M. Husquin de Rhéville dans les N. A. M. (1890, p. 142) et par M. Massau dans son cours de Mécanique.

Le lecteur pourra s'exercer à ramener ces diverses constructions les unes aux autres.

×6. *Quadrature approchée du cercle* (communiquée par M. Postula). Soit AB un diamètre quelconque d'un cercle. Divisons le rayon CA en six parties égales; G étant le premier point de division à partir de C ($CG = \frac{1}{6} CA$), décrivons de ce point comme centre avec un rayon égal à 2AB une circonférence, qui coupe en F la tangente menée en B. La droite AF rencontre la circonférence en un point D; menons la corde BD, ce sera le côté d'un carré sensiblement égal au cercle.

En effet, si l'on prend le rayon pour unité, on a successivement :

$$BF = \sqrt{16 - \left(\frac{7}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{527}}{6}; \quad AF = \sqrt{4 + \overline{BF}^2} = \frac{\sqrt{671}}{6};$$

$$BD \times AF = BA \cdot BF; \quad \text{d'où} \quad \overline{BD}^2 = \frac{4 \times 527}{671} = 3{,}141579\ldots$$

SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ;

par L. DESAINT.

1. La *Nouvelle Correspondance mathématique* a proposé sous les nos 430 et 431 (t. IV, année 1878) les deux questions suivantes (*) dont on n'a pas encore publié de solution :

430. *Si l'on considère le lieu du centre de gravité* G *d'un arc d'une courbe donnée* A, *compris entre un point fixe* A *et un point variable* P *de* A, *la tangente en* G *à ce lieu passe par* P. (E. CÉSARO.)

431. *Si l'on considère le lieu du centre de gravité* G_1 *du segment compris entre une courbe donnée* Δ *et une corde* AP *dont l'extrémité* A *est fixe et l'extrémité* P *mobile sur* Δ, *la tangente en* G_1 *à ce lieu divise la corde* AP *dans le rapport* 2 : 1. (E. CATALAN.)

Pour démontrer ces propositions, donnons à l'arc AP un accroissement PP'; soient g le centre de gravité de l'arc PP', g_1 celui de l'aire comprise entre cet arc et les vecteurs AP, AP'. Le centre de gravité G' de l'arc APP' est situé sur la droite Gg; le centre de gravité de l'aire APP' est sur la droite G_1g_1. Si l'on fait tendre P' vers P, les droites Gg, G_1g_1 auront respectivement pour limites la tangente en G à la courbe (G) et la tangente en G_1 à la ligne (G_1). Mais g tend vers P, g_1 vers le centre de gravité d'un triangle APP' dont la base PP' est infiniment petite ou vers le point N qui divise AP dans le rapport 2 : 1; donc les tangentes aux deux courbes sont les droites GP, G_1N.

2. La proposition suivante se démontre de la même façon :

On considère une surface quelconque S, *un plan fixe* P *et un plan variable* Q *de direction constante, qui coupe* S *suivant une courbe* C. *Soient* I *le centre de gravité de l'aire de la section* C, *et* G *le centre de gravité du volume compris entre les plans* P, Q *et la surface* S. *Quand* Q *se déplace, le lieu de* G *est une courbe dont la tangente au point* G *passe par* I.

3. On peut généraliser ainsi le théorème précédent : Étant données une surface fixe S, et une seconde surface Σ qui varie en restant toujours parallèle à elle-même; si ces deux surfaces limitent un volume ayant pour centre de gravité G, la tangente à la courbe décrite par G passe par le centre de gravité de la portion de la surface Σ qui est délimitée par S.

(*) Nous modifions légèrement les énoncés de ces théorèmes.

BIBLIOGRAPHIE.

Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes de droites (Complexes, congruences, surfaces réglées), par A. DEMOULIN, répétiteur à l'Université de Gand. Bruxelles, Castaigne; Paris, Nony et Cie, 1894. (In-8° de VI-118 pages). Prix fr. 3,50.

Voici un petit livre dont la lecture se recommande à tous ceux qui veulent s'initier à la géométrie vectorielle et à la géométrie de l'espace réglé.

Dans une introduction de 30 pages, l'auteur expose, d'après M. Massau, les principes de la méthode vectorielle : sommes et différences géométriques, équations géométriques, équations de projection, produits géométriques, moments géométriques(*), coordonnées vectorielles, fonctions géométriques, analyse infinitésimale des fonctions géométriques, théorie de la ligne droite, coordonnées tétraédriques de la droite.

Le mémoire proprement dit est consacré à l'étude de divers systèmes de droites, étude dans laquelle l'auteur se sert systématiquement des produits géométriques et des moments géométriques. Qu'il nous suffise de donner le sommaire de ces recherches intéressantes.

Section I. Etude d'un complexe linéaire. Sur les courbes dont les tangentes font partie d'un complexe linéaire, ou d'un complexe quelconque, et, en particulier, d'un complexe tetraédral. Sur la surface réglée, lieu des droites communes à trois complexes linéaires.

Section II. Sur la surface réglée, lieu des axes centraux des complexes linéaires passant par quatre droites données. Sur la congruence, lieu des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données. Sur le complexe, lieu des axes centraux des complexes linéaires passant par deux droites données.

Section III. Complexe des droites perpendiculaires à leurs conjuguées. Complexe des droites qui font avec leurs conjuguées un angle constant, non droit. Complexe des droites dont la plus courte distance à la conjuguée est constante. Complexe des droites dont le moment par rapport à la conjuguée est constant.

Appendice. Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires.

Cours de géométrie analytique à l'usage des élèves de la Classe de Mathématiques spéciales et des Candidats aux Écoles du Gouvernement, par B. NIEWENGLOWSKI, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée Louis-le-Grand.

Tome I. Sections coniques, 1894. Grand in-8° de VI-483 pages. Prix : 10 francs.
Tome II. Construction des courbes planes. Compléments relatifs aux coniques, 1895 (292 pages). Prix : 8 francs.

(*) La représentation géométrique du moment géométrique de deux vecteurs au moyen d'un troisième vecteur se rencontre déjà dans les *Vorlesungen ueber die complexen Zahlen*, de Hankel (1867).

« Ce Cours, dit l'auteur dans l'Avant-Propos, comprend tout ce qui est exigé des candidats à l'École Polytechnique où à l'École Normale, relativement à la Géométrie analytique; il contient davantage. Les élèves qui se préparent à subir les épreuves d'un concours difficile sont obligés d'apprendre plus que le *programme*, en vertu de cet adage : *qui peut le plus, peut le moins.* » Tout en réservant la prédominance aux coordonnées cartésiennes, M. Niewenglowski a fait une place importante aux coordonnées cartésiennes homogènes, aux coordonnées trilinéaires et aux coordonnées tangentielles. Chaque chapitre est terminé par quelques exercices, qui sont des applications immédiates ou des compléments utiles.

Pour donner une idée des matières traitées dans ces leçons, nous allons reproduire les titres des chapitres, en indiquant parfois entre parenthèses, des questions spéciales sur lesquelles nous attirons l'attention de nos lecteurs.

Tome I. — I. Préliminaires (Principe d'homogénéité, construction des formules, segments, angles, théorie des projections sur un axe, produit géométrique, systèmes de coordonnées). II. Ligne droite (Centre de gravité, transversales, division harmonique, rapport anharmonique, quadrilatère complet, triangles homologiques. Points et droites imaginaires). III. Coordonnées homogènes, coordonnées trilinéaires. IV. Invariants. V. Faisceaux de droites. VI. Cercle (Points cycliques, cercles orthogonaux, inversion, cercle en coordonnées trilinéaires). VII. Lieux géométriques (Remarques sur les solutions étrangères). VIII. Courbes du second degré (Application des formes quadratiques à la classification des coniques et à la réduction de l'équation du second degré). IX. Théorie du centre. X. Théorie des diamètres (Équation en S, involution). XI. Réduction de l'équation du second degré, avec des axes rectangulaires (Trois méthodes : par l'équation en S, par la transformation des coordonnées, par l'emploi des invariants). XII. Longueur des axes d'une conique. Théorèmes d'Apollonius. XIII. Figures homothétiques. Figures semblables. XIV. Théorie des tangentes et des normales (Définition des points multiples dans les courbes algébriques et application aux coniques. Théorie générale des tangentes. Équation tangentielle d'une conique. Détermination géométrique des tangentes à quelques courbes. Déplacement d'une figure plane de forme invariable. Usage des infiniment petits dans la construction des tangentes. Méthode des transversales réciproques). XV. Théorie des enveloppes (Développées). XVI. Pôles et polaires (Théorème de Frégier). XVII. Courbes polaires réciproques. XVIII. Coniques passant par des points donnés ou tangentes à des droites données (coniques circonscrites ou inscrites à un triangle ou à un quadrilatère; coniques conjuguées par rapport à un triangle). XIX. Théorie des foyers (cercles focaux, foyers en coordonnées tangentielles, coniques homofocales). XX. Sécantes communes à deux coniques (Équation en λ, invariants relatifs à l'équation en λ, recherche des ombilics de deux coniques données, coniques bitangentes à deux coniques données).

Tome II. — I. Sens de la concavité d'un arc de courbe plane. Points d'inflexion. II. Classification des points multiples d'une courbe algébrique. III. Courbure. Rayon de courbure. IV. Étude d'une courbe algébrique dans le voisinage de l'un

de ses points. V. Théorie des asymptotes rectilignes (Étude des points à l'infini. Méthode de Painvin; méthode de Newton). VI. Théorèmes de Newton, de Mac-Laurin, de Carnot. VII. Construction de courbes en coordonnées rectilignes. (Équations résolues. — Équations non résolues. Méthode des régions). VIII. Courbes unicursales. IX. Étude de quelques courbes remarquables. (Cubiques unicursales. Limaçon de Pascal. Ovales de Cassini. Quartiques bicirculaires. Hypocycloïde à trois rebroussements). X. Coordonnées polaires. (Tangentes et normales. Sens de la concavité. Inversion. Conchoïdes. Étude de quelques courbes remarquables). XI. Ellipse (Développée. Hyperbole d'Apollonius relative à un point. Cercle de Joachimsthal. Formules de Desboves. Anomalie excentrique). XII. Hyperbole (Équations paramétriques). XIII. Parabole. XIV. Propriétés focales des coniques; tracés qui en résultent. XV. Détermination d'une conique (Méthode à suivre pour trouver l'équation du lieu d'un point remarquable d'une conique assujettie à quatre conditions Théorèmes de Pascal, de Brianchon, de Desargues; applications). XVI. Résolution graphique des équations. XVII. Application des imaginaires à la géométrie analytique (Notions sur la méthode des équipollences).

Ce sommaire montre que l'ouvrage de M. Niewenglowski est aussi complet qu'on peut le désirer(*). Ajoutons que la rédaction est très claire; on pourrait même désirer plus de concision. L'auteur s'est attaché à développer les idées générales, en vue des études ultérieures de ses lecteurs. Par exemple, il insiste longuement sur la règle des signes des segments, des angles, des projections, des aires, des distances; il entre dans des détails sur les éléments imaginaires et sur les éléments à l'infini. Les méthodes symétriques ont eu la préférence pour faciliter le passage à la Géométrie dans l'espace. Les *discussions* sont faites très minutieusement.

Le cours de M. Niewenglowski nous semble répondre à tous les besoins de l'enseignement de la Géométrie analytique en France. Quoiqu'il s'éloigne des habitudes de cet enseignement chez nous, nous le recommandons volontiers à nos collègues et aux élèves des établissements belges; ils pourront le consulter avec fruit. (J. N.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

×Question 835.

(Voir *Mathesis*, (2) III, p. 104.)

Éliminer x, y, z entre les équations

$$yz(1-2x)=\alpha^2(1-x),\quad zx(1-2y)=\beta^2(1-y),$$
$$xy(1-2z)=\gamma^2(1-z),\quad x+y+z=1. \quad \text{(D. Besso.)}$$

Solution par M. Fauquembergue. Pour obtenir des équations symétriques en x, y, z nous formerons les quantités $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$,

(*) On a imprimé en petit texte les questions qui ne font pas partie des programmes.

$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$, $\alpha^2\beta^2\gamma^2$, que nous désignerons respectivement par A, $\frac{1}{B}$, C. Nous désignerons aussi par P la somme $xy+yz+zx$ et par Q le produit xyz.

Les trois premières équations donnent

$$\alpha^2=yz\left(1-\frac{x}{1-x}\right),\quad \beta^2=zx\left(1-\frac{y}{1-y}\right),\quad \gamma^2=xy\left(1-\frac{z}{1-z}\right).$$

On en déduit, en tenant compte de la quatrième équation,

$$A=P-Q\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{1-z}\right)=P-Q\cdot\frac{P+1}{P-Q}$$

ou

$$A=\frac{P^2-2PQ-Q}{P-Q};\qquad (1)$$

$$\frac{1}{B}=\frac{1}{Q}\left[1+\frac{x^2}{1-2x}+\frac{y^2}{1-2y}+\frac{z^2}{1-2z}\right],$$

$$\frac{1}{B}=\frac{2}{4P-8Q-1};\qquad (2)$$

$$C=\frac{Q^2(1-2x)(1-2y)(1-2z)}{(1-x)(1-y)(1-z)}=\frac{Q^2(4P-8Q-1)}{P-Q}$$

ou

$$C=\frac{2BQ^2}{P-Q}.\qquad (3)$$

Il reste à éliminer P et Q entre ces trois équations.

Or, les équations (1) et (2) peuvent s'écrire

$$(4)\qquad P(P-2Q)-Q=A(P-Q),\qquad 4(P-2Q)=2B+1,\qquad (5)$$

d'où en éliminant P − 2Q,

$$(4A-2B-1)P=4(A-1)Q.\qquad (6)$$

Puis, de (5) et (6) on tire

$$P=\frac{(2B+1)(A-1)}{2(2B-2A-1)},\quad Q=\frac{(2B+1)(4A-2B-1)}{8(2B-2A-1)}.$$

Ces valeurs de P et Q substituées dans (3) donnent pour résultat de l'élimination de x, y, z entre les équations proposées :

$$B(2B+1)(4A-2B-1)^2=4C(2B-3)(2B-2A-1).$$

Si l'on remplaçait A, B, C par les valeurs qu'elles représentent, on obtiendrait une relation du 20ième degré en α, β, γ.

Parthenay, 28 décembre 1894.

×Question 891.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 264).

Etant donnés un polygone ABC ... KL *et des nombres positifs* α, β, γ, ..., $\varkappa$, λ *moindres que l'unité, on déduit, d'un point quelconque* L_0 *du plan, la suite des points* A_1, B_1, C_1, ..., K_1, L_1 *en prenant sur la droite* AL_0 *le segment* $AA_1 = \alpha . AL_0$, *sur la droite* BA_1 *le segment* $BB_1 = \beta . BA_1$, *sur la droite* CB_1 *le segment* $CC_1 = \gamma . CB_1$, *etc. Le même procédé étant appliqué au point* L_1, *on obtient une seconde suite de points* A_2, B_2, ..., K_2, L_2; *le point* L_2 *conduit à une troisième suite* A_3, B_3, ..., L_3, *etc.*

Démontrer que les points A_n, B_n, ..., L_n *tendent vers des positions-limites* A', B', ..., L'. *Etant donnés les nombres* α, β, ..., λ *et l'un des polygones* AB...L, A'B'...L', *comment peut-on trouver l'autre?* (*) (J. N.)

Solution d'après M. Absolonne. L_1 est le centre des distances proportionnelles des points L_0, A, B, ..., L pour des coefficients faciles à déterminer. En effet, comme

$$\frac{A_1A}{A_1L_0} = -\frac{\alpha}{1-\alpha},$$

les coefficients de L_0, A sont α, $1-\alpha$ et celui de A_1 est 1. De ce que

$$\frac{B_1A_1}{B_1B} = -\frac{1-\beta}{\beta} = -\frac{\frac{1}{\beta}-1}{1},$$

il résulte que les coefficients de B, B_1 sont $\frac{1}{\beta}-1, \frac{1}{\beta}$. La proportion

$$\frac{C_1B_1}{C_1C} = -\frac{1-\gamma}{\gamma} = -\frac{\frac{1}{\gamma\beta}(1-\gamma)}{\frac{1}{\beta}}$$

montre que les coefficients de C, C_1 sont $\frac{1}{\beta\gamma}(1-\gamma), \frac{1}{\beta\gamma}$. En continuant

(*) Cette question nous a été suggérée par la question n° 3206 du Journal de Vuibert (janvier 1894). Elle a été traitée complètement par M. Absolonne; nous simplifions un peu la solution de notre honorable correspondant. (J. N.).

ainsi, on trouve que L_1 est le centre des distances proportionnelles des points

$$L_0,\quad A,\quad B,\quad C,\quad \ldots,\quad K,\quad L$$

pour les coefficients

$$\alpha,\quad 1-\alpha,\quad \frac{1-\beta}{\beta},\quad \frac{1-\gamma}{\beta\gamma},\quad \ldots,\quad \frac{1-\varkappa}{\beta\gamma\ldots\varkappa},\quad \frac{1-\lambda}{\beta\gamma\ldots\lambda},$$

le coefficient de L_1 lui-même étant $\dfrac{1}{\beta\gamma\ldots\lambda}$.

On sait que ce même point L_1 s'obtient en construisant d'abord le centre X des distances proportionnelles des points

$$A,\ B,\ C,\quad \ldots,\quad L$$

pour les coefficients

$$1-\alpha,\ \frac{1-\beta}{\beta},\ \frac{1-\gamma}{\beta\gamma},\quad \ldots,\quad \frac{1-\lambda}{\beta\gamma\ldots\lambda}, \tag{1}$$

puis partageant la distance L_0X dans le rapport des coefficients des points X, L_0; donc

$$\frac{L_1L_0}{L_1X} = -\frac{\dfrac{1}{\beta\gamma\ldots\lambda}-\alpha}{\alpha},\quad \text{d'où}\quad XL_1 = \alpha\beta\ldots\lambda\,.\,XL_0.$$

Par analogie, les points L_2, L_3, ... sont situés sur la droite XL_0 et l'on a

$$XL_2 = \alpha\beta\ldots\lambda\,.\,XL_1 = (\alpha\beta\ldots\lambda)^2\,.\,XL_0,$$
$$XL_3 = (\alpha\beta\ldots\lambda)^3\,.\,XL_0,\quad \ldots,\quad XL_n = (\alpha\beta\ldots\lambda)^n\,.\,XL_0.$$

Donc, si le produit $\alpha\beta\ldots\lambda$ est moindre que l'unité, le point L_n a pour limite le centre X des points A, B, ..., L affectés des coefficients (1).

Les points A', B', C', ... sont les points qui se déduisent de X comme A_1, B_1, C_1, ... résultent de L_0. En effet, on a par hypothèse

$$\frac{AA_1}{AL_0} = \frac{AA_2}{AL_1} = \frac{AA_3}{AL_2} = \cdots = \alpha;$$

les points L_0, L_1, L_2 ... étant en ligne droite avec X, les points A_1, A_2, ... sont sur une parallèle à L_0X et ont pour limite le point A' de la droite AX défini par $AA' = \alpha\,.\,AX$. Semblablement, les points B_1, B_2, ... sont sur une droite parallèle à A_1A' ou à AX, et ont pour limite le point B' de la droite BA' défini par $BB' = \beta\,.\,BA'$, etc.

Nous venons de donner le moyen de construire les points L' (ou X), A', B', ... K', connaissant les points A, B, ... L. Le problème inverse ne présente pas de difficulté : on prend sur L'A', A'B', B'C' ... des points A, B, C, ... déterminés par les égalités

$$L'A = \frac{L'A'}{1-\alpha}, \quad A'B = \frac{A'B'}{1-\beta}, \quad B'C = \frac{B'C'}{1-\gamma}, \cdots$$

×Question 893.

(Voir *Mathesis*. (2), III, p. 264.)

Sur les côtés d'un triangle ABC *on construit extérieurement les carrés* BCDE, CAFG, ABHJ, *et sur les droites* FJ, HE, DG *on construit extérieurement les carrés* FJLM, HENO, DGPQ. *Démontrer 1° que les droites* NQ, PM, LO *sont parallèles aux côtés du triangle* ABC *et égales aux quadruples de ces côtés; 2° que les trapèzes* EDQN, GFMP, JHOL *sont égaux à cinq fois le triangle* ABC. (Niyland.)

Solution par M. M. Déprez (Charleroi) et François (La Haye).

Projetons N et Q en N' et Q' sur DE, A en A' sur BC, G en G' sur CD, H en H' sur BE. Il est facile de voir que les triangles DQQ', DGG' sont égaux, de même que les triangles CGG', CAA'; il en résulte

$$QQ' = GG' = AA' = h_a, \quad DQ' = DG' = a + CA'.$$

Par analogie

$$NN' = HH' = AA' = h_a, \quad N'E = EH' = a + BA'.$$

Comme

$$QQ' = NN' = h_a,$$

NQ est parallèle à DE. De plus,

$$QN = Q'D + DE + EN' = 3a + CA' + BA' = 4a,$$

$$\text{aire QNED} = \tfrac{1}{2}(DE + QN).\ QQ' = \tfrac{5}{2}\, ah_a = 5\ ABC.$$

Remarque. Les droites NQ, PM, LO, suffisamment prolongées, déterminent un triangle $A_1B_1C_1$ homothétique à ABC. Les droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent donc en un même point T; les distances de T aux côtés de ABC sont proportionnelles à ses distances aux côtés de $A_1B_1C_1$, et par suite aux distances des côtés homologues des deux triangles; autrement dit, les coordonnées normales de T par rapport à ABC sont proportionnelles aux sommes

$$a + h_a, \quad b + h_b, \quad c + h_c. \qquad (1)$$

Les coordonnées normales absolues de T sont

$$\frac{2S(a+h_a)}{\Sigma a(a+h_a)} = \frac{2S(a+h_a)}{\Sigma a^2+6S} = \frac{a+h_a}{2\cot\omega+3}, \quad \ldots,$$

S désignant l'aire ABC et ω l'angle de Brocard du triangle ABC.

En exprimant que les bases B_1C_1, BC des triangles TB_1C_1, TBC sont proportionnelles à leurs hauteurs, on trouve

$$B_1C_1 = 2a(\cot\omega+2), \quad C_1A_1 = 2b(\cot\omega+2), \quad A_1B_1 = 2c(\cot\omega+2),$$
$$A_1B_1C_1 = 4ABC(\cot\omega+2)^2. \qquad \text{(Déprez.)}$$

MM. Barisien, Hacken et Delahaye ont résolu la même question.

Les expressions (1) montrent que T est sur la droite joignant le centre de gravité de ABC au point de Lemoine.

L'hexagone EDGFJHE a trois côtés ED, GF, JH égaux et parallèles aux côtés a, b, c du triangle ABC; les trois autres FJ, HE, DG, que nous désignons par α, β, γ sont perpendiculaires aux médianes AA', BB', CC' de ABC et doubles de ces médianes. Pour la facilité des notations, nous désignons maintenant par DGG_1D_1, FJJ_1F_1, HEF_1H_1 les carrés construits sur les lignes DG, FJ, HE. L'hexagone $E_1D_1G_1F_1J_1H_1E_1$ a trois côtés E_1D_1, G_1F_1, J_1H_1 parallèles aux côtés de ABC et égaux à $4a$, $4b$, $4c$ et trois autres F_1J_1, H_1E_1, D_1G_1, perpendiculaires aux médianes de ABC et doubles de ces médianes; nous appelons ces côtés $a_1, b_1, c_1, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$. Construisons encore sur a_1, b_1, c_1 des carrés $E_1D_1D_2E_2$, $G_1F_1F_2G_2$, $J_1H_1H_2J_2$; nous formons ainsi l'hexagone $E_2D_2G_2F_2J_2H_2E_2$ dont les côtés E_2D_2, G_2F_2, J_2H_2, que nous représentons par a_2, b_2, c_2 sont égaux à $4a$, $4b$, $4c$; les côtés F_2J_2, H_2E_2, D_2G_2 que nous représentons par $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sont égaux à $5\alpha, 5\beta, 5\gamma$ et parallèles à FJ, HE, DG. De même l'hexagone $E_2D_2G_2F_2J_2H_2E_2$, si l'on construit des carrés sur D_2G_2, F_2J_2, H_2E_2, conduit à un hexagone $E_3D_3G_3F_3J_3H_3E_3$; et ainsi de suite. L'étude des propriétés de ces hexagones successifs a été proposée en 1869 dans un journal de Mathématiques suédois (Voir N. A. M., 1870, p. 380); nous la trouvons aussi dans le *Journal de Vuibert*, 8e année, question 48 (nous devons ce renseignement à M. Hacken); enfin, nous avons tiré la question 893 des *Wiskundige Opgaven*, deel IV, p. 309, où elle a été traitée complètement, avec les propriétés des hexagones successifs, par M. J. De Vries.

Soient g le centre de gravité de ABC, et X, Y, Z les points de concours des droites DD_1 et EE_1, GG_1 et FF_1, JJ_1 et HH_1. Les triangles EDX et BCg, GFY et CAg, JHZ et ABg ont leurs côtés parallèles et égaux. On en conclut facilement que les triangles XDE, XD_1E_1 sont semblables; car

$$XD = \tfrac{2}{3}CC', \quad XD_1 = XD + DD_1 = \tfrac{8}{3}CC',$$

etc. Il résulte de là que D_1E_1 est parallèle à DE et égale à 4DE, que le triangle XD_1E_1 vaut 16 fois le triangle XDE, ou que le trapèze

$$DEE_1D_1 = 15XDE = 15gBC = 5ABC.$$

Telle est la démonstration donnée par M. De Vries. On peut y ajouter les remarques

suivantes dues à M. Barisien. Les droites gX, gY, gZ sont égales et perpendiculaires aux côtés du triangle ABC; les triangles gXY, gYZ, gZX sont donc équivalents à ABC, et g est aussi le centre de gravité de XYZ; les côtés de XYZ sont évidemment égaux et parallèles aux lignes FJ, HE, DG.

Soient X_1, Y_1, Z_1 les points de concours des droites F_1F_2 et J_1J_2, H_1H_2 et E_1E_2, D_1D_2 et G_1G_2; les triangles $F_1J_1X_1$, $H_1E_1Y_1$, $D_1G_1Z_1$ sont respectivement égaux aux triangles FJA, HEB, DGC; par suite les points X_1, Y_1, Z_1 se trouvent sur les médianes gA, gB, gC de ABC, et

$$gX_1 = \frac{8}{3}\,AA' = 4gA, \quad gY_1 = 4gB, \quad gZ_1 = 4gC.$$

Les côtés du triangle $X_1Y_1Z_1$ sont égaux et parallèles à E_1D_1, G_1F_1, J_1H_1.

La considération des triangles $X_1J_1F_1$, $X_1J_2F_2$ montre que F_2J_2 est parallèle à F_1J_1 et égale à $5F_1J_1$.

Ces développements suffisent pour indiquer comment on peut trouver les propriétés successives des hexagones $E_mD_mG_mF_mJ_mH_mE_m$

Note de M. H. Van Aubel. Soient I_a, I_b, I_c les centres des carrrés BCDE, CAFG, ABHJ; O_a, O_b, O_c ceux des carrés FJJ_1F_1, HEE_1H_1, DGG_1D_1; N_a, N_b, N_c, n_a, n_b, n_c ceux des carrés construits extérieurement et intérieurement sur les côtés du triangle $O_aO_bO_c$; enfin P_a, P_b, P_c, p_a, p_b, p_c ceux des carrés construits extérieurement et intérieurement sur les droites E_1D_1, G_1F_1, J_1H_1.

1° Les points A, B, C sont les milieux des droites I_aO_a, I_bO_b, I_cO_c (Théorème connu).

2° Les milieux des droites HG, JD, FE sont à la fois les centres des carrés construits intérieurement sur BC, CA, AB et sur FJ, HE, DG.

3° Si A_1, B_1, C_1 sont les symétriques de A, B, C respectivement par rapport aux milieux A', B', C' de BC, CA, AB, les droites A_1N_a, B_1N_b, C_1N_c sont perpendiculaires aux côtés du triangle ABC et en valent les $\frac{1}{2}$.

4° Les points n_a, n_b, n_c sont respectivement les milieux de ceux des côtés des carrés construits intérieurement sur BC, CA, AB, qui sont parallèles à BC, CA, AB.

5° Les points P_a, P_b, P_c sont les symétriques de A_1, B_1, C_1 par rapport à N_a, N_b, N_c et les droites A_1P_a, B_1P_b, C_1P_c passent par les milieux des lignes D_1E_1, F_1G_1, J_1H_1.

6° Les milieux des droites Ap_a, Bp_b, Cp_c se confondent avec ceux des droites HG, JD, FE.

7° L'hexagone $E_1D_1G_1F_1J_1H_1$ équivaut à 19 fois le triangle ABC, plus 4 fois la somme $a^2 + b^2 + c^2$.

8° La somme des triangles $E_1D_1G_1$, $G_1F_1J_1$, $J_1H_1E_1$, de même que celle des triangles $D_1G_1F_1$, $F_1J_1H_1$, $H_1E_1D_1$ égale $3(a^2 + b^2 + c^2)$.

Question 904.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 32.)

La tangente en un point M *d'une parabole semi-cubique rencontre la courbe en un autre point* M'. *Du point* M *on peut mener à la courbe une seconde tangente dont le point de contact est* T. *Lorsque le point* M *se déplace sur la courbe, la droite* M'T *enveloppe une autre parabole semi-cubique ayant même axe et même point de rebroussement que la première.*

(E. N. Barisien.)

Solution par M. Retali. Considérons sur une cubique cuspidale une correspondance rationnelle dont les points unis soient le point d'inflexion et le rebroussement de la courbe. Si nous rapportons la cubique au triangle formé par la tangente cuspidale x, la droite y qui unit le point stationnaire avec le rebroussement, et la tangente stationnaire z, elle est représentée par l'équation

$$x^2z = y^3;$$

les coordonnées d'un point variable (x, y, z) de la courbe peuvent être supposées telles que l'on ait

$$x : y : z = 1 : \theta : \theta^3,$$

θ étant un paramètre variable ; les paramètres du point stationnaire et du point de rebroussement sont respectivement 0 et ∞ ; et la relation qui lie les paramètres θ, θ' de deux points P et P' qui se correspondent sur la courbe, peut s'écrire sous la forme

$$\theta' = k\theta,$$

k étant une constante plus grande que l'unité.

Cherchons maintenant l'enveloppe de la droite PP' : l'équation de la droite qui unit deux points quelconques de la courbe, dont les paramètres sont θ et θ', est

$$\theta\theta'(\theta + \theta')x - (\theta^2 + \theta\theta' + \theta'^2)y + z = 0;$$

par suite, la droite PP' est représentée par l'équation

$$k(k+1)\theta^3 x - (1 + k + k^2)\theta^2 y + z = 0,$$

qui montre immédiatement que l'enveloppe est de la troisième classe; en éliminant le paramètre variable θ entre l'équation précédente et sa dérivée par rapport à θ nous obtenons, après quelques réductions, pour l'équation de l'enveloppe cherchée

$$(1) \qquad \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 x^2 z = \left(\frac{1+k+k^2}{3}\right)^3 y^3;$$

nous avons donc le théorème général suivant : « *l'enveloppe de la droite qui unit deux points correspondants de deux ponctuelles projectives, placées sur une cubique cuspidale et dont les points unis sont le point stationnaire et le rebroussement, est une autre cubique ayant même point d'inflexion et même rebroussement, avec la même tangente stationnaire et la même tangente cuspidale.* »

Appelons P_1 le premier tangentiel d'un point variable de la cubique, P_2 le deuxième tangentiel de P, c'est à dire le premier tangentiel du point P_1, P_3 le troisième tangentiel de P et ainsi de suite; les paramètres des points P, P_1, P_2, ..., P_r seront respectivement

$$\theta, \quad (-2).\theta, \quad (-2)^2.\theta, \quad \ldots \quad (-2)^r.\theta,$$

et par conséquent les deux points P et P_r marquent sur la cubique deux ponctuelles projectives dont les points unis sont le point d'inflexion et le point de rebroussement de la courbe; *l'enveloppe de la droite* PP_r, *qui unit un point variable* P *avec son* $r^{ième}$ *tangentiel, est donc une autre cubique ayant même point de rebroussement et même point d'inflexion, avec les mêmes tangentes cuspidale et d'inflexion.* On obtient l'équation de cette enveloppe en posant $k = (-2)^r$ dans l'équation (1); en posant dans cette même équation $k = 4$ nous obtenons

$$(2) \qquad 100x^2z = 343y^3,$$

qui représente l'enveloppe de la droite qui unit un point variable d'une cubique cuspidale *quelconque* avec son deuxième tangentiel. En prenant pour z la droite à l'infini du plan de la courbe nous avons le théorème de M. Barisien; si la droite à l'infini est x, nous obtenons une propriété analogue de la parabole cubique, que l'on peut énoncer ainsi : *si l'on unit un point variable d'une parabole cubique, avec son* $r^{ième}$ *tangentiel, par une droite, l'enveloppe de cette droite est une deuxième parabole cubique ayant même centre et même diamètre.*

L'équation (1) nous donne aussi le théorème suivant : *l'enveloppe de la*

droite qui unit un point variable d'une cissoïde de Dioclès à son 1ère tangentiel est une autre courbe cissoïdale ayant même point de rebroussement, même axe et même asymptote que la première.

Nous terminons cette note en observant que la loi suivant laquelle varient les paramètres des tangentiels successifs d'un point d'une cubique cuspidale, démontre d'une manière intuitive les deux théorèmes suivants, énoncés par M. Emile Weyr, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*(*) : 1° Soit C^3 une courbe du troisième ordre et de la troisième classe : on s'approche indéfiniment d'un point d'inflexion en construisant sur la courbe une telle série de points que chacun d'eux soit le point d'intersection de la courbe avec la tangente au point précédent. 2° Soit C^3 une courbe du troisième ordre et de la troisième classe : on construit sur cette courbe une telle série de points que chacun d'eux soit le point de contact de la tangente que l'on peut mener par le point précédent. Prouver que ces points se rapprochent de plus en plus d'un point de rebroussement.

MM. Droz-Farny, Jonesco et Déprez ont résolu la question 904 en partant de l'équation $ay^2 = x^5$. M. Déprez remarque que le centre de gravité du triangle MM'T décrit également une parabole semicubique.

×Question 920.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 79).

Résoudre l'équation

$$[\sin(x-\alpha)+\cos(x+2\alpha)\sin\alpha]^2 = 4\sin\alpha\cos x\sin(x+\alpha).$$ (Dickenson.)

Solution par C. J. François (La Haye). Si l'on applique les formules relatives à $\sin(a \pm b)$, l'équation donnée devient :

$$(\sin x\cos\alpha\cos 2\alpha - 2\cos x\sin^3\alpha)^2 = 4\sin^2\alpha\cos^2 x + 4\sin\alpha\cos\alpha\sin x\cos x;$$

développant le carré et divisant par $\cos^2 x$, on obtient :

$$\cos^2 2\alpha\,.\,\mathrm{tg}^2 x - 4\cos\alpha\sin\alpha(3 - 2\cos^2\alpha)\,\mathrm{tg}\,x - 4\sin^2\alpha(\cos^2\alpha - 2) = 0$$

d'où l'on déduit après réduction

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{2\sin\alpha}{\cos^2 2\alpha}(3\cos\alpha - 2\cos^3\alpha \pm \sqrt{2})$$

$$= -\frac{\sin\alpha(\cos\alpha \pm \sqrt{2})}{\left(\cos\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}.$$

(*) V. *Laisant*. IV, N^os^ 496-497, ou N. A. M., année 1870, p. 240.

Autres solutions par MM. DEPREZ, J. JONESCO, CRISTESCU et MANDART.

M. MANDART, après des transformations assez longues, ramène l'équation proposée à celle-ci :

$$2\cos x - \cos(x + 2\alpha) = \pm 1.$$

×Question 924.

(Voir *Mathesis*, t. IV. (2), p. 80 et 277).

Le carré de la somme de n *carrés est aussi la somme de* n *carrés*

(E. CATALAN.)

Rectification par M. E. FAUQUEMBERGUE. L'identité

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_i^2 - a_{i+1}^2 - \ldots - a_n^2)^2 + \Sigma (2a_r a_s)^2,$$

où

$$r = 1, 2, \ \ldots, \ i \quad \text{et} \quad s = 1 + i, i + 2, \ \ldots, \ n,$$

ne répond pas à la question de Catalan, car le second membre n'est pas la somme de n carrés*.

Par exemple, soit l'identité

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 - a_5^2)^2 + (2a_1a_4)^2 + (2a_2a_4)^2 + 2a_3a_4)^2 + (2a_1a_5)^2 + (2a_2a_5)^2 + (2a_3a_5)^2.$$

Pour obtenir cinq carrés dans le second membre, il faut mettre l'identité sous la forme

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 - a_5^2)^2 + 4(a_1a_4 \pm a_2a_5)^2 + 4(a_1a_5 \mp a_2a_4)^2 + 4a_3^2a_5^2 + 4a_3^2a_4^2.$$

On peut obtenir d'autres décompositions par une permutation des lettres.

Question CXXII.

(Voir N. C. M., II, p. 191 ; LAISANT, IV, n° 165).

Si, par un point fixe P, *pris sur un hyperboloïde réglé, on mène des droites s'appuyant sur les diagonales des quadrilatères que forment deux génératrices fixes* g, g', *du premier système, avec deux génératrices variables du second système ; ces droites sont situées dans un même plan.*

(J. NEUBERG.)

(*) Les quatre dernières lignes de la solution publiée en décembre 1894 forment une simple remarque qui aurait dû paraître en petit texte. (J. N.)

La proposition subsiste encore lorsque le point P est quelconque. M. Franel, professeur à l'École polytechnique de Zurich, signale cette généralisation dans un article de la *Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zurich* (t. XL, 1895); il la déduit du théorème suivant qu'il établit par la géométrie analytique : *Étant données deux ponctuelles projectives $xyz\ldots$, $x'y'z'\ldots$, dont les supports ne sont pas dans un même plan, on peut considérer deux droites, telles que xy', $x'y$, qui joignent inversement deux couples de points homologues, comme étant les directrices* (axes) *d'une congruence linéaire; toutes les congruences ainsi obtenues appartiennent à un même complexe linéaire.*

Voici une démonstration géométrique de notre théorème.

Les génératrices, du second système, de l'hyperboloïde déterminent sur les génératrices fixes g, g', du premier système, deux ponctuelles projectives $xyz\ldots$, $x'y'z'\ldots$ Projetons celles-ci, à partir d'un point quelconque P, sur un plan quelconque; nous obtiendrons deux nouvelles ponctuelles projectives $x_1y_1z_1\ldots$, $x'_1y'_1z'_1\ldots$ D'après un théorème connu, les droites $x_1y'_1$ et x'_1y_1, $x_1z'_1$ et x'_1z_1, $y_1z'_1$ et $y'_1z_1\ldots$, se coupent en des points U, V, W, ... d'une même droite h. Mais la droite PU s'appuie sur les droites xy' et $x'y$, PV sur les droites xz' et $x'z$, etc.; il en résulte que les droites menées par P et s'appuyant sur deux droites joignant inversement deux couples quelconques de points homologues des deux ponctuelles projectives g, g' sont situées dans un même plan Ph. (J. N.).

Question CXXIII.

(Voir M. C. M., II, p. 191 et LAISANT, IV, n° 166).

Soient A, B, C *trois génératrices, d'un même système, de l'hyperboloïde* H; A', B', C' *trois génératrices, d'un même système, de l'hyperboloïde* H'; P *un point quelconque de l'intersection des surfaces* H, H'. *Par* P, *on mène les deux droites qui s'appuient, respectivement, sur les couples de droites* (A, B'), (A', B); *soit* γ *le plan passant par ces droites. On obtient, d'une manière analogue, deux autres plans* α, β *en combinant, d'une part, les couples* (B, C'), (B', C), *et d'autre part, les couples* (A, B'), (A', B). *Les plans* α, β, γ *passent par une même droite.* (J. NEUBERG.)

Soient D, D' les génératrices, du second mode, de H et H', qui passent par P. Projetons les droites A, B, C, A', B', C' à partir de P sur un plan quelconque π; les projections a, b, c de A, B, C passent évidemment

par le point où D coupe π; de même, les projections a', b', c' de A', B', C' concourent en un même point. D'après un théorème connu, les droites

$$(ab', a'b) \equiv c_1 (*), \quad (bc', b'c) \equiv a_1, \quad (ca', ca') \equiv b_1$$

concourent en un même point U. Mais les droites joignant P aux points ab', $a'b$ s'appuient respectivement sur les couples de droites (A, B'), (A', B); donc le plan γ passe par c_1. De même les plans α, β passent par a_1, b_1; par suite, les plans α, β, γ se coupent suivant la même droite PU.

La proposition est encore vraie, si A, B, C désignent trois génératrices du premier système d'un hyperboloïde H; A', B', C' trois génératrices du second système de H; P un point quelconque de H. La démonstration donnée ci-dessus est applicable.

Dans le dernier cas, on peut même remplacer P par un point non situé sur H. En effet, les plans PA, PB, PC, PA', PB' PC' enveloppent un cône circonscrit à H; par suite les six droites a, b, c, a', b', c' sont tangentes à une même conique. Si l'on applique le théorème de Brianchon à l'hexagone $ab'ca'bc$, on voit que les plans α, β, γ passent par une même droite. (J. N.).

QUESTIONS D'EXAMEN.

683. Résoudre le système

$$\log \sqrt{x^n y^m} = mn + 1, \quad \frac{\log (x^{\log x})}{\log (y^{\log y})} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

683. Résoudre le système

$$x^5 + y^5 = 186 - 2xy(x + y), \quad x + y = 6.$$

684. Soit ABCD un quadrilatère quelconque, plan ou gauche. On divise les côtés AB, DC, aux points M et N, en segments proportionnels aux côtés adjacents AD, BC, de manière que

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{AD}{BC}.$$

Démontrer que la droite MN fait des angles égaux avec AD et BC.

Construire les parallélogrammes DAME, CBMF et démontrer que les points E, N, F sont en ligne droite, etc.

(*) c_1 est la droite qui joint le point de rencontre de a avec b', au point de rencontre de a' avec b.

685. Si O est le point d'intersection des diagonales AC, BD d'un quadrilatère ABCD, on a

surface AOB × surface COD = surface BOC × surface AOD.

(A. Emelincekx.)

QUESTIONS PROPOSÉES.

1014. Soit ABCD un quadrilatère articulé dans lequel AB + BC = AD + DC. Appelons E l'ellipse qui a pour foyers les points A, C et qui passe par B et D. Si l'on fixe les sommets A et B et qu'on déforme ensuite le quadrilatère, les directrices de E enveloppent deux coniques ayant pour foyer commun le point B; l'ellipse E a pour enveloppe une ellipse qui a pour foyers les points A et B. (J. Neuberg.)

***1015.** Soient A', B', C' les pieds des hauteurs d'un triangle ABC; A_1, A_2 les projections de A' sur AB, AC; B_1, B_2 celles de B' sur BC, BA; C_1, C_2 celles de C' sur CA, CB. Démontrer la relation

$$a^2 . A'A_1A_2 + b^2 . B'B_1B_2 + c^2 . C'C_1C_2 = \frac{4S^2}{R}.$$ (J. Jonesco.)

***1016.** Soient AA', BB', CC' les hauteurs d'un triangle ABC; les côtés correspondants des triangles ABC, A'B'C' se coupent aux points A'', B'', C''. Démontrer que les droites AA_1, BB_1, CC_1 respectivement perpendiculaires aux droites AA'', BB'', CC'' concourent en un même point. (Vve Prime).

***1017.** Démontrer que les nombres

16, 1156, 111556, etc.

que l'on obtient en intercalant le nombre 15 dans le terme précédant de la suite, sont des carrés parfaits. (Montanari).

On peut trouver d'autres théorèmes analogues. Par exemple, les nombres suivants sont carrés parfaits :

49, 4489, 444889, 44448889, etc.
729, 71289, 7112889, 71112889, etc.

***1018.** Si M est un point quelconque de la ligne d'Euler HO d'un triangle ABC, on a :

$$\overline{MA}^2 + \lambda a^2 = \overline{MB}^2 + \lambda b^2 = \overline{MC}^2 + \lambda c^2,$$

où deux valeurs de λ égales et de signes contraires se rapportent à deux points symétriques par rapport à O. (E. Lemoine).

SUR UN GROUPE DE CONIQUES INSCRITES OU CIRCONSCRITES A UN TRIANGLE(*),

par M. N. Ch. Spijker (Amsterdam).

1. Une conique inscrite au triangle de référence ABC a pour équation

$$S_1' \equiv \sqrt{\frac{\alpha}{p}} + \sqrt{\frac{\beta}{q}} + \sqrt{\frac{\gamma}{r}} = 0, \qquad (1)$$

α, β, γ désignant des coordonnées barycentriques. Soient A_1, B_1, C_1 les points où elle touche BC, CA, AB; les droites AA_1, BB_1, CC_1 se coupent en un point V_1 ayant pour coordonnées p, q, r. Les coordonnées du centre O_1 de S_1' sont respectivement proportionnelles aux quantités

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r}+\frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}.$$

2. La conique qui touche BC, CA, AB aux isotomiques A_2, B_2, C_2 des points A_1, B_1, C_1 a pour équation

$$S_2' \equiv \sqrt{p\alpha} + \sqrt{q\beta} + \sqrt{r\gamma} = 0; \qquad (2)$$

les coordonnées du point de rencontre V_2 des droites AA_2, BB_2, CC_2 sont

$$\frac{1}{p}, \quad \frac{1}{q}, \quad \frac{1}{r};$$

et celles du centre O_2 de S_2' sont

$$q+r, \quad r+p, \quad p+q.$$

V_1 et V_2 sont des points réciproques; O_2 est le complémentaire de V_1, O_1 celui de V_2.

3. Considérons la conique circonscrite au triangle ABC et ayant pour centre O_1; elle a pour équation

$$S_1 \equiv \frac{q+r}{\alpha} + \frac{r+p}{\beta} + \frac{p+q}{\gamma} = 0. \qquad (3)$$

Les tangentes aux points A, B, C forment un triangle $A_3B_3C_3$; les équations des droites B_3C_3, B_2C_2 étant

$$(p+q)\beta + (r+p)\gamma = 0, \quad -p\alpha + q\beta + r\gamma = 0, \qquad (a)$$

(*) Cette note reprend par l'analyse un grand nombre de théorèmes démontrés par MM. Neuberg et Schoute dans le mémoire présenté au Congrès de Marseille en 1891 : *Généralisation d'un problème connu.*

on voit facilement que les triangles $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ sont homothétiques(*).

4. De même, l'équation

$$S_2 \equiv \left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\beta}+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\frac{1}{\gamma}=0 \qquad (4)$$

représente une conique circonscrite au triangle ABC et ayant pour centre O_2. Les tangentes en A, B, C forment un triangle $A_4B_4C_4$ homothétique avec le triangle $A_1B_1C_1$.

On établit encore facilement par le calcul que les droites AA_3, BB_3, CC_3 concourent en O_2, et les droites AA_4, BB_4, CC_4, en O_1.

5. La droite V_1V_2 a pour équation

$$\left(\frac{q}{r}-\frac{r}{q}\right)\alpha+\left(\frac{r}{p}-\frac{p}{r}\right)\beta+\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)\gamma=0; \qquad (5)$$

elle a pour transformée par points réciproques la conique :

$$\Delta \equiv \left(\frac{q}{r}-\frac{r}{q}\right)\beta\gamma+\left(\frac{r}{p}-\frac{p}{r}\right)\gamma\alpha+\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)\alpha\beta=0. \qquad (6)$$

La courbe Δ passe par les sept points A, B, C, O_1, O_2, V_1, V_2.

Le centre Q de Δ a pour coordonnées

$$p(q-r)^2, \quad q(r-p)^2, \quad r(p-q)^2,$$

il coïncide avec le quatrième point d'intersection des coniques S'_1, S'_2.

D'autre part, les coniques S_1, S_2 se coupent en un quatrième point R dont les coordonnées sont

$$\frac{q+r}{q-r}, \quad \frac{r+p}{r-p}, \quad \frac{p+q}{p-q};$$

Q *est le complémentaire de* R.

La quatrième tangente commune des coniques S'_1, S'_2 a pour équation

$$\frac{\alpha}{\frac{q}{r}-\frac{r}{q}}+\frac{\beta}{\frac{r}{p}-\frac{p}{r}}+\frac{\gamma}{\frac{p}{q}-\frac{q}{p}}=0(**);$$

c'est la transversale réciproque de la droite V_1V_2.

(*) En retranchant membre à membre les équations (4) on trouve $\alpha+\beta+\gamma=0$, équation de la droite de l'infini.

(**) Les équations tangentielles de S'_1 et S'_2 sont

$$\frac{1}{p\lambda}+\frac{1}{q\mu}+\frac{1}{r\nu}=0, \quad \frac{p}{\lambda}+\frac{q}{\mu}+\frac{r}{\nu}=0.$$

Les coordonnées de la quatrième tangente vérifient ces deux équations.

6. Soient R_1, R_2 les quatrièmes points d'intersection de Δ avec S_1, S_2. Les cordonnées de R_1 étant

$$\frac{p(q+r)}{2p-q-r}, \quad \frac{q(r+p)}{2q-r-p}, \quad \frac{r(p+q)}{2r-p-q},$$

on vérifie facilement que les points R_1, R, O_1 sont en ligne droite; de même R_2, R, O_2 sont en ligne droite. Par conséquent, Δ *coupe* S_1 *et* S_2 *aux points diamétralement opposés à* R.

7. Les coniques S_1, S'_1 ont même centre O_1. A un diamètre O_1X correspond dans S_1 un diamètre conjugué d_1, dans S'_1 un conjugué d'_1; d_1 et d'_1 sont des éléments homologues de deux faisceaux projectifs (d_1), (d'_1) dont les rayons doubles δ, δ' formant le couple de diamètres conjugués communs à S_1 et S'_1. Si l'on prend pour O_1X successivement O_1A, O_1B, O_1C, d_1 sera parallèle à la tangente menée en A, B, C à la conique S_1, ou aux droites B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2; de même d'_1 sera parallèle à la corde des contacts des tangentes menées de A, B, C à la conique S'_1, ou aux droites B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Coupons maintenant les faisceaux (d_1), (d'_1) par la droite de l'infini i; nous aurons deux ponctuelles projectives dont trois couples d'éléments homologues sont donnés par l'intersection de i avec les droites B_2C_2 et B_1C_1, C_2A_2 et C_1A_1, A_2B_2 et A_1B_1, et dont les points doubles D_1, D_2 sont situés sur δ, δ'.

En raisonnant de même sur S_2 et S'_2, on arrive à cette conclusion que les points D_1, D_2 sont conjugués à la fois par rapport aux quatre coniques S_1, S'_1, S_2, S'_2. Démontrons maintenant que ces points sont situés sur Δ, ou que les asymptotes de Δ sont à la fois parallèles à un système de diamètres conjugués de chacune des quatre coniques. Or, si l'on désigne par α_1, β_1, γ_1 et α_2, β_2, γ_2 les coordonnées de D_1 et D_2, et qu'on exprime que ces points sont coujugués par rapport à S_1 et S_2, on trouve

$$\Sigma(q+r)(\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1)=0, \quad \Sigma\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)(\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1)=0;$$

ces égalités, eu égard aux relations

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=0, \quad \alpha_2+\beta_2+\gamma_2=0,$$

se réduisent à

$$p\alpha_1\alpha_2+q\beta_1\beta_2+r\gamma_1\gamma_2=0, \quad \frac{\alpha_1\alpha_2}{p}+\frac{\beta_1\beta_2}{q}+\frac{\gamma_1\gamma_2}{r}=0.$$

Si l'on élimine $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ entre les trois dernières équations, on obtient

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & \frac{1}{\beta_1} & \frac{1}{\gamma_1} \\ p & q & r \\ \frac{1}{p} & \frac{1}{q} & \frac{1}{r} \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est l'équation de Δ.

8. Prenons pour un moment $A_1B_1C_1$ comme triangle de référence. Les coordonnées de V_1 étant maintenant (*Mathesis*, (2), II, p. 22)(*)

$$q+r, \quad r+p, \quad p+q,$$

l'équation de la conique passant par A_1, B_1, C_1 et ayant pour centre V_1 est

$$\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\beta}+\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)\frac{1}{\gamma}=0.$$

Par analogie, la conique circonscrite au triangle $A_1B_1C_1$ et dont le centre a pour coordonnées

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{r}, \quad \frac{1}{r}+\frac{1}{p}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q},$$

est représentée par l'équation

$$\frac{q+r}{\alpha}+\frac{r+p}{\beta}+\frac{p+q}{\gamma}=0.$$

Cette courbe se confond avec S_1', car la tangente en A_1 ayant pour équation

$$\frac{\beta}{r+p}+\frac{\gamma}{p+q}=0,$$

est la conjuguée harmonique de A_1V_1 par rapport à l'angle $B_1A_1C_1$ et, par suite, coïncide avec BC, de même que les tangentes en B_1 et C_1 avec CA et AB. Il résulte de là que O_1 a les mêmes coordonnées barycentriques dans les deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$, et que les points A_1, B_1, C_1, V_1, O_1

(*) V_1 est le centre de gravité des six masses $p+p, q+q, r+r$ attachées respectivement en A, B, C. Ces six masses peuvent être remplacées par trois masses $(q+r), (r+p), (p+q)$ attachées respectivement en A_1, B_1, C_1; donc V_1 est aussi le centre de gravité des points A_1, B_1, C_1 chargés des masses $q+r, r+p, p+q$.
(J. N.).

sont sur une conique Δ_1 ayant par rapport au triangle $A_1B_1C_1$ la même équation que la conique Δ par rapport à ABC.

Par analogie, si $A_2B_2C_2$ est pris pour triangle de référence, O_2 a les mêmes coordonnées que dans le triangle ABC, et les points A_2, B_2, C_2, V_2, O_2 sont sur une conique Δ_2 ayant la même équation par rapport à $A_2B_2C_2$ que Δ par rapport à ABC.

9. Prenons maintenant $A_4B_4C_4$ pour triangle de référence. Comme les anciennes coordonnées de O_1 sont $\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\cdots$, et que les droites A_4A, B_4B, C_4C se coupent en O_1, on trouve facilement pour les nouvelles coordonnées de ce point $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}$. (*)

La conique S_2, qui touche les côtés du triangle $A_4B_4C_4$ en A, B, C a donc pour équation

$$\sqrt{p\alpha}+\sqrt{q\beta}+\sqrt{r\gamma}=0;$$

on en conclut que les nouvelles coordonnées de son centre O_2 sont

$$q+r,\quad r+p,\quad p+q,$$

ce sont donc les mêmes que dans le triangle ABC.

Les points A_4, B_4, C_4, O_1, O_2 sont sur une conique Δ_4 ayant pour équation

$$\left(\frac{q}{r}-\frac{r}{q}\right)\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{r}{p}-\frac{p}{r}\right)\frac{1}{\beta}+\left(\frac{p}{q}-\frac{q}{p}\right)\frac{1}{\gamma}=0.$$

On arrive à des conclusions analogues en adoptant $A_3B_3C_3$ pour triangle fondamental.

10. D'après cela, O_1 a les mêmes coordonnées dans les triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_3B_3C_3$; et O_2, dans les triangles ABC, $A_2B_2C_2$, $A_4B_4C_4$. Nous avons ainsi rencontré cinq coniques désignées par Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 et passant par les points

$ABCV_1V_2O_1O_2$, $A_1B_1C_1V_1O_1$, $A_2B_2C_2V_2O_2$, $A_3B_3C_3O_1O_2$, $A_4B_4C_4O_1O_2$; ces courbes ont la même équation barycentrique respectivement par rapport aux triangles ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, $A_4B_4C_4$. Les triangles $A_1B_1C_1$ et $A_4B_4C_4$ étant homothétiques, les asymptotes de Δ_1 et Δ_4 sont parallèles entre elles, et l'on peut même établir qu'elles sont parallèles à celles de Δ.

(*) Il suffit d'appliquer à O_1 dans les triangles $A_4B_4C_4$, ABC le même raisonnement qu'à V_1 dans les triangles ABC. $A_1B_1C_1$.

11. Voici les équations des cinq coniques par rapport au triangle ABC :

$$\Delta \equiv \Sigma\left(\frac{q}{r}-\frac{r}{q}\right)\beta\gamma = 0,$$

$$\Delta_1 \equiv \Delta + (\alpha+\beta+\gamma)\,\Sigma\frac{q-r}{p}\alpha = 0,$$

$$\Delta_2 \equiv \Delta + (\alpha+\beta+\gamma)\,\Sigma\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)\frac{\alpha}{p} = 0,$$

$$\Delta_3 \equiv \Delta + \frac{(q+r)(r+p)(p+q)}{2pqr}(\alpha+\beta+\gamma)\,\Sigma\frac{q-r}{q+r}\alpha = 0,$$

$$\Delta_4 \equiv \Delta - \frac{(q+r)(r+p)(p+q)}{2pqr}(\alpha+\beta+\gamma)\,\Sigma\frac{q-r}{q+r}\alpha = 0.$$

12. La conique des neuf points du quadrangle ABCR passe par les milieux des côtés du triangle ABC et par les points O_1, O_2. Elle est donc complémentaire de Δ. On peut la considérer comme le lieu des centres des coniques circonscrites au triangle ABC et ayant deux diamètres conjugués parallèles aux asymptotes de Δ.

13. Supposons que les normales aux points A_1, B_1, C_1 de S'_1 concourent en un même point P'_1 ; nous devrons avoir

$$\overline{BA_1}^2 + \overline{CB_1}^2 + \overline{AC_1}^2 = \overline{AB_1}^2 + \overline{BC_1}^2 + \overline{AB_1}^2.$$

Cette condition, si l'on observe que

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{r}{q}, \quad \frac{CB_1}{B_1A} = \frac{p}{r}, \quad \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{q}{p},$$

se ramène à

$$\Sigma\left(\frac{q}{r}-\frac{r}{q}\right)\cot A = 0. \qquad (A)$$

Les normales aux points A_2, B_2, C_2 de S'_2 concourent en un même point P'_2, symétrique de P'_1 par rapport au centre O du cercle ABC.

Les normales aux points A, B, C de S_1 ou de S_2 concourent respectivement en un point P_1, inverse (conjugué isogonal) de P'_2, ou en un point P_2, inverse de P'_1.

14. Appelons H l'orthocentre de ABC, h le réciproque de H, K le point de Lemoine, G le centre de gravité. La condition (A) exprime que la conique Δ (n° 5) passe par H ; cette courbe est l'hyperbole d'Apollonius de S_1 par rapport à P_1 et de S_2 par rapport à P_2. On conclut de là que Δ

passe par les points P_1, P_2 et est la transformée isogonale (par inversion trilinéaire) de la droite $P'_1P'_2$.

Δ étant la transformée réciproque de la droite V_1V_2, celle-ci passe par h, réciproque de H. Les complémentaires O_1, O_2, K des points V_1, V_2, h sont également sur une même droite.

SUR LA SOMMATION DES PUISSANCES SEMBLABLES DES n PREMIERS NOMBRES TRIANGULAIRES,

par M. E. Barbette, Docteur en Sciences physiques et mathématiques.

Désignons par T_k la somme des $k^{ièmes}$ puissances des n premiers triangulaires; nous aurons

$$\begin{aligned} T_k &= \sum_{p=1}^{p=n} \left\{ \frac{p(p+1)}{2} \right\}^k \\ &= \sum_{p=1}^{p=n} \frac{1}{2^k} \left(p^{2k} + \frac{k}{1} p^{2k-1} + \frac{k(k-1)}{1.2} + \cdots + p^k \right) \\ &= \frac{1}{2^k} \left(S_{2k} + \frac{k}{1} S_{2k-1} + \frac{k(k-1)}{1.2} S_{2k-2} + \cdots + S_k \right), \end{aligned}$$

en désignant par S_k la somme des $k^{ièmes}$ puissances des n premiers entiers. Nous pourrons écrire symboliquement

$$T_k = \frac{S_k (S+1)^k}{2^k},$$

en convenant que les exposants de S dans $(S+1)^k$ s'indiquent en indices et que

$$S_x \times S_y = S_{x+y}.$$

Or, S_x est une fonction du $(x+1)^{ième}$ degré en n, d'où T_k est comme S_{2k} une fonction du $(2k+1)^{ième}$ degré en n :

$$T_0 = n,$$

$$T_1 = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{6},$$

$$T_2 = \frac{3n^5 + 15n^4 + 25n^3 + 15n^2 + 2n}{60},$$

$$T_3 = \frac{15n^7 + 105n^6 + 273n^5 + 315n^4 + 140n^3 - 8n}{840},$$

etc...

Nous avons démontré précédemment (voir *Mathesis*, (2), IV, p. 105), que S_k peut s'exprimer en fonction de S_1 et S_2; il en sera évidemment de même des fonctions T et nous aurons :

$$T_1 = \frac{S_1 + S_2}{2},$$

$$T_2 = \frac{5S_1^2 + 3S_1S_2 + 2S_2}{10},$$

$$T_3 = \frac{35S_1^3 + 15S_1^2S_2 + 24S_1S_2 - 4S_2}{70},$$

$$T_4 = \frac{105S_1^4 + 35S_1^3S_2 + 100S_1^2S_2 - 36S_1S_2 + 6S_2}{210},$$

$$T_5 = \frac{231S_1^5 + 63S_1^4S_2 + 280S_1^3S_2 - 172S_1^2S_2 + 72S_1S_2 - 12S_2}{462},$$

etc...

De plus, nous allons prouver qu'il n'existe aucune égalité de la forme $T_k^x = T_r^y$.

Le développement de T_k est une fonction de degré $(2k+1)$ en x et dont le coefficient du premier terme est $\frac{1}{(2k+1)\,2^k}$; d'où T_k^x est une fonction de degré $(2k+1)\,x$ en x et dont le coefficient du premier terme est $\frac{1}{(2k+1)^x \cdot 2^{kx}}$. De même T_r^y est une fonction de degré $(2k+1)\,y$ en x et dont le coefficient du premier terme est $\frac{1}{(2r+1)^y \cdot 2^{ry}}$.

Par conséquent, on devra avoir

$$(2k+1)\,x = (2r+1)\,y \quad \text{et} \quad (2k+1)^x \cdot 2^{kx} = (2r+1)^y \cdot 2^{ry}$$

égalités qui entrainent les suivantes : $x = y$ et $k = r$.

BIBLIOGRAPHIE.

Tratado de esteréométria genética par V. Balbin (Recteur du collège national de Buenos-Ayres). — Buenos-Ayres, Biedma, 1894. Un vol. grand in 8° de XI-126 pages.

M. Balbin (*) appelle, avec M. Heinze (*Genetische Stereometrie von Dr. Karl*

(*) M. Balbin a traduit de nombreux ouvrages : *Metodo de los cuadrados mínimos*, *Elementos de Calculo de los Cuaterniones*, *Tratado de Geometria analytica* (de Casey), etc.

Heinze bearbeitet von Franz Lucke, 1886), *Stéréométrie génétique* « la branche des mathématiques qui enseigne la génération, d'après une loi unique, de tous les corps géométriques élémentaires et de quelques autres, et le calcul de leurs volumes au moyen d'une formule unique. » « La forme la plus générale des corps considérés ici a été appelée *prismoïde;* la formule de cubature est la règle des trois niveaux ou l'*omniformule* (Voir *Mathesis*, (1) V, p. 9 et 74; (2) III, p. 138). L'auteur examine de nombreux cas particuliers sous les noms de : prisme, antiprisme, parapriame; tronc de pyramide, d'antipyramide, de parapyramide, d'interpyramide; obélisque, antiobélisque, paraobélisque, interobélisque; hémitétraèdre, etc. Tous les corps compris entre deux bases horizontales et admettant des sections horizontales dont l'aire est une fonction du second ou du troisième degré de la distance de leur plan à l'une des bases, dépendent de l'*omniformule*. (J. N).

Trigonométrie, à l'usage des candidats aux Baccalauréats de l'enseignement secondaire classique et moderne, par L. GÉRARD, Docteur ès-Sciences, professeur au lycée de Lyon. Paris, Société d'éditions scientifiques, rue Antoine-Dubois, 4. (In-18 de 72 pages). Prix : fr. 1.25.

Cet ouvrage, comme l'Algèbre de Giraud, dont *Mathesis* a rendu compte dans le n° de février, p. 46, fait partie d'une collection de « *Manuels des baccalauréats* » publiée sous la direction de M. B. Niewenglowski. Il comprend toutes les questions portées au programme de l'enseignement secondaire classique et moderne, et quelques autres qui sont fréquemment posées. Bien que le volume soit excessivement réduit, toutes les matières y sont traitées avec une grande clarté et sous une forme vraiment scientifique, en rapport avec des études ultérieures d'un ordre plus élevé. (J. N.).

Questions d'Algèbre, à l'usage des classes de mathématiques spéciales et des candidats aux écoles polytechnique, normale, centrale, etc. par M. MAUPIN. Avec une Préface de M. LAISANT. Paris, Nony et C^ie^, 1895, VII-292 pages grand in-8. Prix : 5 francs.

L'ouvrage de M. Maupin se rapporte aux différentes matières que les programmes officiels réunissent sous la rubrique *Algèbre* pour l'admission à l'École Polytechnique : Division algébrique, analyse combinatoire, imaginaires, fractions continues, séries, notions sur les infiniment petits, dérivées et différentielles, maxima et minima, déterminants, décomposition des formes quadratiques, décomposition des fractions rationnelles, propriétés des équations algébriques, théorèmes de Descartes, de Rolle, de Sturm, théorie des différences et formules d'interpolation, recherche des fonctions primitives et des intégrales indéfinies, applications géométriques du calcul infinitésimal.

Chaque chapitre comprend des *questions traitées* et des *questions proposées*. L'auteur reproduit d'abord les principales questions, les plus récentes surtout, posées aux examens d'admission aux grandes Écoles spéciales; il a ensuite pris dans les ouvrages originaux (Euler, Bernoulli, Montucla, Joseph Bertrand, etc.) les problèmes accessibles aux élèves. Il ne s'est pas borné aux programmes officiels;

mais il a également donné un bon nombre de questions fort intéressantes sur des matières sortant de ces programmes, par exemple, sur les probabilités, les développements en produits infinis, certaines applications géométriques du calcul infinitésimal.

Les *Questions d'Algèbre* de M. Maupin peuvent rendre de grands services aux élèves de mathématiques spéciales des établissements français, et à ceux des écoles spéciales ou de la candidature en sciences physiques et mathématiques en Belgique. Le choix des questions traitées est très heureux; les exercices proposés sont nombreux et instructifs.

L'impression du volume est fort soignée; elle fait honneur aux presses de la Librairie Nony et C^ie^. (J. N.).

Traité de perspective linéaire, par N. BREITHOF, professeur à l'Université de Louvain, membre du Conseil de perfectionnement de l'enseignement des Arts du dessin, etc. Louvain, Uystpruyst; Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893. Un vol. grand in-8° de 172 pages, avec atlas de XXXVI planches.

Sommaire. — I. Projections centrales ou perspectives. II. Perspective linéaire. III. Figures situées dans le géométral. IV. Objets à trois dimensions. V. Figures planes en dehors du géométral. VI. Applications diverses. VII. Considérations générales. — Objets éclairés au flambeau. — Ombres solaires. VIII. Méthode générale de perspective.

Ce traité est à la fois scientifique et pratique. La perspective linéaire y est enseignée avec le concours des projections centrales et des rabattements polaires. La solution des problèmes d'une certaine importance comprend trois parties essentielles: 1° la solution dans l'espace; 2° la solution graphique ou l'épure, c'est-à-dire la traduction en lignes de la solution dans l'espace en faisant intervenir le géométral; 3° la pratique de la perspective, ou le tracé, sur le tableau, de la perspective d'un objet sans le concours du géométral. Cette méthode d'enseignement permet d'arriver à un but pratique : représenter directement sur la toile ou le tableau un objet quelconque, quelles que soient ses dimensions et celles du tableau ou la position du point de vue, et cela à l'aide de données numériques et de quelques tracés géométriques. (J. N.).

Guide pratique du dessinateur. Graphique linéaire. Pratique du lavis. Principes de dessin technique, par N. BREITHOF, professeur à l'Université de Louvain, membre du Conseil de perfectionnement de l'Enseignement des Arts du dessin. 2^me^ édition. Louvain, Uystpruyst-Dieudonné; Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894 (Grand in-8° de 309 pages, avec atlas de XVI planches). Prix : 10 fr.

Cet ouvrage est très bien écrit; de plus, il répond à un besoin réel. Dans la première partie, qu'il appelle la *graphique linéaire*, l'auteur décrit tous les instruments, expose les moyens de vérifier leur degré de précision et la manière de s'en servir, et développe les règles à suivre pour la bonne exécution d'un dessin géométrique en détaillant les notations, les conventions et les principes propres à chaque genre de travail.

La seconde partie comprend 1° tous les détails relatifs à la *pratique du lavis*, et des applications à des exemples de la plus haute utilité dans le dessin d'architecture et celui des machines; 2° le *dessin technique*, c'est-à-dire l'application des principes du dessin géométrique et du lavis à l'architecture, aux machines, au tracé des plans de routes, des cartes forestières et topographiques, au levé du bâtiment, de machine et d'usine.

Cette analyse sommaire suffit pour montrer que le *Guide pratique du dessinateur* peut rendre de grands services aux personnes qui se consacrent à l'enseignement et aux élèves des diverses écoles professionnelles et d'application; le livre est aussi un excellent *vade-mecum* pour les ingénieurs, les architectes, les officiers du génie, et le nombreux personnel des bureaux techniques. (J. N.).

SUR LA TRANSFORMATION CONTINUE(*);

par M. E. Liénard.

1. Avec les notations ordinaires, on a, dans tout triangle rectiligne ABC, les relations

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}, \\ A + B + C = \pi. \end{array}\right\} \qquad (I)$$

2. Adoptons pour les côtés du triangle des directions positives que nous désignons respectivement par α, β, γ; ainsi α représente l'une des deux directions BC ou CB. Nous indiquons par (α, β) la mesure de l'une quelconque des rotations qui, effectuées autour de C, amène la direction positive de BC sur la direction positive de CA, le sens des rotations positives étant le même pour tous les angles considérés.

Avec ces conventions, on a, en grandeur et en signe, les relations

$$\frac{BC}{\sin(\beta,\gamma)} = \frac{CA}{\sin(\gamma,\alpha)} = \frac{AB}{\sin(\alpha,\beta)}, \quad (\beta,\gamma) + (\gamma,\alpha) + (\alpha,\beta) = 2n\pi.$$

Posons, pour abréger,

$$BC = a', \quad CA = b', \quad AB = c',$$
$$\pi + (\beta,\gamma) = A', \quad \pi + (\gamma,\alpha) = B', \quad \pi + (\alpha,\beta) = C';$$

(*) Nous publions l'article de M. Liénard, quoiqu'on puisse lui reprocher d'être trop peu développé.

Au sujet de la règle des signes en géométrie, on peut consulter les articles suivants: Laguerre, N. A. M., année 1870, pp. 175-180; Ed. Lucas, N. C. M., t. II, pp. 384-391, et t. III, pp. 1-5; Lemoine, M., (2) I, pp. 58-64, 81-92, 115. (J. N.)

les égalités précédentes prendront la forme

$$\left.\begin{aligned} \frac{a'}{\sin A'} = \frac{b'}{\sin B'} = \frac{c'}{\sin C'}, \\ A' + B' + C' = (2k+1)\pi. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II)}$$

3. Si le système (I) entraîne (*)

$$f(a, b, c, A, B, C) = 0,$$

le système (II), par les calculs *parallèles*, fournira la relation

$$f(a', b', c', A', B', C') = 0.$$

4. Par exemple, la formule

$$\frac{S'}{p'-a'} \cdot \frac{S'}{p'-b'} = p'(p'-c')$$

comprend les relations

$$r r_c = (p-a)(p-b), \quad r_a r_b = p(p-c).$$

La formule

$$\Sigma \sin A' = 4 \cos\frac{A'}{2} \cos\frac{B'}{2} \cos\frac{C'}{2}$$

comprend les relations

$$\Sigma \sin A = 4 \cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2},$$

$$-\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}, \text{ etc.}$$

La question 710 (*Mathesis*, (2) II, p. 205) et ses analogues peuvent s'énoncer ainsi : La relation

$$\left(-\frac{S'}{p'-a'} + \frac{S'}{p'-b'} + \frac{S'}{p'-c'}\right)\left(\frac{S'}{p'-a'} - \frac{S'}{p'-b'} + \frac{S'}{p'-c'}\right)$$
$$\left(\frac{S'}{p'-a'} + \frac{S'}{p'-b'} + \frac{S'}{p'-c'}\right) = -8\,\frac{S'^3}{(p'-a')(p'-b')(p'-c')}$$

entraîne les suivantes

$$\frac{S'}{p'-a'} + \frac{S'}{p'-b'} + \frac{S'}{p'-c'} = 2p', \text{ etc.}$$

(*) On peut dire que les formules (I) sont comprises dans les formules (II) si l'on prend pour α, β, γ les directions BC, CA, AB ; que les égalités (II) correspondent à un autre choix, tel que BC, AC, AB. (J. N.)

5. *Des coordonnées normales.* Toute droite détermine, sur le plan, deux régions que nous caractériserons, l'une par le signe +, l'autre par le signe —. Nous affectons la distance d'un point à une droite du signe de la région à laquelle il appartient.

Les coordonnées normales d'un point sont les distances, avec leurs signes, de ce point aux trois côtés du triangle ABC. Pour des directions données α, β, γ, nous choisirons les régions positives de façon à vérifier l'égalité

$$a'x + b'y + c'z = b'c' \sin A' = 2S',$$

x, y, z désignant les coordonnées normales d'un point quelconque du plan.

●. On peut fixer les directions α, β, γ de manière que le point $\frac{S'}{p'}, \frac{S'}{p'}, \frac{S'}{p'}$ coïncide avec l'un quelconque des centres des circonférences tritangentes; que le point

$$\frac{1}{a'(p-a')}, \quad \frac{1}{b'(p-b')}, \quad \frac{1}{c'(p-c')}$$

se confonde avec l'un quelconque des points de Gergonne; que l'équation

$$\cos\tfrac{1}{2}A' \sqrt{x} + \cos\tfrac{1}{2}B' \sqrt{y} + \cos\tfrac{1}{2}C' \sqrt{z} = 0,$$

représente l'un quelconque des cercles tritangents, etc.

ˣNOTES MATHÉMATIQUES.

ˣ**7.** *Démonstration de l'inégalité* $x - \sin x < \frac{1}{4}x^3$. Prenons sur la circonférence trigonométrique O un arc $x = AM < \frac{1}{2}\pi$, menons le sinus MI', et élevons en A et M, sur la corde AM, deux perpendiculaires AB, MC qui rencontrent en B, C la tangente menée au milieu D de l'arc ADM. En exprimant que l'aire du segment ADM compris entre la corde et l'arc AM est plus petite que celle du rectangle ABCM, on trouve (E est le milieu de la corde AM) :

$$x - \sin x < 2AM.ED = 4 \sin\frac{x}{2}\left(1 - \cos\frac{x}{2}\right)$$

$$= 8 \sin\frac{x}{2} \sin^2\frac{x}{4} < 8 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x^2}{16} = \frac{x^3}{4}.$$

(Démonstration de M. Maurice Fouché, J. M. E., mars 1895).

8. *Sur une conique du plan d'un triangle* ABC, (Voir *Mathesis*, (2), V, p. 60, I). L'équation de la sécante mobile B'C' est

$$l\alpha + m\beta + n\gamma + k(\alpha \sin A + \beta \sin B + \gamma \sin C) = 0,$$

k étant un paramètre variable ; les équations de CC′ et de BB′ sont

$$(1) \qquad l\alpha + m\beta + k(\alpha \sin A + \beta \sin B) = 0,$$

$$(2) \qquad l\alpha + n\gamma + k(\alpha \sin A + \gamma \sin C) = 0.$$

En éliminant k entre (1) et (2) on trouve pour le lieu de M :

$$\alpha\beta(l \sin B - m \sin A) + \beta\gamma(n \sin B - m \sin C) + \gamma\alpha(n \sin A - l \sin C) = 0.$$

Ce lieu est donc une conique circonscrite au triangle de référence.

La tangente en B a pour équation

$$\alpha(l \sin B - m \sin A) + \gamma(n \sin B - m \sin C) = 0;$$

on voit qu'elle est parallèle à B′C′. La tangente en C est parallèle à la même direction ; le centre est donc au milieu de BC.

L'équation de la tangente en A est

$$\beta(l \sin B - m \sin A) + \gamma(n \sin A - l \sin C) = 0,$$

et celle de la parallèle à la direction donnée menée par A est

$$\beta(m \sin A - l \sin B) + \gamma(n \sin A - l \sin C) = 0;$$

ces droites sont donc conjuguées harmoniques par rapport à l'angle BAC.

Les parallèles aux asymptotes menées par A ont pour équation

$$(3) \qquad \beta^2 \sin B(m \sin A - l \sin B) = \gamma^2 \sin C(n \sin A - l \sin C).$$

Si la droite B′C′ est constamment perpendiculaire à BC, le lieu de M est la conique ayant pour sommets B et C, et passant par A. L'équation (3) se réduit alors à

$$\beta^2 \sin 2B + \gamma^2 \sin 2C = 0;$$

elle représente deux droites réelles lorsque l'un des angles B ou C est obtus, résultat facile à prévoir. (A. C.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

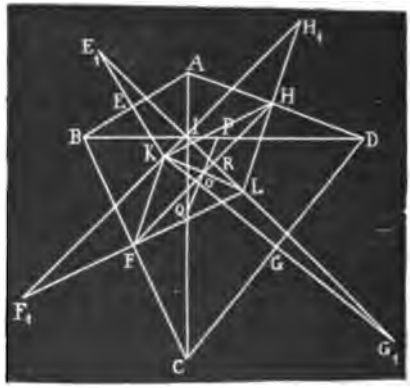
×Question 878.

(Voir *Mathesis*. (2), III, p. 216.)

Appelons pseudocarré tout quadrilatère dont les diagonales sont égales et perpendiculaires. Démontrer que les carrés construits intérieurement sur deux côtés opposés AB, CD *d'un pseudocarré ont même centre et que*

ce point est le milieu de la droite joignant les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés BC, DA. (J. NEUBERG.)

Solution par MM. ABSOLONNE, DROZ-FARNY, DÉPREZ, BARISIEN, MANDART, DELAHAYE, BELLENS, COLLETTE et M^lle^ DE HAAS. Soient I le point de rencontre des diagonales AC, BD; K, celui des perpendiculaires élevées aux milieux E, G des côtés AB, CD; L celui des perpendiculaires élevées aux milieux F, H des côtés BC, AD.



Les triangles KBD, KAC ont les trois côtés égaux chacun à chacun(*); les côtés homologues BD, AC étant perpendiculaires, il en est de même des côtés KB et KA, KD et KC. Il en résulte que K est le centre commun des carrés construits intérieurement sur les côtés AB, CD.

Par analogie L est le centre commun des carrés construits sur BC et DA.

Les médianes KP, KQ des triangles KBD, KAC sont aussi égales et perpendiculaires, et il en est de même des droites LP, LQ. Donc ***les centres*** K, L ***des carrés construits intérieurement sur les côtés d'un pseudocarré et les milieux*** P, Q ***des diagonales sont les sommets d'un carré.*** Par suite, KL passe par le milieu O des droites PQ, EG, FH, point qui est le centre du carré EFGH et le centre des moyennes distances du pseudocarré ABCD.

Soient E_1, F_1, G_1, H_1 les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés AB, BC, CD, DA du pseudocarré. La droite FH est perpendiculaire au milieu R de IL, car

$$IH = \tfrac{1}{2}AD = HL, \quad IF = \tfrac{1}{2}BC = FL;$$

comme elle passe aussi par les milieux O, F, H des lignes LK, LF_1, LH_1,

(*) L'égalité des triangles KBD, KAC s'établit encore très facilement lorsqu'on prend pour K, soit le centre du carré construit intérieurement sur AB, soit le second point d'intersection des circonférences ABI, CDI; de là deux variantes de la démonstration de la première partie de la question.

les points K, H_1, F_1, I sont en ligne droite. O étant le milieu de FH, LO divise H_1F_1 en deux parties égales.

Voici d'autres démonstrations de la seconde partie de la question.

1° La figure LFKH est un parallélogramme; car les triangles FKE, DAB ayant deux couples de côtés EK et BA, EF et BD perpendiculaires et proportionnels aux nombres 1 et 2, les côtés restants FK et AD sont perpendiculaires et ont le même rapport. Il résulte de là que K, H_1, F_1 sont situés sur une même parallèle à FH et que $F_1K = KH_1$ (Collette).

M. Barisien démontre par le calcul que LFKH est un parallélogramme.

2° Les triangles KBD, KAC étant égaux, les hauteurs issues de K sont égales, et K appartient à la bissectrice de l'angle BIC. Les points F_1, H_1 appartiennent à la même bissectrice; car les perpendiculaires F_1U, F_1V abaissées sur BI, CI sont égales puisque

$$F_1B = F_1C \quad \text{et} \quad \textit{angle}\, CF_1B = VF_1U = \tfrac{1}{2}\pi. \qquad \text{(Delahaye.)}$$

Il reste à démontrer que K est le milieu de F_1H_1.

3° Les points d'intersection I, L des circonférences décrites sur AD et BC comme diamètre sont symétriques par rapport à la ligne des centres HF; de même I et K sont symétriques par rapport à EG. Par suite, K et L sont symétriques par rapport au point de rencontre O des droites rectangulaires HF, EG. Il en résulte que la droite KI, parallèle à FH, passe par F_1 et H_1, et comme $FO = OH$, on a aussi $F_1K = KH_1$ (Droz-Farny.)

4° Soient ABMN, DCM'N' les carrés construits intérieurement sur AB et DC. Comme ils ont même centre K, les droites MM' et AD sont égales et parallèles. Les triangles KBM', KMC ayant deux couples de côtés égaux et perpendiculaires, les côtés restants BM', CM, sont égaux et perpendiculaires. Pour la même raison, si l'on considère les triangles F_1BM', F_1CM, on voit que les côtés F_1M' et F_1M sont égaux et perpendiculaires. Par suite, les triangles F_1MM' et H_1DA sont égaux et symétriques par rapport à K. (Mandart.)

Remarques. I. Les points E_1, F_1, G_1, H_1 sont les sommets d'un pseudocarré qui a même point d'intersection des diagonales et même centre des moyennes distances que ABCD. Les diagonales des deux pseudocarrés sont dans le rapport $\sqrt{2} : 1$. La distance des milieux des diagonales est la même dans les deux quadrilatères. (Déprez, Droz-Farny.)

II. Supposons les diagonales du quadrilatère ABCD égales entre elles et faisant l'angle $AID = \varphi$. Si L est le point d'intersection des média-

trices des côtés AD, BC, et K celui des côtés AB, CD, les triangles LBD, LCA ont encore leurs côtés égaux ; par suite, les angles BLC, DLA de deux couples de côtés homologues sont égaux à l'angle AID des bases. Ainsi, *les triangles isoscèles construits intérieurement sur les côtés opposés* BC, AD *et dont l'angle au sommet est égal à l'angle* BIC *des diagonales, ont même sommet. De même, les angles* AKB, CKD *sont égaux à* AIB.

Si P, Q sont les milieux des diagonales, les médianes LP, LQ des triangles égaux LBD, LCA sont égales et font entre elles un angle égal à AID ; de même KP = KQ et l'angle PKQ = BIC. Donc la droite KL est perpendiculaire au milieu O de la droite PQ.

Soient H_1, F_1 les sommets des triangles isoscèles construits extérieurement sur AD, BC et ayant pour angle au sommet le supplément de AID = ALD. Les quadrilatères LPKQ, LAH_1D, LBF_1C étant semblables, on a :

$$\frac{LO}{OK} = \frac{LH}{HH_1} = \frac{LF}{LF_1};$$

de plus, O étant le milieu de FH, on voit que K est le milieu de la droite F_1H_1. On peut aussi observer que les points K, H_1, F_1 appartiennent à le bissectrice de l'angle BIC.

Cette belle généralisation de la question 878 est due à M. Déprez.

Solution par M. Quint. Soient K, K′ les centres des carrés construits sur AB et DC. Portons sur IB, IA les vecteurs unitaires i, j et désignons par a, b, c, d les mesures des segments IA, IB, IC, ID affectées d'un signe convenable. Nous aurons les égalités vectorielles

$$IK = IB + BE + EK, \quad IK' = ID + DG + GK',$$

ou (*)

$$IK = bi + \tfrac{1}{2}(aj - bi) - \tfrac{1}{2}(bj + ai) = \tfrac{1}{2}(a - b)(j - i),$$
$$IK' = di + \tfrac{1}{2}(cj - di) - \tfrac{1}{2}(dj + ci) = \tfrac{1}{2}(c - d)(j - i).$$

Mais $a - b = c - d$; donc IK = IK′, et les points K et K′ coïncident. De même

$$IF_1 = IB + BF + FF_1 = bi + \tfrac{1}{2}(cj - bi) - \tfrac{1}{2}(ci + bj) = \tfrac{1}{2}(c - b)(j - i),$$
$$IH_1 = \tfrac{1}{2}(a - d)(j - i), \quad \text{d'où} \quad IK = \tfrac{1}{2}(IF_1 + IH_1),$$

ce qui démontre que K est le milieu de F_1H_1.

(*) Lorsqu'un segment de droite tourne de $\frac{1}{2}\pi$, ses projections sur deux axes rectangulaires restent réciproquement les mêmes, l'une d'elles changeant de signe ; d'où l'on conclut l'expression de EK, connaissant celle de BE. (J. N.).

NOTE. Voici une démonstration très simple des deux parties de la question 878.

Soient K, K′ les centres des carrés construits intérieurement sur AB et CD. Les composantes de la ligne brisée KEFGK′ sont respectivement perpendiculaires aux droites AB_1, BD, CA_1, DC et égales à leurs moitiés; les dernières droites formant une ligne fermée, K et K′ doivent coïncider.

Les côtés F_1B, BK du triangle F_1BK font un angle de 45° avec les côtés CB, BA du triangle CBA et sont à ces côtés dans le rapport $1 : \sqrt{2}$; par suite, les côtés F_1K, CA font également un angle de 45° et sont dans le rapport $1 : \sqrt{2}$. On en peut dire autant des lignes H_1K et AC; donc $F_1K = KH_1$, et les points F_1, K, H_1 sont en ligne droite.

La question 878 nous a été suggérée par la figure composée d'un triangle quelconque ABC et des carrés BCDE, CAFG, ABHK construits extérieurement sur les trois côtés (*). Si l'on considère les triangles BAF, KAC qui ont deux couples de côtés égaux et perpendiculaires, on trouve que les lignes BF, KC sont égales et perpendiculaires; donc le quadrilatère BCFK est un pseudocarré; A est le sommet commun des carrés construits intérieurement sur les côtés opposés CF, BK. Soient O_a, O_b, O_c les centres des carrés BCDE, CAFG, ABHK; d'après un théorème connu, la ligne AO_a est égale et perpendiculaire à la ligne O_bO_c; par analogie, la droite qui joint A au centre O'_a du carré construit sur FK est aussi égale et perpendiculaire à O_bO_c; donc les points A, O_a, O'_a sont en ligne droite et $AO_a = AO'_a$.

Soient I_a, I_b, I_c les centres des carrés construits intérieurement sur les côtés du triangle ABC. Les propriétés suivantes nous ont été communiquées par M. A. C. :

1° Les triangles AO_cI_b, AI_cO_b, O_bI_aC, I_bO_aC, O_cBI_a, I_aBO_a sont égaux entre eux et semblables à ABC.

2° Les figures $AO_bI_aO_c$, $BO_cI_bO_a$, $CO_aI_cO_b$ sont des parallélogrammes.

(*) Au sujet de cette figure, nous avons demandé des renseignements bibliographiques dans l'*Intermédiaire des mathématiciens* (n° 120). On peut consulter : Un article de M. Mackay dans les *Proceedings of the Edinburgh Math. Society*, vol. VI ; un article de M. H. Van Aubel (N. C. M., t. IV, pp. 40) ; un article de nous dans la N. C. M., t. IV, pp. 142-145 et nos *Notes de Géométrie* présentées au Congrès de Besançon (1893) ; une note de M. Collignon présentée au Congrès de Marseille (1891) ; une note de M. Brocard dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*, III, 1874, pp. 38-40. (J. N.).

M. H. Van Aubel a signalé les mêmes théorèmes pour des triangles O_aBC, O_bCA, O_cAB construits extérieurement et des triangles I_aCB, I_bAC, I_cBA construits intérieurement sur les côtés d'un triangle ABC, ces triangles étant semblables à un même triangle donné $\alpha\beta\gamma$. (Voir *Mathesis*, (1) I, p. 118 et 166). (J. N.).

×Question 879.

(Voir *Mathesis*, (2) III, p. 216.)

Les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés d'un quadrilatère convexe sont les sommets d'un pseudocarré. (H. Van Aubel.)

Solution par MM. Absolonne, Mandart, Delahaye, Droz-Farny. Soient(*) E, F, G, H, P, Q les milieux des côtés et des diagonales AB, BC, CD, DA, BD, AC du quadrilatère ABCD, et soient E_1, F_1, G_1, H_1 les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés. Les deux triangles E_1EP, PHH_1 ont deux couples de côtés égaux et perpendiculaires; donc les troisièmes E_1P, PH_1 sont égaux et perpendiculaires. De même les droites F_1P, PG_1 sont égales et perpendiculaires. On en conclut que les triangles E_1PG_1, H_1PF_1 ont deux couples de côtés égaux et perpendiculaires; par suite les troisièmes côtés E_1G_1, H_1F_1 sont égaux et perpendiculaires.

Note. Plus simplement : Si P est le milieu de BD, les lignes brisées E_1EPGG_1, F_1FPHH_1 ont des composantes qui sont, deux à deux, égales et perpendiculaires; donc les résultantes E_1G_1, F_1H_1 sont égales et perpendiculaires.

D'après la première partie de la démonstration ci-dessus, P est le centre commun des carrés construits intérieurement sur les côtés E_1H_1, F_1G_1 du pseudocarré $E_1F_1G_1H_1$; par analogie, le milieu Q de AC est le centre commun des carrés construits intérieurement sur les côtés E_1F_1, G_1H_1. D'après un théorème de M. Laisant (Voir Congrès du Havre, 1877; N.C.M, t. VI, p. 474), les quadrilatères ABCD, $E_1F_1G_1H_1$ ont même centre des moyennes distances.

(*) Le lecteur peut se rapporter à la figure de la question 878. Le quadrilatère ABCD est quelconque pourvu que l'on entende convenablement le mot « extérieurement » dans le cas d'un quadrilatère étoilé.

On ne peut donner arbitrairement les centres E_1, F_1, G_1, H_1 des carrés construits extérieurement sur les côtés d'un quadrilatère ABCD : la figure $E_1F_1G_1H_1$ doit être un pseudocarré. Si cette condition est remplie, il existe une infinité de quadrilatères primitifs ABCD ; les sommets A, B, C, D décrivent des figures égales. En effet, si le point A décrit une figure donnée σ, le point B décrit la même figure tournée de $\frac{\pi}{2}$ autour de E_1, etc.

M. Barisien fait observer qu'en faisant coïncider deux sommets consécutifs du quadrilatère ABCD, on obtient cette propriété du triangle : *Si* O_a, O_b, O_c *sont les centres des carrés construits extérieurement sur les côtés* BC, CA, AB *d'un triangle* ABC, *les droites* AO_a *et* O_bO_c, BO_b *et* O_cO_a, CO_c *et* O_aO_b *sont égales et perpendiculaires.* (J. N.)

Solution par MM. Quint *et* Barisien. Soient a, b, c, d les côtés AB, BC, CD, DA et A, B, C, D les angles du quadrilatère donné. On sait que dans un quadrilatère à diagonales rectangulaires la somme des carrés de deux côtés opposés est égale à la somme des carrés des deux autres, et réciproquement. Or les triangles E_1BF_1, G_1DH_1 donnent

$$\overline{E_1F_1}^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{2}b^2 + ab\sin B,$$
$$\overline{G_1H_1}^2 = \tfrac{1}{2}c^2 + \tfrac{1}{2}d^2 + cd\sin C ;$$

d'où

$$\overline{E_1F_1}^2 + \overline{G_1H_1}^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2 \text{ surface ABCD} ;$$

on en conclut immédiatement

$$\overline{E_1F_1}^2 + \overline{G_1H_1}^2 = \overline{F_1G_1}^2 + \overline{H_1E_1}^2.$$

Ensuite, dans les quadrilatères E_1BCG_1, E_1ADG_1,

$$\overline{E_1G_1}^2 = \overline{E_1B}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CG_1}^2 - 2E_1B\,.\,BC\cos E_1BC - 2G_1C\,.\,CB\cos G_1CB$$
$$- 2E_1B\,.\,G_1C\cos(E_1B, G_1C)$$
$$= \frac{1}{2}a^2 + b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{ab}{\sqrt{2}}\cos(B + 45^\circ) - \frac{cb}{\sqrt{2}}\cos(C + 45^\circ)$$
$$- ac\sin(B + C),$$

$$E_1G_1^2 = \frac{1}{2}a^2 + d^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{ad}{\sqrt{2}}\cos(A + 45^\circ) - \frac{cd}{\sqrt{2}}\cos(D + 45^\circ)$$
$$- ac\sin(A + D) ;$$

en additionnant, on trouve

$$2\overline{E_1G_1}^2 = (a^2+b^2+c^2+d^2) - \frac{ab}{\sqrt{2}}\cos(B+45°) - \frac{bc}{\sqrt{2}}\cos(C+45°)$$
$$- \frac{cd}{\sqrt{2}}\cos(D+45°) - \frac{da}{\sqrt{2}}\cos(A+45°).$$

On voit facilement que $2\overline{F_1G_1}^2$ a la même valeur.

Autre solution analytique par M. Déprez. Notre zélé correspondant accompagne sa solution de quelques intéressantes remarques dont quelques-unes font l'objet de la question 964, que nous avions proposée avant de prendre connaissance des recherches de M. Déprez.

×Question 925.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 80.)

Soit

$$N = aB^n + bB^{n-1} + cB^{n-2} + \cdots$$

un nombre écrit dans le système dont la base est B. *Si nous désignons par* N_α, N_β, N_γ, *ce qui devient* N *quand on remplace* B *respectivement* α, β, γ, *l'expression*

$$\frac{(\beta-\gamma)N_\alpha + (\gamma-\alpha)N_\beta + (\alpha-\beta)N_\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

est un nombre entier. (H. Mandart.)

Solution par M. Fauquembergue. L'expression considérée se réduit à un nombre entier; car le numérateur s'annule pour $\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$ et $\gamma = \alpha$; il est, par suite, divisible par

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha).$$

L'énoncé de cette question a été rectifié par M. Fauquembergue

---

×Question 927.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 80).

Trouver pour A *et* B *des valeurs entières telles que les racines des deux équations*

$$x^2 + Ax + B = 0, \quad x^2 + Ax - B = 0$$

soient à la fois rationnelles. (Mackenzie.)

Solution par M. Fauquembergue. Ecrivons que les discriminants de ces équations sont carrés parfaits :

$$A^2 + 4B = C^2, \quad A^2 - 4B = D^2;$$

d'où

$$B = \frac{C^2 - D^2}{8} \quad \text{et} \quad 2A^2 = C^2 + D^2$$

ou

$$A^2 = \left(\frac{C+D}{2}\right)^2 + \left(\frac{C-D}{2}\right)^2.$$

Cette dernière équation est vérifiée si l'on pose

$$A = \alpha^2 + \beta^2, \quad \frac{C+D}{2} = \alpha^2 - \beta^2, \quad \frac{C-D}{2} = 2\alpha\beta.$$

De là on déduit

$$\frac{C^2 - D^2}{8} = \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2).$$

Par suite les valeurs générales de A et B sont

$$A = \alpha^2 + \beta^2, \quad B = \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2),$$

α et β étant des nombres entiers quelconques. Celles de x sont respectivement

$$-\beta(\alpha+\beta), \quad -\alpha(\alpha-\beta) \quad \text{et} \quad \beta(\alpha-\beta), \quad -\alpha(\alpha+\beta).$$

Solution analogue par MM. Boutin, Brocard, Droz-Farny, François, Jonesco, Strymbersch, Cristescu et Vanderstegen. M. Droz Farny trouve les formules

$$A = (\alpha^2 + \beta^2)t, \quad B = \alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2)t^2,$$

où t, α, β sont les nombres entiers quelconques.

Question CCCXII.

(Voir N. C. M., t. III, p. 433).

Démontrer que si $8q + 7$ *est premier*, $2^{4q+3} - 1$ *ne l'est pas*. (E. Lucas).

Solution par M. M. Fauquembergue. Soit $4q + 3 = p$. Le nombre p peut être supposé premier, sans quoi $2^p - 1$ ne serait évidemment pas premier.

D'après le théorème de Fermat, $2p + 1$ étant premier, on a la congruence

$$2^{2p} - 1 \equiv 0 \text{ [Mod. } (2p+1)], \quad \text{ou} \quad (2^p+1)(2^p-1) \equiv 0 \text{ [Mod. } (2p+1)].$$

Par suite, l'un des facteurs $2^p + 1$ ou $2^p - 1$ est divisible par $(2p + 1)$. Or, on sait que chaque racine de la congruence $x^{\frac{1}{2}(P-1)} - 1 \equiv 0 \,(\text{Mod.}P)$, P étant premier, est un résidu quadratique et que chaque racine de la congruence $x^{\frac{1}{2}(P-1)} + 1 \equiv 0 \,(\text{Mod. } P)$ est un non-résidu quadratique. On sait aussi que $+2$ est résidu quadratique de tout nombre premier de l'une des formes $8k + 1$, $8k + 7$. Donc c'est le facteur $2^p - 1$, c'est-à-dire $2^{4q+3} - 1$, qui est divisible par $2p + 1$ ou $8q + 7$. C. Q. F. D.

Parthenay, 11 janvier 1895.

QUESTIONS D'EXAMEN.

886. Les côtés AE, BC d'un pentagone régulier ABCDE se rencontrent en F. La figure tournant autour de DF, les droites FB, CD engendrent la même surface

$$\frac{1}{4}\pi a^2 (\sqrt{5} + 1),$$

et les triangles FAB, DCE engendrent le même volume

$$\frac{1}{24}\pi a^3 \sqrt{5 + 2\sqrt{5}};$$

a désigne la longueur du côté AB. (Watson.)

887. Résoudre le système d'équations :

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x + y\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = r\sqrt{1 + \sqrt[3]{\frac{x^2}{y^2}}}.$$

(*Bulletin scientifique* de Lebon.)

Poser $x = yz^3$, ce qui ramène les équations à

$$y^2(z^6 + 1) = a^2,$$

$$yz(z^3 + 1) = r\sqrt{1 + z^3}, \text{ ou } y^2z^2(z^3 + 1) = r^2;$$

en éliminant y on trouve après suppression d'un facteur $z^3 + 1$ une équation bicarrée :

$$r^2z^4 - (a^2 + r^2)z^2 + r^2 = 0.$$

888. Par un point M on mène des parallèles P_1P_2, Q_1Q_2, R_1R_2 aux côtés BC, CA, AB d'un triangle ; ces droites rencontrent les deux autres côtés respectivement en P_1 et P_2, Q_1 et Q_2, R_1 et R_2. Trouver le lieu du point M lorsque la somme

$$MP_1 \cdot MP_2 + MQ_1 \cdot MQ_2 + MR_1 \cdot MR_2$$

a une valeur donnée K. Pour quel point intérieur au triangle ABC cette somme est-elle un maximum? (MILLER.)

Si x, y, z sont les coordonnées normales de M, on trouve facilement

$$K = \frac{4R^2}{abc}(ayz + bzx + cxy).$$

Le lieu demandé est une circonférence concentrique avec la circonférence circonscrite au triangle ABC. La somme K est proportionnelle à la puissance de M par rapport au cercle ABC; elle est donc un maximum lorsque M coïncide avec le centre de ce cercle. (Voir *Mathesis*, (2), V, p. 33).

QUESTIONS PROPOSÉES.

*1619. Trouver les nombres qui, multipliés par 9, donnent pour produits les mêmes nombres renversés. (J. JONESCO.)

*1620. L'orthocentre H d'un triangle ABC est d'égale puissance par rapport aux quatre cercles qui ont respectivement les mêmes centres que les cercles tritangents et dont les rayons sont égaux à ceux de ces cercles multipliés par $\sqrt{2}$. (A. C.)

1621. Par le sommet O de la cubique

$$y = a\sqrt{\frac{x}{ka - x}}$$

on mène une sécante OAB et la sécante OA'B' symétrique de OAB par rapport à l'axe de la courbe. 1° L'aire comprise entre la cubique et son asymptote est finie et égale à $k\pi a^2$. 2° Les tangentes en A et B' se rencontrent sur la cubique. 3° Le lieu du point de rencontre des tangentes en A et B est une cubique.

Cette dernière cubique, quelle que soit la valeur de k, passe par deux points fixes. (E. N. BARISIEN.)

Pour $k = 1$, la cubique considérée ici devient la *versiera* ou *courbe d'Agnesi*.

1622. On donne une surface quelconque S, un point O et un ellipsoïde ε. M étant un point quelconque de S, on construit un ellipsoïde E homothétique à ε, passant par O et ayant son centre au milieu de la droite OM. Démontrer que le point de contact N de l'ellipsoïde E avec son enveloppe est situé dans le plan tangent T mené en M à S, et que la droite ON est parallèle au diamètre conjugué avec le plan T dans l'ellipsoïde E. (DESAINT.)

Rectification. Page 89, ligne 18, au lieu de *d'un complexe linéaire*, lire *du complexe linéaire*.

PROPRIÉTÉS DES CERCLES DE CHASLES;

par M. E. N. Barisien.

Lorsqu'on applique la solution de Chasles à la recherche des axes d'une ellipse E dont on connaît deux diamètres conjugués, on rencontre deux cercles concentriques à l'ellipse et ayant pour rayons respectifs $(a+b)$ et $(a-b)$, où $2a$ et $2b$ représentent les axes de la conique.

Ces cercles, que nous proposons d'appeler *cercles de Chasles*, jouissent de nombreuses propriétés. La présente note a pour but de résumer les propriétés que nous avons pu recueillir dans diverses publications mathématiques ; elle comprend aussi un grand nombre de résultats inédits, dont les uns nous ont été communiqués par M. E. Lemoine et dont les autres proviennent de nos recherches personnelles(*).

Les cercles de Chasles sont aussi les lieux géométriques des centres instantanés de rotation d'une droite de longueur $a \pm b$ qui glisse entre les axes de l'ellipse : le point qui divise cette droite en segments respectivement additifs ou soustractifs, égaux à a et b, décrit l'ellipse. Plus généralement, dans la génération épicycloïdale de l'ellipse, chacun des cercles de Chasles peut être pris pour le cercle fixe sur lequel on fait glisser intérieurement un cercle de rayon moitié moindre.

Pour plus de facilité nous réunissons ici les principales notations dont il sera fait usage dans cette note :

Σ, Σ' les cercles de Chasles.

O, F, F', A, A', B, B' le centre, les foyers et les sommets de l'ellipse E.

Les cercles décrits sur les axes AA', BB' comme diamètres sont appelés respectivement *cercle principal* et *cercle secondaire*.

M, M_1 deux points de E symétriques par rapport à AA'.

M', M'_1 les points du cercle principal situés sur la droite MM_1 (M et M' du même côté de AA').

(*) Nous prions les correspondants que ces questions intéressent, de vouloir bien nous signaler les propositions que nous n'aurions pas mentionnées; ils pourront les adresser, soit à la Rédaction de *Mathesis*, soit à celle de l'*Intermédiaire des mathématiciens*. Ces nouvelles propriétés seront résumées dans un article complémentaire.

φ l'anomalie M'OA de M.

N, N' les points où la normale en M est coupée par les rayons OM', OM'_1.

I, I' les points où la normale MN coupe les axes Ox, Oy.

T, T' les points où la tangente en M rencontre les axes.

D, D' les longueurs du demi-diamètre OM et du demi-diamètre Om conjugué à OM.

D'autres notations se présenteront dans la suite de cette note.

Les équations de Σ et Σ' sont respectivement

$$x^2 + y^2 - (a + b)^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - (a - b)^2 = 0;$$

on peut les réunir dans l'équation unique

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4a^2 (x^2 + y^2) = 0.$$

I. Les cercles de Chasles comme lieux géométriques.

1. On considère un point M de l'ellipse E et les points M', M'_1 du cercle principal qui ont même abscisse que M (ou les points m', m'_1 du cercle secondaire qui ont même ordonnée que M).

1° Le lieu du point de rencontre N de la normale en M à E avec la droite OM' (ou Om') est le cercle Σ. 2° Le lieu du point de rencontre N' de la normale en M avec la droite OM'_1 (ou Om'_1) est le cercle Σ'.

Cette proposition est un cas particulier de la suivante : On considère deux ellipses E, E' ayant un axe commun $AA' = 2a$; soient $2b$, $2b'$ les deux autres axes. Le lieu du point de rencontre des normales à ces ellipses aux points ayant même abscisse se compose des deux ellipses représentées par

$$\frac{a^2x^2}{(a^2 \pm bb')^2} + \frac{y^2}{(b \pm b')^2} = 1. \ (*)$$

2. Sur la normale à E en M, on prend à partir de M des longueurs MN et MN' égales au demi-diamètre Om conjugué à OM. Le lieu des points N, N' se compose des cercles Σ et Σ'.

Cette proposition admet de nombreuses variantes d'après les différentes expressions de Om : 1° On construit la moyenne géométrique entre les

---

(*) Nous réunirons souvent en une seule deux équations qui ne diffèrent que par les signes de certains termes ; alors les signes supérieurs sont associés, de même que les signes inférieurs.

rayons vecteurs MF, MF' *en grandeur et en direction;* l'extrémité N ou N' de cette moyenne décrit Σ ou Σ'.

2° On prend sur la normale en M les segments

$$MN = MN' = \sqrt{MT \cdot MT'};$$

3° ou

$$MN = MN' = \sqrt{MI \cdot MI'};$$

4° ou

$$MN = MN' = \sqrt{Ff \cdot Ff'},$$

f et *f'* étant les projections des foyers F et F' sur la tangente en M' au cercle principal.

On peut encore considérer les théorèmes qui précèdent, comme un cas particulier du suivant, dû à A. Transon (N. A. M., 1873, pp. 5-20) : A partir de chaque point M d'une ellipse et sur une droite faisant un angle constant α avec la normale, on porte, dans les deux sens, les longueurs

$$MN = MN' = k\sqrt{MF \cdot MF'};$$

les points M, N' décrivent deux ellipses.

L'énoncé suivant est emprunté aux exercices de la Géométrie analytique de Briot et Bouquet : A partir d'un point quelconque M d'une ellipse, on porte sur la normale les longueurs MN et MN' égales à $\frac{k^2}{p}$, où k est une constante et p la distance du centre O à la tangente en M. Le lieu des points N et N' se compose des ellipses

$$\frac{x^2}{\left(a \pm \frac{k^2}{a}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b \pm \frac{k^2}{b}\right)^2} = 1.$$

Si $k^2 = ab$, on a $MN = MN' = Om$ et l'on retrouve les cercles de Chasles.

3. Le lieu des points X tels que

$$\overline{XF}^2 + \overline{XF'}^2 = 4a(a+b), \quad \text{ou} \quad \overline{XF}^2 + \overline{XF'}^2 = 4a(a-b),$$

sont respectivement le cercle Σ ou le cercle Σ'.

4. Le centre du cercle osculateur en M se projette en ω sur la droite MO. On décrit les deux cercles qui passent par les points O, ω et qui touchent la normale menée en M à l'ellipse : le lieu des points de contact de la normale avec les deux cercles se compose des cercles Σ et Σ'.

5. On considère une parabole W ayant son foyer en un point quelconque M d'une ellipse et passant par les foyers F, F' de cette ellipse.

Le lieu du point de rencontre des tangentes menées en F et F' à la parabole se compose des cercles Σ et Σ'. (B. Niewenglowski, *Revue de Mathématiques spéciales*, question 360.)

6. Les cercles Σ et Σ' font partie du lieu des centres des cercles tangents à E, tels que ces cercles aient avec E deux tangentes communes parallèles. Le reste de ce lieu est la podaire du centre de la développée de l'ellipse. (E. Lemoine.)

7. Les cercles Σ et Σ' sont le lieu des foyers des coniques ayant pour axes de symétrie la tangente et la normale en un point M de E et touchant au centre O de E, soit le grand axe AA', soit le petit axe BB'.

8. Om étant le demi-conjugué à OM, on détermine sur la normale menée en M les points N, N' tels que

$$\frac{NF.NF'}{Om} = 2(a+b), \quad \frac{N'F.N'F'}{Om} = 2(a-b).$$

Ces points décrivent respectivement les cercles Σ et Σ'.

II. Propriétés, relations et lieux géométriques concernant les cercles de Chasles.

M étant un point quelconque de l'ellipse E, M' et M'_1 désigneront les points du cercle principal qui ont la même abscisse que M, N et N' les points où la normale en M à E est rencontrée par les droites OM' et OM'_1.

1. Si on projette le point N' en N'_1 sur le grand axe, la droite $M'N'_1$ est parallèle à la normale MN'; par suite $MM' = N'N'_1$.

Si on projette N en N_1 sur le grand axe, la droite $M'N_1$ est parallèle à la normale à E au point M_1 symétrique de M par rapport au grand axe; par suite,

$$MN' = M'_1N_1, \quad MN_1 = M'_1N'.$$

2. Posons

$$\text{aire } MM'N = S, \quad \text{aire } MM'_1N' = S', \quad \text{aire } ONN' = \sigma;$$

nous aurons les relations

$$\frac{S}{\sigma} = \frac{b}{2(a+b)}, \quad \frac{S'}{\sigma} = \frac{b}{2(a-b)}, \quad \frac{S}{S'} = \frac{a-b}{a+b}, \quad \frac{1}{S} - \frac{1}{S'} = \frac{4}{\sigma}.$$

3. Le centre de gravité G du triangle MM'N, le centre C du cercle

circonscrit et l'orthocentre H décrivent, respectivement, l'ellipse et les quartiques :

$$\frac{x^2}{(3a+b)^2}+\frac{y^2}{4(a+b)^2}=\frac{1}{9},$$

$$4x^2[(a+b)^2-4y^2]=[(2a+b)(a+b)-4y^2]^2,$$

$$x^2(a+b)^2[(a+b)^2-y^2]=a^2[(a+b)^2-2y^2]^2.$$

Soient G', C', H' les points analogues du triangle MM'_1N'; pour passer aux lieux de ces points, il suffit de changer b en $-b$ dans les équations précédentes.

4. Soient C_1, C'_1 les symétriques de C, C' par rapport à O. Les milieux des droites C_1C' et CC'_1 se meuvent sur l'ellipse

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{1}{4}.$$

5. La droite GG' enveloppe une développée d'ellipse :

$$(6ax)^{\frac{2}{3}}+(3by)^{\frac{2}{3}}=(6a^2-2b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

6. La droite CC' est parallèle à la normale en M et égale à OM.

7. Les droites CN et C'N', et la tangente en M à E concourent au même point T de AA'.

8. La droite d'Euler CGH du triangle MM'N rencontre AA' en un point N'_2, tel que $TN'_2 = TN'_1$, et C est le milieu de HN'_2.

La droite C'G'H' coupe AA' en un point N_2, tel que $TN_2 = TN_1$, et C' est le milieu de $H'N_2$.

9. Les orthocentres des trois triangles MM'N, MM'_1N', ONN' sont sur une même perpendiculaire à AA'.

10. Le cercle qui a pour diamètre TT' passe par N et N' (p. 131, 2°). Il a pour enveloppe la courbe

$$(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}=(ax)^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}},$$

et son centre parcourt la kreuzcurve

$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=4.$$

11. L'orthocentre du triangle ONN' décrit la sextique

$$x^2y^2(a^2y^2+b^2x^2)=(a^2y^2-b^2x^2)^2.$$

12. Le cercle NON′ rencontre la droite OM sur la quartique

$$(x^2+y^2)^2=(a^2+b^2)^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right),$$

podaire de O par rapport à l'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2=(a^2+b^2)^2.$$

13. L'enveloppe de la droite M′N′ est la courbe

$$[x(2a-b)]^{\frac{2}{3}}+(by)^{\frac{2}{3}}=[2a(a-b)]^{\frac{2}{3}},$$

qui est la développée de l'ellipse ayant pour axes $2a-b$ et b.

En changeant b en $-b$ on obtient l'enveloppe de la droite $M_1'N$.

14. Les droites M′N′ et $M_1'N$ se coupent sur l'ellipse

$$a^2x^2+b^2y^2=4a^4.$$

15. La tangente en M et le rayon OM′N se coupent sur la quartique

$$(ay^2+bx^2)^2=a^2b^2(x^2+y^2),$$

dont l'aire est

$$U=\pi\frac{\sqrt{ab}\,(a+b)}{2}.$$

La tangente en M et le rayon OM_1' se coupent sur la courbe

$$(ay^2-bx^2)^2=a^2b^2(x^2+y^2).$$

16. L'intersection de la tangente en M′ avec le rayon OM décrit la quartique

$$(ay^2+bx^2)^2=a^2(a^2y^2+b^2x^2),$$

dont l'aire est

$$U=\frac{\pi a^2(a+b)}{2\sqrt{ab}}.$$

L'aire de cette courbe est à l'aire de la courbe du n° 15 dans le rapport $(a:b)$.

Le lieu du point de rencontre de la tangente en M′ au cercle principal avec le rayon OM_1 a pour équation

$$(ay^2-bx^2)^2=a^2(a^2y^2+b^2x^2).$$

(*A continuer*).

SUR DEUX SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES,

par M. E. Barbette, docteur en sciences physiques et mathématiques.

Chacune des deux séries trigonométriques

$$P \equiv \sum_{p=0}^{p=\infty} 2^p \left(1 - \cos\frac{x}{2^{p+1}}\right) \sin\frac{x}{2^{p+1}},$$

$$Q \equiv \sum_{p=0}^{p=\infty} 3^p \left(\sin\frac{x}{2.3^{p+1}} + \sin\frac{x}{2.3^p}\right)\left(\cos\frac{x}{2.3^{p+1}} - \cos\frac{x}{2.3^p}\right)$$

a pour limite le segment déterminé par l'arc x et la corde sous-tendante.

Solution analytique. 1° La somme des $p+1$ premiers termes de P est

$$\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2} + 2\left(1-\cos\frac{x}{4}\right)\sin\frac{x}{4} + \cdots + 2^p\left(1-\cos\frac{x}{2^{p+1}}\right)\sin\frac{x}{2^{p+1}}$$

$$= \sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin x + 2\sin\frac{x}{4} - \sin\frac{x}{2} + \cdots + 2^p \sin\frac{x}{2^{p+1}} - 2^{p-1}\sin\frac{x}{2^p}$$

$$= -\frac{1}{2}\sin x + 2^p \sin\frac{x}{2^{p+1}}.$$

Or, pour $p = \infty$,

$$\text{limite } 2^p \sin\frac{x}{2^{p+1}} = \text{limite } \frac{\sin\dfrac{x}{2^{p+1}}}{\dfrac{x}{2^{p+1}}} \times \frac{x}{2} = \frac{x}{2},$$

donc

$$P = \frac{1}{2}(x - \sin x).$$

2° On a

$$\left(\sin\frac{x}{2.3^{p+1}} + \sin\frac{x}{2.3^p}\right)\left(\cos\frac{x}{2.3^{p+1}} - \cos\frac{x}{2.3^p}\right)$$

$$= 2\sin^3\frac{x}{3^{p+1}} = \frac{1}{2}\left(3\sin\frac{x}{3^{p+1}} - \sin\frac{x}{3^p}\right)$$

Donc la somme des $(p+1)$ premiers termes de Q a pour expression

$$\frac{1}{2}\left[\left(3\sin\frac{x}{3} - \sin x\right) + 3\left(3\sin\frac{x}{9} - \sin\frac{x}{3}\right) + \cdots + 3^p\left(3\sin\frac{x}{3^{p+1}} - \sin\frac{x}{3^p}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\sin x + 3^{p+1}\sin\frac{x}{3^{p+1}}\right).$$

Or, pour $p = \infty$

$$\text{limite } 3^{p+1} \sin \frac{x}{3^{p+1}} = \text{limite} \frac{\sin \frac{x}{3^{p+1}}}{\frac{x}{3^{p+1}}} \times x = x,$$

donc

$$Q = \tfrac{1}{2}(x - \sin x).$$

Solution géométrique. Soit ABC un segment circulaire de centre O, C étant le milieu de l'arc AB. On a

$$\text{segment ACB} = \text{secteur AOB} - \text{triangle AOB} = \tfrac{1}{2}(x - \sin x).$$

1° Divisons l'arc $AB = x$ successivement en 2 parties égales $BC = CA$, en 4 parties égales $BC_1 = C_1C = \cdot\ \cdot$, en 2^k parties égales, k prenant toutes les valeurs entières de 1 à $+\infty$; menons les cordes sous-tendantes et joignons les points de division au centre O par les rayons OMC, OM_1C_1, ···, M étant sur AB, M_1 sur BC, etc. Le segment ABC peut être considéré comme la limite de la somme des triangles

$$2BCM + 4BC_1M_1 + 8BC_2M_2 + \cdots\cdots$$

Mais

$$MC = 1 - \cos\frac{x}{2} \quad \text{et} \quad BM = \sin\frac{x}{2};$$

$$M_1C_1 = 1 - \cos\frac{x}{4} \quad \text{et} \quad BM_1 = \sin\frac{x}{4};$$

$$M_2C_2 = 1 - \cos\frac{x}{8} \quad \text{et} \quad BM_2 = \sin\frac{x}{8}; \ldots$$

Donc

$$\text{segment ABC} = \left(1 - \cos\frac{x}{2}\right)\sin\frac{x}{2} + 2\left(1 - \cos\frac{x}{4}\right)\sin\frac{x}{4} + \cdots = P.$$

2° Divisons l'arc AB en 6 parties égales, en 18 parties égales, ..., en 2.3^k parties égales successivement; joignons les points de division de deux en deux, en sorte que

$$BA_1 = A_1B_1 = B_1A; \quad BA_2 = A_2B_2 = B_2A_1; \quad BA_3 = A_3B_3 = B_3A_2; \ldots$$

Le segment ACB peut être considéré comme la limite de la somme des trapèzes

$$BA_1B_1A + 3BA_2B_2A_1 + 9BA_3B_3A_2 + \cdots$$

Or

$$AB = 2\sin\frac{x}{2}, \quad A_1B_1 = 2\sin\frac{x}{6}, \quad M_1N_1 = \cos\frac{x}{6} - \cos\frac{x}{2};$$

$$A_1B = 2\sin\frac{x}{6}, \quad A_2B_2 = 2\sin\frac{x}{18}, \quad M_2N_2 = \cos\frac{x}{18} - \cos\frac{x}{6};$$

$$A_2B = 2\sin\frac{x}{18}, \quad A_3B_3 = 2\sin\frac{x}{54}, \quad M_3N_3 = \cos\frac{x}{54} - \cos\frac{x}{18};$$

. . . . . .

donc

$$\text{segment ACB} = \left(\sin\frac{x}{6} + \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{6} - \cos\frac{x}{2}\right)$$
$$+ 3\left(\sin\frac{x}{18} + \sin\frac{x}{6}\right)\left(\cos\frac{x}{18} - \cos\frac{x}{6}\right)$$
$$+ 9\left(\sin\frac{x}{54} + \sin\frac{x}{18}\right)\left(\cos\frac{x}{54} - \cos\frac{x}{18}\right) + \cdots\cdots = Q.$$

Remarque. Supposons l'arc x compris entre 0° et 90°; alors

$$P = \sum_{p=0}^{p=\infty} 2^{p+1}\sin^2\frac{x}{2^{p+2}}\cdot\sin\frac{x}{2^{p+1}} < \sum_{p=0}^{p=\infty} 2^{p+1}\cdot\frac{x^3}{2^{3p+3}} \quad \text{ou} \quad \frac{x^3}{16}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{1}{2^{2p}},$$

comme on le voit en remplaçant les sinus par les arcs correspondants.

Or

$$\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{1}{2^{2p}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3},$$

donc

$$P \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(x - \sin x) < \frac{x^3}{12} \quad \text{et} \quad x - \sin x < \frac{x^3}{6}.$$

De même,

$$Q = 2\sum_{p=0}^{p=\infty} 3^p\cdot\sin^3\frac{x}{3^{p+1}} < \frac{2x^3}{27}\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{1}{3^{2p}} \quad \text{ou} \quad \frac{2x^3}{27}\times\frac{9}{8} \quad \text{ou} \quad \frac{x^3}{12},$$

et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

La différence entre un arc, compris entre 0 *et* 90°, *et son sinus est moindre que le sixième du cube de l'arc.*

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE PARIS.

Concours de 1895.

MATHÉMATIQUES (29 mai 1895).

On donne : d'une part deux droites D et D′ ne se coupant pas ; d'autre part deux autres droites Δ et Δ′ ne se coupant pas. On considère une droite variable OA passant par l'origine O, et située dans le plan de coordonnées *xoy*.

1° Former l'équation de la surface du deuxième degré S qui contient D, D′, et OA.

2° La surface S, et la surface analogue Σ qui contient Δ, Δ′ et OA, se coupent, en dehors de OA, suivant une certaine courbe. Trouver la surface lieu géométrique de cette courbe, lorsque OA décrit le plan *xoy*.

3° Déterminer les droites situées sur cette surface.

4° Étudier complètement cette surface dans le cas particulier où les quatre droites D, D′, Δ et Δ′ sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde qui passe au point O ; et montrer que, dans ce cas, le lieu comprend un plan qui demeure invariable lorsque les quatre droites décrivent respectivement des plans passant par le point O.

N. B. On conservera les notations indiquées.

NOTES EXTRAITES DE LA CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

« *Correspondance mathématique et physique*, publiée par MM. Garnier, Professeur de Mathématiques et d'Astronomie à l'Université de Gand, et Quetelet, Professeur de Mathématiques, de Physique et d'Astronomie à l'Athénée de Bruxelles; Membres de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles ».

Tel est le titre d'un recueil périodique qui a été publié dans notre pays de 1825 à 1839, en onze volumes. Le prix de l'abonnement était de 7 florins pour le royaume, et de 9 florins (fr. 19,05) pour l'étranger. Le Journal comprenait, avec les planches, 24 à 25 feuilles in-8° par an, et paraissait par livraisons de deux, trois ou quatre feuilles; les deux premiers tomes ont été imprimés chez Van den Kerchove, à Gand, les

autres chez Hayez, à Bruxelles. A partir de 1827, la Correspondance était dirigée exclusivement par Quetelet; elle a paru irrégulièrement pendant les premières années qui ont suivi la révolution.

Une partie du Journal était consacrée aux mathématiques élémentaires et transcendantes pures et appliquées; une autre, à la revue des travaux scientifiques. La première section contenait 1° les meilleures solutions des questions proposées, avec une analyse des autres et avec des notes des rédacteurs; 2° les travaux scientifiques de MM. les Professeurs et surtout ceux qui se rapportent à des applications soit de la géométrie, soit de l'analyse à l'astronomie et à la physique. La seconde section était réservée aux analyses des thèses et des concours sur les sciences dans les universités du royaume, aux éloges des Géomètres anciens ou modernes qui ont honoré les Pays-Bas, aux annonces et comptes rendus des ouvrages scientifiques, enfin à la revue des travaux des sociétés savantes.

Tel était du moins le programme de la Correspondance pendant les premières années. Il s'est successivement élargi par la publication de travaux originaux d'une grande importance, dus à Chasles, Dandelin, Ampère, Van Rees, Pagani, Plateau, Timmermans, Lobatto, Poncelet, Le François, Reiss, Bouvard, etc.; mais à la fin, l'Astronomie et la Météorologie avaient pris une part prépondérante.

Les notes dont nous commençons aujourd'hui la publication, se rapportent à divers articles de la CGQ(*), surtout à ceux qui rentrent dans le programme de *Mathesis*. Elles pourront offrir quelque intérêt soit au point de vue scientifique, soit en faisant connaître à nos jeunes lecteurs l'état de l'enseignement dans notre pays de 1820 à 1840.

1. *Sur la géométrie de la sphère.* « Il est étonnant que les traités de géométrie, les meilleurs même, ne traitent point, du moins à notre connaissance, de la détermination du rayon d'une sphère pleine, et des propositions qu'on en déduit ». C'est en ces termes que débute une note de Quetelet dans la CGQ, t. I, p. 80. L'auteur, pour combler la lacune signalée, résout les problèmes suivants : Une sphère pleine étant donnée, 1° déterminer le rayon; 2° tracer une circonférence de grand cercle;

(*) C'est ainsi que nous désignerons la correspondance de Garnier et Quetelet, l'abréviation CMP étant déjà employée par l'Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques pour les publications du Cercle mathématique de Palerme.

3° trouver le point diamétralement opposé à un point donné de la sphère ; 4° tracer des méridiens également distants entre eux.

La solution du premier problème est celle que l'on rencontre aujourd'hui dans tous les traités de géométrie.

Dans le tome II, p. 1, la CGQ rapporte les solutions que donnent les *Theodosii sphaerica* des problèmes suivants : 1° Assigner une droite égale au diamètre d'un cercle quelconque tracé sur la surface d'une sphère ; 2° assigner une droite égale au diamètre d'une sphère donnée.

Ces solutions conduisent à une variante de la solution classique du premier problème de Quetelet. D'un point quelconque P de la sphère avec une ouverture de compas arbitraire, traçons sur la sphère un petit cercle Δ. Après avoir marqué sur Δ trois points quelconques A, B, C, construisons sur un plan au moyen des distances AB, BC, CA un triangle A'B'C' égal à ABC. Élevons en B' sur A'B' et en C' sur A'C' des perpendiculaires qui se rencontrent en D' : A'D' est égal au diamètre de Δ, et au moyen de la distance B'D' nous pourrons déterminer la seconde extrémité D du diamètre de Δ passant par A. Sur A'D' construisons un triangle isoscèle A'D'P' dont les côtés A'P', D'P' soient égaux à la distance PA ; les perpendiculaires menées en A' sur A'P' et en D' sur P'D' se coupent en un point Q' ; la distance P'Q' est égale au diamètre de la sphère. Si des points A et B comme pôles, avec une ouverture de compas égale à A'Q', nous décrivons sur la sphère deux cercles qui se coupent en Q, ce point sera diamétralement opposé à P.

La CGQ donne les renseignements suivants sur Theodosius : Theodosius Tripolites, contemporain de Cicéron et Pompée, a composé trois livres sur la sphère, dans lesquels ont puisé Ptolémée, Pappus, Proclus et Théon sans citer l'auteur ; ces livres ont été commentés par Isaac Barrow, le maître de Newton.

9. *Un problème d'Arithmétique* (CGQ, t. I, pp. 7-11 et 118-120). Deux vases A et B dont les capacités sont respectivement a et b, sont remplis l'un et l'autre d'un mélange d'eau et de vin, dont la composition est connue, ce qui forme l'état initial. On a deux mesures égales dont la contenance commune est c et que l'on remplit en les plongeant séparément dans chacun des deux vases, après quoi on verse dans chacun des vases la quantité c de liquide tiré de l'autre. On réitère la même opération n fois successivement, et on demande quelle sera alors la proportion de l'eau et du vin dans chaque vase ?

Garnier donne une première solution par les suites récurrentes, comme *article extrait* sans indiquer la source. Une seconde solution, due à J. N. Noel, alors professeur de sciences physiques et mathématiques et Principal de l'Athénée de Luxembourg, n'emploie que les mathématiques élémentaires; nous allons la résumer.

Soient x_0, y_0 les quantités d'eau des deux vases dans l'état initial, et x_n, y_n ces quantités après la n^e opération. A la première opération on extrait de A la quantité d'eau $\frac{c}{a}x_0$ et de B la quantité $\frac{c}{b}y_0$; il en résulte

$$x_1 = x_0 - \frac{c}{a}x_0 + \frac{c}{b}y_0.$$

Par analogie

$$x_2 = x_1 - \frac{c}{a}x_1 + \frac{c}{b}y_1, \quad x_3 = x_2 - \frac{c}{a}x_2 + \frac{c}{b}y_2, \ldots$$

Mais on a

$$x_0 + y_0 = x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \cdots = s,$$

s étant une constante; on peut donc remplacer y_0, y_1, y_2, ... par $s - x_0$, $s - x_1$, $s - x_2$, ..., ce qui donne

$$x_1 = x_0\left(1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right) + \frac{cs}{b} = px_0 + q, \quad x_2 = px_1 + q, \quad x_3 = px_2 + q, \cdots,$$

p et q désignant deux constantes. Par des substitutions successives on obtient

$$x_2 = p^2x_0 + pq + q, \quad x_3 = p^3x_0 + p^2q + pq + q, \ldots$$
$$x_n = p^nx_0 + q(p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1).$$

(*A continuer*).

BIBLIOGRAPHIE.

Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte von GUNDELFINGER. Herausgegeben von DINGELDEY. Leipsig, Teubner, 1895. (VIII — 434 pages grand in-8°). Prix : 12 marcs.

SOMMAIRE. *Section* I. Préliminaires. Les propriétés fondamentales d'une conique. — 1. Triangle de référence. Coordonnées ponctuelles ou tangentielles. 2. Relations métriques élémentaires entre des points et des droites. 3. Transformation des coordonnées. 4. Les courbes du second ordre. 5. Les courbes de la seconde classe. 6. Classification des coniques. 7. Le cercle, les points cycliques et leur relation avec l'angle de deux droites. 8. Sur un théorème fondamental de la théorie des formes quadratiques définies et sur deux espèces d'équations dont toutes les racines

sont réelles. 9. Invariants. 10. Axes principaux d'une conique. 11. Propriétés des coniques non dégénérées. 12. Génération des coniques au moyen de faisceaux projectifs ou de ponctuelles projectives. Théorèmes de Pascal et de Brianchon.

Section II. Faisceaux et réseaux ponctuels ou tangentiels de coniques 13. Préliminaires. 14. Points communs et tangentes communes à deux coniques. 15. Propriétés générales des faisceaux ponctuels ou tangentiels de coniques. 16. Choix de triangles de référence appropriés aux différents cas spéciaux que présente un faisceau ponctuel. 17. Interprétation géométrique de quelques formes algébriques. 18. Coniques homofocales. 19. Nouvelles propriétés des foyers. Cercles bitangents, théorèmes sur les rayons vecteurs. 20. Sur quelques courbes qui ont des relations invariantes avec un faisceau de coniques. 21. Cercle de courbure et développée.

22. Hessienne d'un réseau ponctuel de coniques. 23. Cayleyenne d'un réseau 24. Réseau tangentiel de coniques. 25. Réciprocité entre la hessienne et la cayleyenne. 26. Sur des systèmes linéaires conjugués de coniques.

Appendice. Compléments de la théorie et solutions de problèmes se rapportant aux §§ 1-21. — Formes binaires cubiques. Relation entre le combinant ψ, les coniques équianharmoniques et harmoniques, et le triangle polaire d'un faisceau. — Exemple d'un faisceau tangentiel ayant deux points doubles. Sur les coniques bitangentes à deux coniques données. Lieu des foyers des coniques inscrites à un quadrilatère. — L'hypocycloïde à trois rebroussements. — Application des triangles autopolaires à une intégrale d'Aronhold. — Sur une généralisation de la méthode de Weierstrass pour ramener les intégrales elliptiques à la forme normale.

Ainsi qu'il ressort suffisamment de la table des matières que nous venons de transcrire, les Leçons de M. Gundelfinger se distinguent à la fois des manuels destinés à l'enseignement moyen et des ouvrages justement estimés de Salmon, de Clebsch-Lindemann, de Hesse, etc., et à ce titre elles seront consultées utilement par les élèves et par les professeurs. (J. N.)

Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik, von Dr. G. Holzmüller, Director der Gewerbeschule zu Hagen i. W. Dritter Teil. Lehr- und Uebungsstoff zur freien Auswahl für die Prima realistischer Vollanstalten und höherer Fachschulen, nebst Vorbereitungen auf die Hochschul-Mathematik. Leipzig, Teubner, 1895. (In-8° de VIII-224 pages, 160 fig. dans le texte). Prix : 2,80 marcs.

Sommaire. *Section* I. Géométrie. Construction linéaire des coniques (Application des théorèmes de Pascal et de Brianchon). Conséquences pour la perspective centrale d'un cercle. Ponctuelles projectives. Faisceaux projectifs. Rapport anharmonique. Exemples de faisceaux et de ponctuelles projectifs. Exercices de géométrie analytique (Calcul de quelques lignes importantes de l'ellipse. Rayon de courbure des coniques. Quadrature des coniques).

Section II. Géométrie solide. Moments d'inertie. Prisme tronqué Corps de révolution. Surfaces du second ordre, description et cubature. Quelques formes de voûte. Axonométrie. Projection centrale d'une sphère.

Section III. Trigonométrie sphérique. Triangles rectangles, triangles quelconques. Figures réciproques sur la sphère.

Section IV. Algèbre, avec applications mécaniques ou géométriques. — Formule d'interpolation de Lagrange. Formule de quadrature de Simpson. — Moment statique, centre de gravité, moment d'inertie. — Quadrature de l'hyperbole $xy = k^2$. — Notions sur les séries. — Binôme de Newton pour un exposant quelconque. — Séries $l(1+x)$, arc tg x, tg x,....

Section V. Equations d'un degré supérieur. — Résolution algébrique des équations du 3e et du 4e degré. Notions sur les équations de degré n.

Appendice. Ponctuelle involutive. — Faisceau involutif. — Rectification de la parabole.

Le livre de M. Holzmuller est clair et méthodique, et d'après le sommaire, traduction libre de la table des matières, on voit qu'il répond à son but: servir de manuel dans la classe supérieure d'un établissement d'instruction moyenne, ou d'une école professionnelle.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 848.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 152.)

On donne deux courbes U *et* U' *et deux droites* OA, OB. *Deux points* M *et* M' *se meuvent respectivement sur les courbes* U *et* U' *de manière que les droites* OM, OM' *divisent harmoniquement l'angle* AOB. *On demande de trouver :* 1° *le point où la droite* MM' *touche son enveloppe ;* 2° *la tangente à la courbe décrite par le point d'intersection* T *des tangentes menées en* M *à* U *et en* M' *à* U'.

(J. Neuberg.)

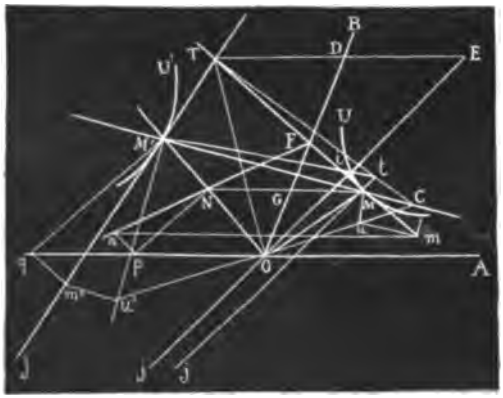


Fig. 1.

Solution par M. L. Meurice. 1° Une parallèle à OA menée par M (fig. 1) rencontre OB, OM' en des points G, N, tels que MG = GN. Si MF est la tangente en M à U, NF est la tangente en N à la courbe décrite par N.

Décomposons les vitesses des points N, M', M en deux autres : une vitesse de circulation au tour de O, et une vitesse de glissement sur le rayon vecteur ON, OM' ou OM. Pour simplifier les constructions, prenons pour les vitesses de circulation des points N, M' les droites Np, $M'q$ perpendiculaires à OM' et terminées en p et q à la droite OA. Nous obtenons la vitesse totale Nn de N en menant pn perpendiculaire à Np; de même la perpendiculaire élevée en q sur $M'q$ et terminée à la tangente M'T fait connaître la vitesse $M'm'$ du point M'; enfin une parallèle à OA par n détermine la vitesse Mm du point M.

Soient Mu, $M'u'$ les composantes des vitesses Mm, $M'm'$, normales à la droite MM'. Si l'on considère les mouvements des points M, M' sur leurs trajectoires comme résultant d'un mouvement de ces points sur la droite MM', combiné avec une rotation de cette droite autour du point C où elle touche son enveloppe, on voit que ce point de contact est à l'intersection des droites MM', uu'.

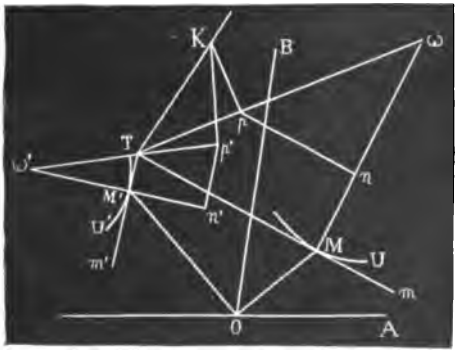


Fig. 2.

2° Soient (fig. 2) ω, ω' les centres de courbure des courbes U, U' aux points M, M', et soient Mm, $M'm'$ les vitesses simultanées des points M, M'. L'angle droit TMω est une figure invariable ayant pour centre instantané de rotation le point ω. On peut donc considérer le mouvement élémentaire du point T comme résultant d'une rotation autour de ω et d'un glissement le long de MT.

Si l'on prend $Mn = Mm$ et qu'on trace np parallèle à MT, Mn et Tp représentent les vitesses de circulation des points M, T autour de ω, tournées d'un angle droit autour de leurs points d'application. Une construction analogue fait connaître la vitesse de circulation Tp' de T autour de ω'. Les perpendiculaires élevées en p sur Tp et en p' sur Tp' se coupant en K, TK représente la vitesse totale de N dans une position normale à sa direction; donc TK est la normale à la courbe (T).

Voici une autre solution de la première partie. Pendant un temps infiniment petit, les points M, M' se meuvent sur les tangentes MT, M'T. Or, si deux droites

mobiles sont conjuguées harmoniques par rapport à un angle fixe AOB et rencontrent deux droites fixes TM, TM' aux points M, M', la droite MM' enveloppe une conique Σ qui touche les droites TM, TM' aux points i, j où celles-ci sont rencontrées par la droite OE, conjuguée harmonique de OT par rapport à AOB. TMM' étant un triangle circonscrit à Σ, le point de contact C de MM' s'obtient en tirant les droites Mj, $M'i$ qui se coupent en t, et en menant la droite Tt qui rencontre MM' au point cherché (fig. 1).

On construit la droite OE en traçant TD parallèlement à OA et prenant DE = TD. La conique Σ touche les droites OA, OB. (J. N.).

Solution par M. Cl. Servais. 1° Deux couples de points correspondants M et M', N et N' sur les courbes U et U' déterminent sur la conique (O, M, M', N, N') une involution dont les points doubles sont situés sur les droites OA, OB; les tangentes en ces points doubles et les cordes MM', NN' passent par le pôle de l'involution. Si l'on passe à la limite en faisant tendre N, N' vers M, M', on obtient une conique Σ passant par O et touchant U, U' en M, M'. Les tangentes aux points A, B où Σ rencontre OA, OB se coupent sur la droite MM' au point-limite de l'intersection de MM' avec NN', c'est-à-dire au point de contact P de MM' avec son enveloppe.

Pour obtenir le point C, soient P, P', Q les points de rencontre de OA avec MT, MT', MM' et soit K le point de rencontre des droites MP', M'P; TK est la polaire de Q par rapport à Σ. Si MO, M'O coupent TK en L, L', les droites LM', LM concourent au point A où la droite OA coupe Σ. La droite QL' rencontrant MT, MT' aux deux points R et R', RO et R'A sont des tangentes en O et A. (J. N.).

La tangente au lieu décrit par le point d'intersection P, des tangentes aux courbes U et U' aux points M et M', est l'axe d'homologie de deux coniques quelconques tangentes au point P, l'une de ces coniques ayant un contact du second ordre avec U au point M, l'autre un contact du même ordre avec U' au point M'. Une droite menée par P rencontre les coniques aux points K et K', les droites MK et M'K' se coupent sur l'axe d'homologie. Il suffit donc de pouvoir construire les points d'intersection K et K' de la droite PK avec les coniques. Cette construction se fera à l'aide du théorème de Pascal, si on parvient à déterminer un point de chacune des coniques(*).

Au point M décrivons un cercle tangent à la courbe U, et dont le

(*) Cette détermination repose sur les applications de la quasi-inversion linéaire aux courbes osculatrices (*Mathesis*, (1), VIII, p. 29).

rayon soit égal au diamètre du cercle osculateur de la courbe en ce point. La droite MP rencontre le cercle au point Q. Soit P′ le conjugué de P par rapport au couple MQ, R le point où la tangente au cercle au point Q coupe la tangente à la conique au point P ; S le pôle de RP′ par rapport au cercle ; ce point appartient à la conique considérée(*).

Si P est le pôle de RP′, la droite qui joint ce point à l'extrémité de la corde normale au point M est perpendiculaire sur cette droite(**).

×Question 998.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 103.)

Étant donné un cercle O, *on trace un diamètre* AB *et une corde* CD *parallèle à ce diamètre; après avoir prolongé* AB *de* BE = AB, *on projette* E *en* F *sur* CD, F *en* G *sur* BC : *démontrer que*

$$AD^3 = BG \cdot \overline{AB}^2 \text{ (***)}.$$

Déduire de là un moyen graphique d'extraire la racine cubique d'un nombre. (Biddle.)

Solution par M. G. Vanderstegen. Abaissons de C une perpendiculaire CH sur AB. Alors les deux triangles ACH et EFK (K étant l'intersection de FG et de BE), sont égaux comme ayant deux côtés égaux et parallèles. Donc AH = KE, d'où BK = HB.

Dans les triangles semblables ACB et BKG, nous avons

$$\frac{BG}{CB} = \frac{KB}{AB} \quad \text{ou} \quad \frac{BG}{AD} = \frac{HB}{AB}, \quad AB \times BG = AD \times HB.$$

Mais

$$HB = \frac{\overline{CB}^2}{AB} = \frac{\overline{AD}^2}{AB}.$$

Donc, en remplaçant

$$AD^3 = BG \times \overline{AB}^2.$$

(*) *Mathesis* (2), I, p. 42.

(**) *Ibid.*, p. 45.

(***) Une erreur s'était glissée dans cette égalité : on avait imprimé DG au lieu de BG. La figure suppose AB et CD de même sens.

Si AB = 1, on a AD = BC = $\sqrt[3]{BG}$, on peut construire le lieu du point G qui correspond aux différentes positions de la corde CD parallèle à AB, puis trouver l'intersection de ce lieu avec la circonférence décrite du centre B avec un rayon égal à une longueur donnée a; la corde déterminée par la circonférence sur la droite joignant ce point d'intersection au point B sera égale à $\sqrt[3]{a}$. Si $a > 1$, on cherche par ce moyen $\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$.

M. Déprez a résolu la même question; il trouve pour équation polaire du lieu (G) :

$$\rho = AB \cos^3 \omega,$$

l'origine étant en B.

M. J. Jonesco nous a aussi envoyé une bonne solution trigonométrique analogue à celle de M. Déprez.

Question 939.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 104).

On considère l'hyperbole équilatère qui passe par le point de concours de deux tangentes rectangulaires à une ellipse donnée, par les points de contact M, M' *de ces tangentes et par le centre de l'ellipse. Lorsque les tangentes varient :*

1° La seconde corde commune à l'ellipse et à l'hyperbole coupe les axes de l'ellipse en deux points N *et* N', *tels que le segment* NN' *a une longueur constante.*

2° Le point de rencontre des droites MM', NN' *décrit une ellipse.*

(E. N. Barisien.)

Solution par M. Gillet, *professeur à Maredsous.* 1° Plus généralement, soient P(α,β), Q(α',β') les pôles de deux cordes MM', mm' de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0;$$

ces cordes auront pour équations

$$\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1 = 0, \quad \frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} - 1 = 0.$$

La conique passant par l'origine et par les points M, M', m, m', a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha' x}{a^2} + \frac{\beta' y}{b^2} - 1\right) = 0. \qquad (1)$$

Pour qu'elle passe par le point P, il faut que l'on ait :

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}\right)=0,$$

et puisqu'on ne suppose pas P sur l'ellipse, cette condition se réduit à

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}=0, \quad \text{ou à} \quad \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{2}$$

Ceci nous apprend que OP *et* OQ *doivent être des diamètres conjugués, et que si la courbe* (1) *passe par* P, *elle passe aussi par* Q.

2° Si la conique (1) est une hyperbole équilatère, la somme des coefficients de x^2 et de y^2 doit être nulle, ce qui exige

$$\frac{1}{a^2}+\frac{\alpha\alpha'}{a^4}+\frac{1}{b^2}+\frac{\beta\beta'}{b^4}=0;$$

cette nouvelle condition combinée avec la relation (2) nous donne les valeurs de $\alpha\alpha'$ et de $\beta\beta'$; en posant pour abréger $a^2+b^2=d^2$, $a^2-b^2=c^2$, on obtient :

$$\alpha\alpha'=\frac{a^2d^2}{c^2}, \quad \beta\beta'=-\frac{b^2d^2}{c^2}. \tag{3}$$

3° Si les tangentes issues du point P $(\alpha\beta)$ sont rectangulaires, ce point P se déplace sur le cercle de Monge, de sorte que ses coordonnées vérifient la relation

$$\alpha^2+\beta^2=d^2. \tag{4}$$

D'après (3), on voit que le point Q se déplace sur la *Kreuzcurve*

$$\frac{a^4}{\alpha'^2}+\frac{b^4}{\beta'^2}=\frac{c^4}{d^2}. \tag{5}$$

Au moyen des mêmes relations (3), on peut mettre l'équation de mm' sous la forme

$$\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}=\frac{c^2}{d^2}, \tag{7}$$

ce qui nous montre que mm' est *antiparallèle* à la droite qui joint les projections sur les axes Ox, Oy du point P (α,β); de plus, mm' rencontre les axes coordonnés en deux points N, N′ dont la distance a la valeur constante $\frac{c^2}{d}$.

En résolvant les équations de MM′ et de mm′ sous la forme (7) par rapport à x et y, on trouve

$$x = \frac{a^2\alpha}{d^2} \cdot \frac{b^2d^2 + c^2\beta^2}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}, \quad y = -\frac{b^2\beta}{d^2} \cdot \frac{\alpha^2c^2 - a^2d^2}{b^2\alpha^2 + a^2\beta^2}.$$

Au moyen de l'équation (4), ces valeurs se réduisent à

$$x = \frac{a^2\alpha}{d^2}, \quad y = \frac{b^2\beta}{d^2};$$

donc on a :

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{d^2} \tag{8}$$

pour équation de la courbe décrite par le point d'intersection des droites MM′ et NN′. Ce lieu est une *ellipse* homofocale avec l'ellipse donnée.

La conique (1) étant une hyperbole équilatère, supposons que P décrive la droite

$$A\alpha + B\beta + C = 0. \tag{10}$$

Dans ce cas, Q décrit l'*hyperbole équilatère* ayant pour équation

$$Aa^2\beta' - Bb^2\alpha' + Cc^2\alpha'\beta' = 0, \tag{11}$$

et la corde (mm') enveloppe la *parabole* représentée par l'équation tangentielle :

$$d^2(Av - Bu) + Cc^2uv = 0. \tag{12}$$

La même question a été résolue analytiquement par MM. Bastin (Liége), Droz Farny (Porrentruy), Déprez (Charleroi) et De Groo (athénée de Gand).

M. Bastin fait remarquer que le point d'intersection K des droites MM′, NN′ est un point fixe de la droite NN′. On a

$$KN = \frac{b^2}{d}, \; KN' = \frac{a^2}{d}.$$

M. Déprez trouve que le segment NN′ a une longueur constante lorsque P se meut sur une circonférence quelconque concentrique avec l'ellipse donnée.

Solution géométrique par M. Cl. Servais. Soient O le centre de l'ellipse, P le point de concours des tangentes en M et M′, X la projection de P sur MM′. L'angle MPM′ inscrit dans l'hyperbole équilatère étant droit, PX est la tangente au point P à cette courbe; P est donc un point double de l'involution déterminée par l'ellipse, l'hyperbole et les cordes MM′, NN′ sur la droite PX. Le point X étant sur la polaire du point P par rapport à l'ellipse, est le second point double, et la corde

NN′ passe par le point X. Le diamètre PO rencontre l'ellipse aux points A et B et la corde MM′ au point H; les quatre points P, H, A, B formant une division harmonique, on a

$$HA.HB = HO.HP.$$

Le point H est donc le point central de l'involution déterminée sur le diamètre OP, par l'ellipse, l'hyperbole et les cordes MM′, NN′; la droite NN′ est donc parallèle à PO.

Soient D et E les points d'intersection de MM′ avec les axes, F et G les projections de P sur les mêmes droites. Les droites PD et PF, PG et PE sont conjuguées dans l'involution ayant pour rayons doubles les tangentes rectangulaires PM et PM′; donc les angles DPM et FPM sont égaux, ainsi que les angles GPM′ et EPM′. Mais les angles GPF et MPM′ étant droits, les angles GPM′ et FPM sont égaux, donc l'angle EPD est droit. Le point P étant sur la circonférence circonscrite au triangle OED, les pieds F, G, X des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés sont en ligne droite. Soit C le point d'intersection des polaires des points G et F par rapport à l'ellipse; PC sera la polaire du point X, car les points G, F, X sont collinéaires. Mais PC est la tangente au cercle de Monge décrit par le pôle P de la corde MM′, par conséquent X est le point de contact de la corde MM′ avec son enveloppe et il décrit une ellipse (X). Les droites rectangulaires PX et MM′ étant conjuguées par rapport aux deux ellipses, ces courbes sont homofocales.

L'ellipse (X) est aussi décrite par le point X du segment de longueur constante GF dont les extrémités glissent sur les axes OE et OD; ce qui montre que GX et XF sont les longueurs des axes de l'ellipse (X). Mais

$$XN = XF, \quad XN' = XG,$$

donc

$$NN' = XG - XF = \textit{constante}.$$

×Question 933.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 104).

1° *Le nombre* $4n^4$ *est la somme de quatre triangulaires;* 2° *les nombres*

$6n^4$, $6n^4+1$, $6n^4+2n^2+1$, $6n^4-4n^2+1$, $6n^4+6n^2+1$

sont, chacun, la somme de trois triangulaires. (De Rocquigny.)

Solution par MM. Fauquembergue et Cristescu. Cela résulte des identités suivantes :

$$4n^4 = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(2n^2-n-1)(2n^2-n)}{2} + \frac{(2n^2+n-1)(2n^2+n)}{2},$$

$$6n^4 = \frac{2n^2(2n^2+1)}{2} + \frac{(2n^2-n-1)(2n^2-n)}{2} + \frac{(2n^2+n-1)(2n^2+n)}{2},$$

$$^4+1 = \frac{(2n^2-n)(2n^2-n+1)}{2} + \frac{(2n^2-n-2)(2n^2-n-1)}{2} + \frac{(2n^2+2n-1)(2n^2+2n)}{2},$$

$$^4+2n^2+1 = \frac{(2n^2-n-1)(2n^2-n)}{2} + \frac{(2n^2+n-1)(2n^2+n)}{2} + \frac{(2n^2+1)(2n^2+2)}{2},$$

$$^4-4n^2+1 = \frac{(2n^2+n-1)(2n^2+n)}{2} + \frac{(2n^2-n-1)(2n^2-n)}{2} + \frac{(2n^2-2)(2n^2-1)}{2},$$

$$^4+6n^2+1 = \frac{(2n^2-n)(2n^2-n+1)}{2} + \frac{(2n^2+n)(2n^2+n+1)}{2} + \frac{(2n^2+1)(2n^2+2)}{2}.$$

M. Petrescu nous communique des identités analogues; par exemple,

$$12n^4 = 3n^2(3n^2 \pm 1) - n^2(n^2 \pm 1) + 2n^2(2n^2 \mp 1).$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

688. Étant donnée une sphère tangente en un point T à un plan fixe P, par une droite AB du plan P situé à une distance connue d du point T, on mène un plan faisant un angle i avec le plan P. Il divise la sphère en deux zones. Déterminer l'angle i de telle sorte que celle des deux zones qui renferme le point T soit dans un rapport donné p avec la surface de la sphère entière. Discuter complètement en supposant $d = R$. (*Baccalauréat*, Caen, 1891.)

Équation du problème :

$$d \sin i - R \cos i = (2p-1)\,R.$$

Poser $\operatorname{tg}\varphi = \frac{R}{d}$; il vient

$$\sin(i-\varphi) = \frac{(2p-1)\,R\cos\varphi}{d}.$$

689. On appelle quelquefois *chiffre unique* d'un nombre le chiffre qu'on obtient en faisant la somme des chiffres du nombre proposé, puis

la somme des chiffres de cette première somme, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un nombre d'un seul chiffre.

Pour qu'un nombre entier soit carré parfait, il faut que son chiffre unique soit 1, 4, 7 ou 9.

691. Dans un triangle ABC, les angles B et C valent respectivement 15° et 30°. La perpendiculaire en A sur AB rencontrant le côté BC en D, démontrer que BD = 2AC.

Joindre A au milieu E de BD et observer que les triangles EAB, EAD, AEC sont isoscèles.

QUESTIONS PROPOSÉES.

***1033.** Soient BCDE, CAMN, ABPQ les carrés construits extérieurement sur le côté BC et intérieurement sur les côtés CA, AB d'un triangle ABC. Si tg A = 2, les droites DE, MN, PQ et les tangentes en B et C au cercle circonscrit ABC concourent en un même point. (SANJANA).

1034. L'équation

$$x^4 - 5p^3x + 3q^2 = 0,$$

dans laquelle p est un nombre pair, et q un nombre différent de zéro, n'a pas de racine entière. (S. REALIS.)

1035. La tangente en un point M quelconque d'une cissoïde droite rencontre la courbe en un autre point P. Le lieu du milieu de MP est une courbe fermée dont l'aire est les $\frac{3}{8}$ de l'aire du cercle ayant pour diamètre la distance du sommet de la cissoïde à son asymptote. (E. N. BARISIEN.)

1036. Par un point P donné dans le plan d'une ellipse on mène une corde quelconque AB, et sur celle-ci comme diamètre on construit une circonférence (AB), qui coupe l'ellipse en deux nouveaux points C, D.

1° La droite CD passe par un point fixe Q.

2° Le point d'intersection des droites AB, CD se meut sur l'hyperbole d'Apollonius relative à P.

3° La polaire de P par rapport au cercle AB enveloppe une parabole.

4° Le centre des moyennes distances des points A, B, C, D décrit une ellipse.

5° Le cercle (AB) enveloppe une quartique(*). (DÉPREZ.)

(*) Une partie de cette proposition est connue. (J. N.)

*SUR LES CENTRES ISOGONES,

par M. H. MANDART.

1. Soit I un point du plan du triangle ABC. Traçons trois cercles O_1, O_2, O_3 :

O_1 passe par A et touche en I la droite IC;
O_2 » B » » IA;
O_3 » C » » IB.

Cherchons la position de I, telle que :

les cercles O_2 et O_3 se coupent en un point α de BC;
» O_3 et O_1 » β de CA;
» O_1 et O_2 » γ de AB.

Les quadrilatères inscrits $I\gamma A\beta$, $I\alpha B\gamma$, $I\beta C\alpha$ donnent

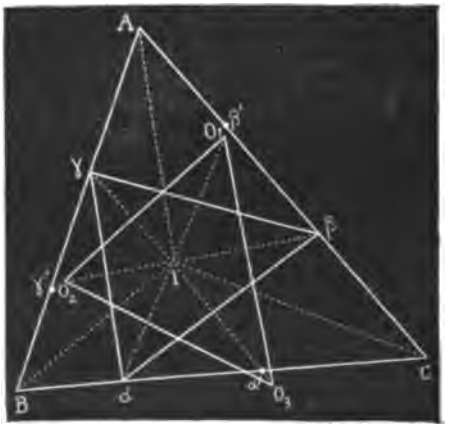
$$\textit{angle}\ I\alpha C = I\gamma B = I\beta A.$$

On a aussi

$$I\alpha C = IBC + ICB, \quad I\beta A = ICA + IAC, \quad I\gamma B = IAB + IBA;$$

d'où par addition,

$$3I\alpha C = A + B + C;$$
$$I\alpha C = 60^\circ, \ BIC = 120^\circ.$$



I est donc le premier centre isogone de ABC.

2. On trouve facilement

$$\textit{angle}\ \beta\alpha\gamma = \beta\alpha I + I\alpha\gamma$$
$$= \beta CI + IB\gamma = 120^\circ - A.$$

Si donc α, β, γ désignent les angles du triangle $\alpha\beta\gamma$,

$$\alpha = 120^\circ - A, \quad \beta = 120^\circ - B,$$
$$\gamma = 120^\circ - C.$$

Remarquons aussi les relations

$$\textit{angle}\ \beta I\gamma = 180^\circ - A = 60^\circ + \alpha, \quad \gamma I\alpha = 60^\circ + \beta, \quad \alpha I\beta = 60^\circ + \gamma,$$

qui définissent le point I par rapport au triangle $\alpha\beta\gamma$.

I est donc un centre isodynamique du triangle $\alpha\beta\gamma$, c'est-à-dire l'un des points d'intersection des cercles d'Apollonius, jouissant de la pro-

priété que les droites $\alpha I, \beta I, \gamma I$ rencontrent la circonférence $\alpha\beta\gamma$ aux sommets d'un triangle équilatéral(*). Cette propriété résulte aussi de ce que $\alpha\beta\gamma$ et le triangle podaire de I par rapport à ABC sont semblables et ont I pour centre de similitude, et que I est le conjugué isogonal d'un centre isodynamique de ABC.

Remarquons les égalités

$$\beta\gamma \cdot \alpha I = \gamma\alpha \cdot \beta I = \alpha\beta \cdot \gamma I.$$

3. Les côtés du triangle $O_1O_2O_3$ sont perpendiculaires aux droites $I\alpha$, $I\beta$, $I\gamma$, et les droites IO_1, IO_2, IO_3 sont perpendiculaires à CI, AI, BI; par suite,

$$\textit{angle}\ O_1 = A, \quad O_2 = B, \quad O_3 = C,$$
$$\textit{angle}\ O_2IO_3 = O_3IO_1 = O_1IO_2 = 120°;$$

donc les triangles $O_1O_2O_3$, ABC sont semblables, et I est leur centre de similitude.

4. On peut aussi tracer trois autres cercles O'_1, O'_2, O'_3 :

O'_1 passe par A et touche en I la droite IB,
O'_2 » B » » » IC,
O'_3 » C » » » IA;

les cercles O'_2 et O'_3 se coupent en un point α' de BC,
» » O'_3 et O'_1 » » β' de CA,
» » O'_1 et O'_2 » » γ' de AB.

AI étant la bissectrice de l'angle BIC, les cercles O_1 et O'_1 sont symétriques par rapport à AI; de même, les cercles O_2 et O'_2, O_3 et O'_3 sont respectivement symétriques par rapport aux droites BI, CI.

Si l'on fait tourner le triangle $O'_1O'_2O'_3$ de 60° autour de I dans le sens ACB, il vient coïncider avec $O_1O_2O_3$. Une telle rotation amène aussi le triangle $\alpha'\beta'\gamma'$ en coïncidence avec $\alpha\beta\gamma$, car les angles $I\alpha C$, $I\alpha' B$ sont égaux à 60°, etc.

Les centres O_1, O_2, O_3 se trouvent sur les circonférences O'_1, O'_2, O'_3; en effet, l'angle $IO_1A = 2I\beta A = 120° = 180° - I\gamma' A$, etc. De même, les points O'_1, O'_2, O'_3 appartiennent aux circonférences O_1, O_2, O_3.

(*) Voir NEUBERG, *Mémoire sur le Tétraèdre*, pp. 37-43.

5. Les triangles $\alpha\beta\gamma$, $I\beta'\gamma$, $\alpha I\gamma'$, $\alpha'\beta I$ sont semblables ; car l'angle $\gamma I\beta'$, égal à $360^\circ - A - I\gamma A - I\beta' A$ ou à $120^\circ - A$, est égal à $\gamma\alpha\beta$, et l'on a

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \frac{I\beta}{I\gamma} = \frac{I\beta'}{I\gamma}, \text{ etc.}$$

Les droites $\gamma\beta'$, $\beta\alpha'$, $\alpha\gamma'$ sont antiparallèles à BC, BA, AC; car

angle $A\gamma\beta' = 180^\circ - \beta'\gamma I - I\gamma B = 180^\circ - (120^\circ - C) - 60^\circ = C.$

Les triangles $\gamma'\alpha\alpha'$ et $\alpha\alpha'\beta$ sont semblables. En effet, les angles $\gamma'\alpha\alpha'$, $\beta\alpha'\alpha$ sont égaux à $180^\circ - A$, et

$\alpha'\gamma'\alpha = 120^\circ - C - I\gamma'\alpha' = \alpha' I\beta - IBC = \alpha' I\beta - \alpha' IC = \beta IC = \beta\alpha C.$

Il résulte de là que

$$\alpha\gamma' \cdot \alpha'\beta = \overline{\alpha\alpha'}^2, \quad \beta\alpha' \cdot \beta'\gamma = \overline{\beta\beta'}^2, \quad \gamma\beta' \cdot \gamma'\alpha = \overline{\gamma\gamma'}^2;$$

$$\overline{\alpha\alpha'}^2 : \overline{\beta\beta'}^2 : \overline{\gamma\gamma'}^2 = \frac{1}{\gamma\beta'} : \frac{1}{\alpha\gamma'} : \frac{1}{\beta\alpha'}.$$

6. La droite CI rencontre le cercle O_3 en un point C_3; la droite BC_3 est parallèle à AI et à la tangente en C au cercle O_3.

Le point C_3 se trouve sur le cercle BCI', I' étant le second centre isogone de ABC.

Les cercles O_1, O_2' et ACI' se coupent en un même point I'; car

angle $APC = API + IPC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ.$

×NOTES MATHÉMATIQUES.

9. *Sur divers points d'analyse*, par M. E. Cesaro. 1° Soit a un nombre positif. Pour trouver la limite de a^n lorsque n croît indéfiniment, on peut commencer par observer que

$$a^n = a \cdot a^{n-1}. \qquad (1)$$

Il en résulte que, si $a < 1$, a^n décroit, et tend, par suite, vers une limite finie $\lambda \geqq 0$. Il suffit maintenant de passer à la limite, dans l'identité (1), pour trouver $\lambda = a\lambda$, d'où $\lambda = 0$. Si $a > 1$, a^n croît avec n, et tend, par suite, vers une limite finie (positive) ou infinie. Si la limite était finie, on la trouverait égale à zéro, en raisonnant comme précédemment. Il faut donc qu'elle soit infinie.

2° De même, pour trouver $lim\frac{a^n}{n!}$, on peut partir de l'identité

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{n} \cdot \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Celle-ci montre que l'expression considérée finit par décroître constamment, dès que n surpasse a. Cette expression admet donc une limite finie λ, et l'on a, en passant à la limite dans l'identité précédente, $\lambda = 0 . \lambda = 0$.

3° Pour démontrer que le *produit* de deux nombres irrationnels est *unique*, on peut conduire le raisonnement comme il suit. Soit ε un nombre positif, aussi petit qu'on le désire, et choisissons le nombre h parmi les nombres positifs, inférieurs à l'unité, de manière qu'il soit aussi inférieur à $\frac{\varepsilon}{\alpha+\beta+1}$, en désignant par α et β deux nombres quelconques, appartenant respectivement aux classes supérieures(*) des nombres irrationnels positifs A et B. On sait qu'il est toujours possible de trouver dans les mêmes classes deux autres nombres a' et b', et dans les classes inférieures deux nombres a et b, tels que

$$a' - a < h, \quad b' - b < h,$$

d'où

$$a'b' - ab < (a + b + h) h < \frac{a+b+1}{\alpha+\beta+1} \varepsilon < \varepsilon.$$

Donc AB, défini par les classes ab et $a'b'$, a une valeur bien déterminée, parce qu'il existe un seul nombre entre deux nombres, dont la différence absolue peut être rendue aussi petite qu'on le veut.

10. ***Sur une citation de Laplace.*** On lit dans le *Cours de Mécanique et Machines* de Bour, page 56, 3e volume :

« Laplace, dans sa Mécanique céleste, donne le résultat suivant. Si l'on suppose une bombe dirigée verticalement de bas en haut, avec une vitesse de 500 mètres par seconde, en négligeant toutes les influences perturbatrices autres que celles de la rotation de la terre, il y aura une déviation occidentale de 128,9 mètres. »

Cette citation de Laplace (*Méc. cél.* IVe vol. p. 306) est *incomplète*. Il semble, en effet, en résulter qu'un boulet de canon que nous lancerions

(*) Il faut rectifier dans ce sens ce que je dis à p. 87 de mon *Analyse algébrique*.

verticalement avec une vitesse de 500 mètres par seconde irait retomber à 128^{m},9 à l'occident du point de départ, ce qui n'est pas. Le calcul donne 81^{m} environ.

Ces deux résultats sont exacts, l'un et l'autre : les données seulement du problème sont différentes.

Dans Laplace(*) il s'agit d'une vitesse de 500^{m} par *seconde centésimale* et il aurait fallu en prévenir le lecteur, car bien peu d'entre nous savent que, lors de l'établissement du nouveau système légal des poids et mesures, la durée normale du jour n'était que de 10 heures; que chaque heure était partagée en 100 minutes, et chaque minute en 100 secondes. Pour nous, au contraire, il s'agit d'une vitesse de 500^{m} par seconde sexagésimale. Dans ce second cas, la vitesse de projection est plus faible et voilà pourquoi la déviation est moindre.

Cet exemple prouve le danger qu'il y a, pour un ingénieur, d'accepter des résultats numériques sans les contrôler. (J. M.)

11. *Rectification.* On lit dans *Mathesis*, tome III, 2^{e} série (année 1893), p. 139 :

« *Curieuse coïncidence.* Un corps pesant tombant librement dans le vide, à Paris, parcourt, pendant la première seconde centésimale (la cent millième partie du jour solaire moyen)

365 centimètres, 5 millimètres, 48 centièmes. »

C'est 366 centimètres, 7 millièmes *qu'il faut lire*, quand il s'agit de Paris.

Les chiffres donnés ci-dessus se rapportent à un point du globe situé sur le parallèle dont la latitude est de 35°16′, et non celle de Paris. Ce parallèle est celui dont le carré du sinus de la latitude est $\frac{1}{3}$ (Laplace, *Mécanique céleste*, 1er vol. p. 133). (J. M.)

12. *Théorèmes de géométrie élémentaire*, par M. Bogdan Jonesco. — I. Soit ABC un triangle quelconque. On mène les hauteurs AA′ et BB′, puis on projette A′ en A″ sur CA, et B′ en B″ sur CB, enfin on construit les droites A″A‴ et B″B‴ perpendiculaires à AB et rencontrant respectivement AA′ en M, BB′ en N. Les triangles A″MA′ et NB″B′, semblables à ABC, sont égaux entre eux. La droite MN = A″B″ = $c \cos^2 C$.

(*) « J'adopterai la division décimale de l'angle droit et du jour » (*Mécanique céleste*. Préface, dernière phrase).

II. Soient A', B', C' les pieds des hauteurs du triangle ABC. On projette A' en A'' sur AC, A'' en A''' sur AB; B' en B'' sur AB, B'' en B''' sur BC; C' en C'' sur BC, C'' en C''' sur CA. Les droites A''A''', B''B''', C''C''' coupent respectivement AA', BB', CC' aux points M, N, P.

Si r_m, r_n, r_p, R désignent les rayons des cercles circonscrits aux triangles MA'A'', NB'B'', PC'C'', ABC, on a

$$\frac{r_m}{\sin 2C} = \frac{r_n}{\sin 2A} = \frac{r_p}{\sin 2B} = \frac{R}{2}.$$

13. *Sur les aires des figures sphériques.* Dans le tome XII de *Mathesis* (pp. 105-112), M. E. Wasteels a déterminé, par une méthode spéciale, l'aire d'une figure sphérique limitée par des arcs de petits cercles.

Dans les *Nouveaux Mémoires de l'Académie de Bruxelles* (t. II, pp. 105-119), A. Quetelet traite la même question par voie synthétique, et donne les renseignements suivants :

D'Alembert, dans les Mémoires de Turin, indique, sans achever les calculs, les opérations qui conduisent à l'aire d'un triangle sphérique limité par trois arcs de petits cercles; mais il fait observer que la méthode synthétique est plus simple.

Bossut, dans son *Traité de calcul intégral*, s'est occupé du même sujet après d'Alembert, mais plutôt en vue de faire connaître quelques artifices de calcul, que de tracer une méthode plus simple. Il revient cependant ensuite à la synthèse; mais la méthode qu'il propose, sans être générale, est un peu longue.

PROPRIÉTÉS DES CERCLES DE CHASLES;

par M. E. N. Barisien (*Suite*; voir p. 129).

17. On mène deux rayons ON et ON' des cercles Σ et Σ', tels que les angles NOx et xON' soient égaux. La droite MN' est constamment normale à l'ellipse E en son milieu.

La droite qui joint les projections de N sur les axes de E, et celle qui joint les projections de N' passent par M.

On conclut de là différents moyens de mener par un point donné de Σ ou Σ' une normale à l'ellipse E.

18. Du point N on abaisse les trois normales à l'ellipse autres que

NM, et on considère le triangle formé par leurs pieds. Soient g, c, h le centre de gravité de ce triangle, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre; ces points décrivent les ellipses

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{9}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2, \quad a^4x^2+b^4y^2=\frac{1}{4}a^2b^2(a+b)^6,$$

$$a^2x^2+b^2y^2=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2(a^2-ab+b^2)^2.$$

Menons du point N' les trois normales autres que N'M et considérons le triangle formé par leurs pieds. Le centre de gravité g' de ce triangle, le centre c' du cercle circonscrit et l'orthocentre h' décrivent trois ellipses dont les équations s'obtiennent en changeant b en $-b$ dans les équations précédentes.

Les droites OM et Og sont également inclinées sur les axes de E.

19. Les points O, g, g' sont en ligne droite, de même que O, h, h'.

Les droites Oc et Oc', sont également inclinées sur les axes, de même que cc' et hh'.

20. La droite cc' est normale à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{4}.$$

21. Les droites cgh, $c'g'h'$ enveloppent, chacune, une développée d'ellipse et leur point de rencontre décrit une ellipse.

22. Les cercles c et c' (n° 18) ont pour axe radical la tangente au point symétrique de M par rapport à O.

23. Les puissances de O par rapport aux cercles c et c', lorsque M se déplace sur E, restent constantes et égales à $a^2+b^2 \pm ab$.

24. Les cercles c et c' ont pour enveloppes les quartiques

$$[x^2+y^2-(a^2+b^2 \pm ab)]^2=(a \pm b)^2\left(\frac{b^2x^2}{a^2}+\frac{a^2y^2}{b^2}\right).$$

25. Les cercles c et c' se coupent sur la sextique

$$b^2x^2(x^2+y^2-a^2)^2+a^2y^2(x^2+y^2-b^2)^2=c^4x^2y^2.$$

26. Le rayon OM' est rencontré par la normale en M au point N et par la normale en M_1 au point P. Soit (C) le cercle qui passe par les pieds des trois normales issues de N autres que NM, et soit (γ) le cercle qui passe par les pieds des normales issues de P autres que PM_1.

1° L'axe radical des cercles (C) et (γ) enveloppe l'ellipse

$$b^4x^2 + a^4y^2 = a^4b^2. \qquad (a)$$

2° Les centres C, γ sont en ligne droite avec O ;

3° La ligne des centres et l'axe radical des cercles C et γ se coupent sur la courbe

$$(x^2 + y^2)^2 = b^2y^2 + \frac{a^4x^2}{b^2},$$

qui est la podaire de O par rapport à l'ellipse (a).

---

27. On a les relations

$$\frac{\overline{NF}^2}{MF} = \frac{\overline{NF'}^2}{MF'} = 2(a+b), \quad \frac{\overline{N'F}^2}{MF} = \frac{\overline{N'F'}^2}{MF'} = 2(a-b),$$

$$\frac{NF}{N'F} = \frac{NF'}{N'F'} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$$

28. La normale MN rencontrant Ox, Oy en I, I', on a

$$\frac{IN}{MN} = \frac{a+b}{a}, \quad \frac{IN'}{MN'} = \frac{a-b}{a},$$

$$\frac{IN}{IM} = \frac{a+b}{b}, \quad \frac{IN'}{IM} = \frac{a-b}{b}, \quad \frac{IN}{IN'} = \frac{a+b}{a-b},$$

$$\overline{M'I}^2 + b^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2}D'^2, \quad \overline{M'I}^2 + b^2 = \overline{MI}^2 + D'^2.$$

29. Si δ est la distance de F à ON, on a

$$\overline{M'I}^2 - \overline{MI}^2 = \delta^2.$$

30. Si T est le point où la tangente en M rencontre AA', on a

$$\overline{OT}^2 - \overline{NT}^2 = c^2.$$

31. La normale en M à E rencontre le cercle Σ en N et ν, et le cercle Σ' en N' et ν'. La droite $O\nu$ coupe Σ en ν_1, et la droite $O\nu'$ rencontre Σ' en ν'_1. On a la relation

$$\overline{N\nu}^2 - \overline{N'\nu'}^2 = 16ab.$$

32. Le lieu du milieu de $\nu\nu'$ est une sextique unicursale, ayant pour aire

$$U = \pi ab + 4\pi ab\frac{a-b}{a+b}.$$

Cette sextique est aussi le lieu de la projection de M sur la tangente à l'ellipse au point diamétralement opposé à M.

33. Les milieux des segments $\nu_1\nu'$ et $\nu\nu'_1$ décrivent l'ellipse

$$a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2.$$

34. La perpendiculaire au milieu de MM′ ou de MM'_1 coupe la droite ON sur l'un des cercles

$$x^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}(a \pm b)^2.$$

35. Le lieu des points X, X′ de la normale MN tels que

$$\frac{XM}{XN} = \frac{X'M}{X'N} = K$$

se compose des deux ellipses

$$\frac{x^2(1 \pm K)^2}{[a \pm K(a+b)]^2} + \frac{y^2(1 \pm K)^2}{[b \pm K(a+b)]^2} = 1.$$

Si l'on doit avoir

$$\frac{XM}{XN'} = \frac{X'M}{X'N'} = K,$$

il suffit de changer b en $-b$ dans les équations précédentes.

Cette proposition ne diffère *pas de la finale* du § 2, p. 131.

36. Le cercle Σ' touche la développée de E aux pieds des normales menées de O à cette développée. — Le cercle Σ jouit des mêmes propriétés, mais d'une manière imaginaire.

Cette question revient à trouver la normale à E, telle que la projection de O sur la normale soit le centre de courbure relatif au pied de la normale. On trouve ainsi une normale réelle tangente au cercle Σ', et une normale imaginaire tangente à Σ. Ces deux normales sont aussi, l'une, la normale réelle la plus éloignée du centre de l'ellipse (elle est à la distance $(a - b)$), et l'autre, la normale imaginaire la plus éloignée de O (à la distance $(a + b)\sqrt{-1}$)(*).

37. Il existe en général huit droites qui sont à la fois normales à une ellipse et tangentes à un cercle concentrique à l'ellipse.

(*) A proprement parler, il n'existe pas de droites imaginaires plus éloignées les unes que les autres d'un point donné réel. Le carré de la distance de O à une normale passe par un maximum positif et par un minimum négatif.

Si ce cercle est Σ', les huit droites se réduisent à quatre. Le cercle Σ jouit de la même propriété, mais imaginairement.

38. Les lieux des orthocentres des triangles NFF′ et N′FF′ ont pour équation

$$y^2 = \frac{(x^2 - c^2)^2}{(a \pm b)^2 - x^2}.$$

39. La droite qui joint les projections de N ou celles de N′ sur les axes de E enveloppe l'hypocycloïde

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = (a \pm b)^{\frac{2}{3}}.$$

Cette droite est parallèle à ON′ ou à ON.

40. Soit N_1'' le symétrique de N′ par rapport à BB′; le milieu de la droite NN_1'' décrit le cercle secondaire de E.

41. Le quadrilatère NFN′F′ est harmonique. Le cercle circonscrit a pour centre le point T′, pour rayon $\frac{D'}{\sin\varphi}$. Le grand axe FF′ est la bissectrice de l'angle NON′, et

$$\textit{angle}\ \mathrm{MNT} = \mathrm{NOT} = \mathrm{N'OT},\ \textit{angle}\ \mathrm{FMF'} = 2\mathrm{FNF'}.$$

NM est la symédiane du triangle NFF′; les droites NO, NM sont donc isogonales par rapport à l'angle FNF′, et aussi par rapport à l'angle des tangentes menées de N à l'ellipse.

42. De N comme centre on décrit un cercle Γ tangent aux droites MF et MF′; les secondes tangentes issues de F et F′ sont parallèles à ON.

De N′ comme centre on décrit un cercle Γ' tangent aux droites MF et MF′; les secondes tangentes issues de F et F′ sont parallèles à ON′.

Les tangentes menées de M aux cercles Γ et Γ' sont égales à b.

(E. Lemoine.)

43. La différence des puissances de O par rapport aux cercles Γ et Γ' est égale à $4ab$.

44. Les polaires de O par rapport aux cercles Γ et Γ' se coupent en un point de la parallèle à la tangente en M menée par le symétrique de O par rapport à cette tangente. Ce point, qui appartient aussi à l'ordonnée de M, décrit la quartique

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}\frac{(x^2 - 2a^2)^2}{a^2 - x^2}.$$

45. La polaire de O par rapport au cercle Γ enveloppe une courbe unicursale ayant pour aire

$$U = 6\pi ab - 2\pi a^2 + \frac{15\pi}{8}(a-b)^2.$$

La polaire de O par rapport au cercle Γ′ enveloppe une unicursale dont l'aire a pour expression

$$U = 6\pi ab + 2\pi a^2 - \frac{15\pi}{8}(a-b)^2.$$

46. Les points de contact des tangentes menées au cercle Γ parallèlement à ON (elles passent par F ou F′) décrivent les quartiques

$$[x(x \mp c) + y^2]^2 = (a+b)^2[(x \mp c)^2 + y^2].$$

Les deux courbes sont égales et ont pour aire

$$U = \pi(a+b)^2 + \frac{\pi c^2}{2}.$$

Les points de contact des tangentes menées au cercle Γ′ parallèlement à ON′ (elles passent par F ou F′) décrivent les quartiques

$$[x(x \mp c) + y^2]^2 = (a-b)^2[(x \mp c)^2 + y^2].$$

Les deux courbes sont égales et ont pour aire

$$U' = \pi(a-b)^2 + \frac{\pi c^2}{2}.$$

Par suite la différence U — U′ est égale à la différence des aires des deux cercles Σ et Σ′. (*A continuer.*)

BIBLIOGRAPHIE.

Deelbaarheid en repeteerende Breuken, door J. Vuysluys. Vijfde verbeterde druk. Amsterdam, W. Versluys, 1894. (In 12 de 87 pages). Prix : florin 0,60.

Sommaire. Caractères de divisibilité (p.p. 5-17). Divisibilité des nombres (18-32). Restes négatifs (33-36).

Transformation d'une fraction ordinaire en fraction décimale (32-50). Sur les fractions décimales périodiques pures qui naissent de fractions ordinaires ayant même dénominateur (51-53).

Propriétés diverses (54-60). Restes quadratiques (61-69). Appendice (70-72). Problèmes divers (73-80). Réponses des exercices. — Table des nombres premiers de 1 à 10000.

Ces compléments d'arithmétique, très clairement rédigés, renferment par ci par là des remarques nouvelles ou peu connues (Voir par exemple §§ 37, 40, 48).

(J. N.)

Leçons sur les coordonnées tangentielles, par G. PAPELIER, ancien élève de l'école normale, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Orléans. Seconde partie, Géométrie dans l'espace. Paris, Librairie Nony, 1895. Un volume in-8° de 358 pages.

Il a été rendu compte de la première partie de ces Leçons dans *Mathesis*, (2), IV p. 116. Voici le sommaire du second volume :

I. Le point et la droite. Exercices. — Note sur le complexe linéaire. II. Généralités sur les surfaces. Exercices. — Notes : Sur la surface de l'onde, ses plans tangents multiples; surfaces podaires, surfaces parallèles; cône et conique d'un complexe. III. Surfaces développables et principe de dualité. Exercices. — Notes : Surface applicable sur une surface; une surface développable peut s'appliquer sur un plan. IV. Plans tangents et normales. Exercices et Notes. V. Classification des quadriques. Exercices et Notes. — Génératrices d'une quadrique. Propriétés du cercle de l'infini. VI. Pôles et plans polaires. Exercices et Notes. — Tétraèdres polaires réciproques. Coordonnées pluckériennes de la droite conjuguée d'une droite donnée; condition pour qu'une droite soit tangente à une quadrique. VII. Centre, plans diamétraux et diamètres, plans principaux et axes. Exercices et Notes. — Surfaces de révolution en général. — VIII. Réduction de l'équation générale du second degré. Exercices et Notes — Longueurs des axes d'une section plane d'une quadrique. Sections circulaires d'une quadrique. IX. Coordonnées tétraédriques et équations générales de quadriques. Exercices et Notes. — X. Foyers et surfaces homofocales. Exercices et Notes. — Propriétés de deux coniques dont l'une est la focale de l'autre. Coniques sphériques. XI. Propriétés de deux quadriques. Exercices et notes.

Les Leçons de M. PAPELIER sont écrites avec méthode et clarté; les exercices sont très bien choisis, les exercices développés traitent des questions importantes; la plupart des chapitres sont terminés par des développements ou indications sur des sujets intéressants qui ne rentrent pas dans le programme de l'ouvrage.

Le livre de M. PAPELIER vient combler une lacune, et il répond parfaitement au but que l'auteur s'est proposé. Nous en recommandons volontiers la lecture aux élèves de nos écoles spéciales et de la candidature en sciences physiques et mathématiques. (J. N.).

Eléments de Géométrie à l'usage des classes de lettres, par M. CH. BIOCHE, agrégé des sciences mathématiques. Paris, Belin frères, 1895. Un vol. in-12°, de 190 pages et 174 figures.

Ces Eléments sont très bien rédigés en vue des classes auxquelles ils s'adressent; on en peut aussi recommander l'emploi dans les autres établissements

qui ne préparent pas à une instruction mathématique supérieure, par exemple dans les écoles industrielles, les écoles moyennes pour filles, etc.

L'ordre des matières est à peu près celui de Legendre, sauf que le septième et le huitième livre sont réunis ici en un seul. L'auteur laisse de côté les difficultés naissant de la considération des incommensurables, et aussi certaines propositions réservées aux cours scientifiques (produit des diagonales du quadrilatère inscriptible, détermination de π, volume du segment sphérique, théorie des triangles sphériques, etc.). En revanche, il établit des rapprochements instructifs entre les diverses propositions, accompagne souvent les démonstrations de remarques propres à les élucider, et propose des exercices parfaitement appropriés aux commençants.

Nous nous abstenons de produire ici certaines critiques, qu'on pourrait adresser aussi à des ouvrages plus complets. (J. N.).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

*Question 811.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 55.)

Mettre le produit

$$(1+x\sqrt{-1})(1+x^2\sqrt{-1})(1+x^4\sqrt{-1})(1+x^8\sqrt{-1})\ldots$$

sous la forme $P+Q\sqrt{-1}$. *Dans chacun des polynomes* P, Q, *déterminer les coefficients des puissances de* x. *Quelle est la loi générale?*

Déduire, de ce problème, la décomposition de

$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})\ldots$$

en une somme de deux carrés. (E. CATALAN.)

Solution par M. E. FAUQUEMBERGUE. I. Pour développer la fonction

$$f(x)=(1+x\sqrt{-1})(1+x^2\sqrt{-1})(1+x^4\sqrt{-1})\ldots,$$

posons

$$f(x)=1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\cdots.$$

Il faut déterminer les coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots$.

Or, le changement de x en x^2 donne

$$f(x)=(1+x\sqrt{-1})f(x^2) \tag{1}$$

et

$$f(x^2)=1+A_1x^2+A_2x^4+A_3x^6+\cdots.$$

Remplaçant dans l'identité (1) $f(x)$ et $f(x^2)$ par leurs développe-

ments et égalant successivement les coefficients de x, x^2, x^3, ..., on trouve les relations

$$A_{2n} = A_n \quad \text{et} \quad A_{2n+1} = A_{2n}\sqrt{-1}, \tag{2}$$

dans lesquelles A_p désigne le coefficient de x^p.

Ces relations suffisent pour écrire de proche en proche les coefficients du développement de $f(x)$, en partant de $A_1 = \sqrt{-1}$.

L'ensemble des termes réels sera la valeur de P et l'ensemble des termes multipliés par $\sqrt{-1}$ sera celle de Q.

II. De même le produit

$$\varphi(x) = (1 - x\sqrt{-1})(1 - x^2\sqrt{-1})(1 - x^4\sqrt{-1})\ldots,$$

peut se mettre sous la forme $P - Q\sqrt{-1}$, les valeurs de P et Q étant les mêmes que dans le premier cas.

Mais le produit $f(x)\varphi(x)$ est égal à

$$(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})\ldots.$$

Cette dernière fonction sera donc mise sous la forme $(P + Q\sqrt{-1})(P - Q\sqrt{-1})$, c'est-à-dire $P^2 + Q^2$.

Exemples. — En partant de $A_1 = \sqrt{-1}$, on déduit successivement des relations (2) :

$$A_2 = \sqrt{-1}, \quad A_3 = -1. \quad A_4 = \sqrt{-1}, \quad A_5 = -1,$$
$$A_6 = -1, \quad A_7 = -\sqrt{-1}, \quad A_8 = \sqrt{-1},$$
$$A_9 = -1, \quad A_{10} = -1, \quad A_{11} = -\sqrt{-1}, \quad A_{12} = -1,$$
$$A_{13} = -\sqrt{-1}, \quad A_{14} = -\sqrt{-1}, \quad A_{15} = 1.$$

Il en résulte les identités :

$$(1 + x^2)(1 + x^4) = (1 - x^3)^2 + (x + x^2)^2;$$
$$(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) = (1 - x^3 - x^5 - x^6)^2 + (x + x^2 + x^4 - x^7)^2;$$
$$(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)(1 + x^{16})$$
$$= (1 - x^3 - x^5 - x^6 - x^9 - x^{10} - x^{12} + x^{15})^2$$
$$+ (x + x^2 + x^4 - x^7 + x^8 - x^{11} - x^{13} - x^{14})^2.$$

On remarquera que ce procédé ne donne qu'une des décompositions en deux carrés dont le produit considéré est susceptible, décompositions qu'on obtiendrait par l'emploi répété de l'identité de Fibonacci :

$$(r^2 + s^2)(r_1^2 + s_1^2) = (rr_1 \pm ss_1)^2 + (rs_1 \mp r_1 s)^2$$

Parthenay, 4 juin 1895.

Question 907.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 32).

On considère une ellipse E *et un triangle équilatéral inscrit* ABC. *La circonférence circonscrite à ce triangle coupe* E *en un quatrième point* P. *Démontrer que les trois ellipses homothétiques à* E *et ayant un contact du second ordre avec le cercle* ABC *respectivement en* A, B, C *passent par* P. (L. Desaint.)

Solution par MM. Cl. Servais *et* Barisien. Les deux droites AP et BC sont également inclinées sur les axes de la conique E qui sont parallèles à ceux de la première conique homothétique E_a. La tangente au point A à la conique E_a est parallèle à BC, donc AP est la corde de courbure au point A de la conique E_a.

Solution par MM. Droz-Farny *et* Déprez. On connaît le théorème de Steiner : *L'ellipse circonscrite à un triangle et ayant son centre de gravité comme centre, coupe la circonférence circonscrite en un quatrième point par lequel passent les trois cercles osculateurs à l'ellipse aux points* A, B, C.

Projetons orthogonalement la figure sur un plan de manière que la projection du triangle soit un triangle équilatéral ; l'ellipse de Steiner se projette suivant la circonférence circonscrite et les quatre cercles suivant quatre ellipses homothétiques ; d'où le théorème de M. L. Desaint.

M. Barisien fait remarquer que toutes les ellipses qui ont un contact du second ordre avec le cercle ABC en A, B ou C et dont les axes sont parallèles à ceux de E, passent par le point P. M. Déprez donne également une solution analytique en prenant le triangle ABC pour triangle de référence.

×Question 911.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 55).

Dans le plan d'un cercle donné dont le rayon est r, on mène deux parallèles dont la distance à une tangente du cercle est $\pm r\sqrt{3}$: *Les points d'intersection de ces deux parallèles avec le cercle forment sur cette courbe un groupe équianharmonique.* (Retali.)

Solution par M. Cl. Servais. L'une des parallèles *d* rencontre la courbe en deux points réels A et B et l'on a

$$\frac{\overline{AB}^2}{4} = r^2(2\sqrt{3} - 3).$$

La puissance de l'involution des points conjugués sur l'autre parallèle d' est $-r^2(2\sqrt{3}+3)$.

Soient C le point de contact de la tangente; A', B' les projections des points A et B sur d', faites du point C; D le pied de la perpendiculaire abaissée de C sur d', P le support de deux droites isotropes passant par les points imaginaires I et I' situés sur d'. On a

$$\frac{A'D}{PD}=\sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3}}=tg\,15^\circ.$$

L'angle A'PB' est donc égal à 30° et ses côtés forment avec les droites isotropes qui passent par P un faisceau équianharmonique (*Mathesis*, 1890, p. 233). Mais

$$C(ABII')=(A'B'II')=P(A'B'II'),$$

la propriété est donc démontrée.

Solution par M. Déprez. Soient C le point de contact de la tangente, et A, B, A', B' les points de rencontre du cercle avec les deux parallèles. Si l'on prend pour axes le diamètre mené par C et la tangente, les ordonnées des points A, B, A', B' sont données par les équations

$$x^2+y^2-2rx=0,\quad x=\pm r\sqrt{3},$$

ou par

$$y^2+3r^2\mp 2r^2\sqrt{3}=0;$$

elles ont donc pour expression $\pm r\sqrt{\pm 2\sqrt{3}-3}$. Les coefficients angulaires des droites AC, CB, CA', CB' sont donc

$$K_1=\frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2-\sqrt{3}},\quad K_2=-\sqrt{2-\sqrt{3}},$$

$$K_3=-\sqrt{-2-\sqrt{3}},\quad K_4=\sqrt{-2-\sqrt{3}},$$

et le rapport anharmonique du faisceau C(ABA'B') est

$$\frac{K_3-K_1}{K_3-K_2}:\frac{K_4-K_1}{K_4-K_2}=\frac{(\sqrt{2-\sqrt{3}}+\sqrt{-2-\sqrt{3}})^2}{(\sqrt{2-\sqrt{3}}-\sqrt{-2-\sqrt{3}})^2}=\frac{1-\sqrt{-3}}{2};$$

ce qui démontre le théorème.

M. Droz Farny déduit, des équations du cercle et du système des deux parallèles, c'est-à-dire de

$$x^2+y^2-2rx=0,\quad x^2-3r^2=0,$$

l'équation homogène

$$(x^2+y^2)^2-\frac{4}{3}x^4=0, \quad \text{ou} \quad 3\left(\frac{y}{x}\right)^4+6\left(\frac{y}{x}\right)^2-1=0,$$

qui représente le faisceau C (ABA'B').

Or si les paramètres de quatre éléments d'une ponctuelle ou d'un faisceau vérifient l'équation

$$AK^4+4BK^3+6CK^2+4DK+E=0,$$

la condition pour qu'on ait un quaterne équianharmonique est

$$AE-4BD+3C^2=0.$$

Elle est vérifiée par l'équation $3K^4+6K^2-1=0$; donc etc.

×Question 919.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 56.)

On mène deux parallèles à un côté d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle, à la distance $\pm\frac{1}{2}r\sqrt{3}$ *de ce côté : les points d'intersection de ces deux parallèles avec le cercle, forment sur cette courbe un groupe équianharmonique.* (Retali.)

Solution par M. Cl. Servais. L'une des parallèles d rencontre le cercle en deux points réels A, B et l'on a

$$\frac{\overline{AB}^2}{4}=\frac{r^2\sqrt{3}}{2}.$$

La puissance de l'involution des points conjugués sur l'autre parallèle d' est $-\frac{r^2\sqrt{3}}{2}$. Soient D le point central de cette involution, E le milieu de AB, A' et F les points où la tangente au point A, coupe les droites d'. DE et On a

$$EF=\frac{r\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}.$$

$$\frac{A'D}{AE}=\frac{FD}{EF} \quad \text{ou} \quad A'D=\frac{r\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Si P est le support de deux droites isotropes passant par les points imaginaires I et I' situés sur d', on a

$$\frac{A'D}{PD}=\sqrt{3}.=\operatorname{tg}60°.$$

L'angle aigu formé par la droite PA' et la parallèle menée par P à la droite d' est donc égal à 30°; ses côtés forment donc avec les droites

isotropes, un faisceau équianharmonique (*Mathesis*, 1890, p. 233). Mais

$$A(ABII') = (A'\infty II') = P(A'\infty II')$$

la propriété est donc démontrée.

Solution par M. Déprez. Si l'on prend pour axe des y la tangente Cy parallèle au côté du triangle équilatéral et le diamètre correspondant Cx, le cercle et les deux parallèles ont pour équations

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0, \quad x = \tfrac{1}{2} r(1 \pm \sqrt{3}).$$

Les ordonnées des points A, B, A', B' où ces parallèles rencontrent le cercle sont données par

$$y^2 = 2rx - x^2 = \pm \tfrac{1}{2} r^2 \sqrt{3};$$

par suite les inverses des coefficients angulaires des droites CA, CB, CA', CB' ont pour expressions

$$K_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2\sqrt{3}}}, \quad K_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{-\sqrt{2\sqrt{3}}}, \quad K_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{-2\sqrt{3}}},$$

$$K_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{-\sqrt{-2\sqrt{3}}}.$$

Le rapport anharmonique C(ABA'B') a pour valeur

$$\frac{K_3 - K_1}{K_3 - K_2} : \frac{K_4 - K_1}{K_4 - K_2} = \left(\frac{K_3 - K_1}{K_3 + K_1}\right)^2 = \frac{1-\sqrt{-3}}{2}, \quad \text{c. q. f. d.}$$

M. Droz Farny représente le cercle et le système des deux parallèles par les équations

$$x^2 + y^2 - 2rx = 0, \quad x - \tfrac{1}{2} r(1 \pm \sqrt{3}) = 0,$$

et en déduit l'équation homogène

$$x^2 + y^2 - \frac{4x^2}{1 \pm \sqrt{3}} = 0, \quad \text{ou} \quad y^2 - 3x^2 \pm \sqrt{3}(x^2 + y^2) = 0,$$

qu'on peut encore écrire ainsi :

$$(y^2 - 3x^2)^2 - 3(x^2 + y^2)^2 = 0, \quad \text{ou} \quad y^4 + 6x^2y^2 - 3x^4 = 0;$$

elle représente les quatre droites CA, CB, CA', CB'.

La solution s'achève comme celle de la question 911.

Question 918.

(Voir *Mathesis*. (2), IV, p. 56.)

Soit AB *un diamètre fixe d'une circonférence. Prenons sur la tangente menée au point* M *de la circonférence les segments* MA', MB' *respectivement égaux aux cordes adjacentes* MA *et* MB. *Trouver :* 1° *les lieux des points*

A′, B′ *lorsque* M *varie;* 2° *le lieu du point d'intersection des droites* AB′, A′B ; 3° *le lieu du point d'intersection des droites* AA′, BB′.

(DE ROCQUIGNY.)

Solution par M. DÉPREZ. 1. Prenons pour axes AB et le diamètre perpendiculaire Oy. En désignant l'angle MOA par φ, on a pour équations de la tangente MA′ et du cercle décrit du centre M avec le rayon MA :

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = r,$$

$$x^2 + y^2 - 2rx\cos\varphi - 2ry\sin\varphi + r^2(2\cos\varphi - 1) = 0.$$

Résolvons ces équations par rapport à $\cos\varphi$ et à $\sin\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{3r^2 - (x^2+y^2)}{2r^2}, \quad \sin\varphi = \frac{r^2(2r-3x) + x(x^2+y^2)}{2r^2y}.$$

L'équation du lieu de A′ est donc

$$y^2[3r^2 - (x^2+y^2)]^2 + [r^2(2r-3x) + x(x^2+y^2)]^2 = 4r^4y^2.$$

En changeant r en $-r$, on a l'équation du lieu de B′.

2° Les coordonnées des points A′, B′ étant :

$$\begin{cases} x = r(\cos\varphi + 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\varphi), \\ y = r(\sin\varphi - 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi), \end{cases} \quad \begin{cases} x = r[\cos\varphi - 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\varphi], \\ y = r[\sin\varphi + 2\cos\frac{\varphi}{2}\cos\varphi], \end{cases}$$

on a pour les équations des droites A′B, AB′ :

$$y\left(1 + \cos\varphi + 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right) - (x+r)\left(\sin\varphi - 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\right) = 0,$$

$$y\left(1 - \cos\varphi + 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right) + (x-r)\left(\sin\varphi + 2\cos\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\right) = 0.$$

Pour trouver l'équation du lieu sur lequel se coupent ces droites, il faudrait éliminer φ entre les égalités précédentes ; il est préférable de chercher les valeurs de x et y en fonction du paramètre φ.

3° Les droites AA′, BB′ sont perpendiculaires aux bissectrices des angles AMA′, BMB′ ; ces bissectrices forment un angle constant égal à $\frac{3\pi}{4}$, donc les droites AA′, BB′ se coupent sur une circonférence fixe.

M. POORT (Groningue) cherche l'équation du lieu (A′) en coordonnées polaires $AA' = \rho$, $A'AB = \omega$. Si φ désigne l'angle MBA, on a

$$\frac{1}{2}\rho = MA\sin\frac{\varphi}{2} = 2r\sin\varphi\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$\omega = MAB + 90° - \frac{\varphi}{2} = 180° - \frac{3\varphi}{2};$$

l'équation demandée est donc

$$\rho = 4r \sin (120^\circ - \tfrac{1}{3}\omega) \sin (60^\circ - \tfrac{1}{3}\omega).$$

Si l'axe polaire positif a la direction BA, ω est remplacé par $180^\circ - \omega$, et l'équation prend la forme plus simple

$$\rho = 4r \sin \tfrac{2}{3}\omega \sin \tfrac{1}{3}\omega.$$

Question 939.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 103).

Dans le plan d'un triangle ABC, *placer un cercle* O *de rayon donné, de telle manière que le triangle polaire de* ABC *par rapport à ce cercle ait une aire minimum.* (MILLER.)

Solution par MM. DROZ FARNY *et* HACKEN. Soient A', B', C' les pôles des côtés BC, AC, AB par rapport à un cercle de centre O et de rayon ρ, le centre O étant supposé à l'intérieur de ABC. Soient M, N, P les pieds des perpendiculaires OA', OB', OC' sur BC, CA, AB. On a

$$OA' = \frac{\rho^2}{OM}, \quad OB' = \frac{\rho^2}{ON}, \quad OC' = \frac{\rho^2}{OP},$$

$$A'B'C' = OB'C' + OC'A' + OA'B',$$

$$\frac{OB'C'}{ABC} = \frac{OB'.OC'}{bc} = \frac{\rho^4}{(b.ON)(c.OP)} = \frac{\rho^4}{4OCA.OAB},$$

$$\frac{OC'A'}{ABC} = \frac{\rho^4}{4OAB.OBC}, \quad \frac{OA'B'}{ABC} = \frac{\rho^4}{4OBC.OCA};$$

par suite,

$$\frac{A'B'C'}{ABC} = \frac{\rho^4 (OAB + OBC + OCA)}{4OAB.OBC.OCA}, \quad A'B'C' = \frac{\rho^4 . \overline{ABC}^2}{4OAB.OBC.OCA}. \quad (1)$$

La somme $OAB + OBC + OCA$ étant constante, le maximum du produit $OAB.OBC.OCA$, et par conséquent le minimum de A'B'C', exige que $OAB = OBC = OCA$.

Le point cherché O coïncide donc avec le centre de gravité du triangle ABC.

Si l'on prend O sur un côté de ABC, l'aire A'B'C' est infinie ; si ce point est extérieur à ABC et s'éloigne indéfiniment, l'aire A'B'C' tend vers zéro.

M. Dépaez (Charleroi) introduit les coordonnées normales OM $= x$, ON $= y$ OP $= z$ du centre O et arrive ainsi à la formule

$$A'B'C' = \frac{S\rho^4}{2Rxyz}, \qquad (2)$$

d'où il déduit la question 929 et les remarques suivantes : 1° Le lieu d'un point O, tel que la surface A'B'C' reste constante est une cubique : 2° Si l'on doit placer deux triangles donnés ABC, A'B'C', de manière qu'ils soient polaires réciproques par rapport à un cercle, on cherche les points O, O' tels que les angles BOC, COA, AOB soient égaux à $\pi - A'$, $\pi - B'$, $\pi - C'$, et les angles B'O'C', C'O'A', A'OB' égaux à $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$; on transporte ensuite le quadrangle A'B'C'O' de manière que O' coïncide aux O et que B'C' soit perpendiculaire OA; la formule (2) détermine le rayon ρ du cercle directeur. En particulier A'B'C' peut coïncider avec ABC; alors O est l'orthocentre de ABC.

M. Droz Farny montre que la formule (1) peut servir à démontrer un théorème de M. Faure (N. A. M., 1866, p. 511.)

×Question 934.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 104.)

Soit ABCD *un quadrilatère quelconque. On joint les sommets* A *et* B *à un point quelconque* P *de la droite* CD. *Par* D *et* C *on mène* DM, CM *respectivement parallèles à* AP, BP. *On demande :* 1° *le lieu du point* M. 2° *l'enveloppe de la droite* MP. (L. Meurice.)

Solution géométrique par MM. Lemoine, Mandart, Droz-Farny, Fairon (*Seraing*). 1° Les droites AP, BP se correspondent dans deux faisceaux perspectifs; par suite leurs parallèles DM, CM, sont des rayons homologues de deux faisceaux projectifs, et même perspectifs à cause du rayon uni CD qui correspond au point P transporté à l'infini sur CD. Le point M décrit donc une droite u. Lorsque P est à l'intersection des droites AB, CD, M est à l'infini dans la direction AB; donc u est parallèle à AB. 2° Les parallèles AP, DM marquent sur CD et u des ponctuelles projectives; il en résulte que la droite PM enveloppe une conique Σ tangente aux droites CD et u. Lorsque P coïncide avec D ou C, la droite PM se confond avec AD ou BC; donc Σ touche les côtés AD, BC. Le côté AB est également une tangente; il correspond au point P confondu avec l'intersection de AB et CD. Le côté CD est même une asymptote, puisque son point à l'infini correspond à M confondu avec l'intersection de CD et u.

M. Fairon accompagne sa solution de quelques remarques intéressantes sur les quatre droites u et les quatre enveloppes Σ que l'on obtient en appliquant la proposition 934 successivement aux quatre côtés d'un même quadrilatère. Nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de les reproduire.

La première partie de la question se rencontre dans les *Éléments de statique graphique* par E. Rouché, pp. 9-11. L'auteur démontre d'abord au moyen de triangles semblables le théorème suivant : *Soient* ABC, A'B'C' *deux triangles tels que les côtés* AB *et* AC *soient respectivement parallèles à* A'B' *et* A'C'. *La parallèle* AD *à* B'C' *et la parallèle* A'D' *à* BC *divisent respectivement* BC *et* B'C' *aux points* D, D' *en parties inversement proportionnelles, de sorte que* DB : DC = D'C' : D'B'. De cette proposition résulte immédiatement la suivante : *Les bases* BC, B'C' *de deux triangles variables* ABC, A'B'C' *restant fixes et les côtés* AB, AC *restant respectivement parallèles à* A'B', A'C' ; *si le sommet* A *du premier décrit une droite parallèle à la base* B'C' *du second, le sommet* A' *du second décrira une droite parallèle à la base* BC *du premier*. En effet, si le point D est fixe, il en est de même de D'.

Solution analytique par MM. Barisien, J. Jonesco. 1° Si l'on prend pour axes les droites AB, CD qui se coupent en O, et qu'on pose $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OD = d$, $OP = p$, les équations de DM, CM sont

$$\frac{x}{a} + \frac{y-d}{p} = 0, \quad \frac{x}{b} + \frac{y-c}{p} = 0; \tag{1}$$

d'où, en éliminant p,

$$y = \frac{ad - bc}{a - b} = K.$$

Le lieu de M est donc une droite parallèle à AB.

2° Les coordonnées de M sont

$$y = K, \quad x = -\frac{a(K-d)}{p} = \frac{l^2}{p};$$

K et l sont des constantes.

L'équation de PM étant

$$p^2x - (Kx + l^2)\,p + l^2y = 0,$$

l'enveloppe de cette droite a pour équation

$$(Kx + l^2)^2 - 4l^2xy = 0;$$

c'est une hyperbole ayant pour asymptote CD.

Si $K = 0$, les droites BC et AD sont parallèles et l'hyperbole a pour équation

$$xy = \frac{l}{4}.$$

Autres solutions analytiques par MM. Fairon et Dépréz.

Question CCCXIII.

(Voir N. C. M., t. III, p. 433).

Pour quelles valeurs de n la somme des boulets des n premières piles, à base carrée, est-elle un carré parfait? (E. Lucas.)

Solution par M. E. Fauquembergue. Le nombre des boulets contenus dans une pile à base carrée et ayant K boulets de côté, est donné par la formule

$$\frac{K(K+1)(2K+1)}{6} \quad \text{ou} \quad \frac{K^3}{3}+\frac{K^2}{2}+\frac{K}{6}.$$

Donc la somme S des boulets des n premières piles est égale à

$$\frac{S_3}{3}+\frac{S_2}{2}+\frac{S_1}{6},$$

S_m désignant la somme des puissances m des n premiers nombres entiers.

Or,

$$S_1=\frac{n(n+1)}{2}, \quad S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad S_3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Il en résulte

$$S=\frac{n(n+2)(n+1)^2}{12}.$$

Pour que cette expression soit un carré parfait, il faut et il suffit que le produit $n(n+2)$ soit le triple d'un carré. Posons donc

$$n(n+2)=3p^2, \quad \text{d'où} \quad (n+1)^2-3p^2=1.$$

Les solutions entières de cette équation sont toutes données par les deux termes des réduites de rang pair dans le développement de $\sqrt{3}$ en fraction continue, ou encore par les formules

$$n+1=\frac{(2+\sqrt{3})^m+(2-\sqrt{3})^m}{2}, \quad p=\frac{(2+\sqrt{3})^m-(2-\sqrt{3})^m}{2\sqrt{3}},$$

m étant un nombre entier quelconque.

On trouve ainsi

$$n=1, \quad 6, \quad 25, \quad 96, \quad 361, \quad \ldots, \quad \text{etc.}$$

Ces valeurs de n forment une suite récurrente dont l'échelle de relation est

$$u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2} + 2.$$

Ajoutons que ces valeurs sont alternativement des carrés impairs et des sextuples de carrés pairs, comme cela pouvait être prévu d'après l'équation $n(n+2) = 3p^2$.

Parthenay, 11 janvier 1895.

×QUESTIONS D'EXAMEN.

693. Trois quelconques des quatre hauteurs d'un tétraèdre peuvent-elles être parallèles à un même plan?

694. Les deux bissectrices de l'angle A et les deux bissectrices de l'angle B d'un triangle ABC sont tangentes à une parabole qui a pour foyer le point C et pour directrice le côté AB; son équation est

$$x^2 + y^2 - z^2 \sin^2 C + 2xy \cos C = 0. \quad \text{(E. Lemoine.)}$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1027.** Construire un triangle ABC, connaissant deux côtés AB, AC et sachant que l'angle $C = 2B$ ou $C = 3B$.

1028. Par un point P donné dans le plan d'une ellipse on mène deux cordes orthogonales AB et CD.

1° L'axe radical des cercles décrits sur AB et CD comme diamètres passe par un point fixe.

2° Le pied de l'axe radical décrit une circonférence. (Déprez.)

×**1029.** Soient O le centre et AB une corde quelconque d'une ellipse donnée. Trouver le maximum de l'aire du triangle OAB. 1° lorsque la droite AB se déplace parallèlement à elle même; 2° lorsqu'elle pivote autour d'un point fixe. (Cristescu.)

1030. Les plans osculateurs à une quartique gauche en ses points d'intersection avec un plan quelconque rencontrent de nouveau la quartique en quatre points situés dans un même plan. (A. Cazamian.)

Rectification. La note au bas de la page 105 doit être complétée ainsi :

Elle contient également beaucoup de résultats propres à l'auteur (J. N.)

*SUR LES VALEURS PRINCIPALES DES RADICAUX,

par M. De Tilly.

I. On trouve, dans certains ouvrages, des conventions relatives au choix que l'on peut faire entre les diverses racines algébriques d'une même quantité.

Par exemple, dans le traité d'Algèbre de Falisse et Graindorge (t. I, 10e éd.; p. 251), il est dit : « la notation $\sqrt{A}$ représente donc indifféremment les deux racines carrées de A. Cependant, lorsque le radical $\sqrt{A}$ n'est précédé d'aucun signe, ou lorsqu'il est précédé du signe +, on suppose ordinairement qu'il représente seulement la racine positive, que l'on appelle *la valeur arithmétique de la racine;* on exprime la valeur négative en faisant précéder le radical du signe — ».

Ainsi, entre les deux valeurs possibles, on choisit en quelque sorte la valeur positive, la racine arithmétique de A, comme valeur principale, que l'on devra adopter chaque fois que le contraire ne sera pas explicitement indiqué.

Les auteurs considèrent ensuite le cas où, au lieu d'avoir sous le radical la quantité positive A, on y aurait la quantité négative — A. « Soit, » disent-ils, « le radical imaginaire $\sqrt{-A}$. Si l'on désigne par a la racine carrée du nombre positif A, ... on aura l'expression : $a\sqrt{-1}$ ou $\sqrt{A}\sqrt{-1}$ ». Et comme, d'après tout ce qui précède, a, ou $\sqrt{A}$, sans double signe, représente la racine arithmétique de la quantité positive A, on voit que, ici encore, les auteurs font un choix entre les deux racines. C'est $\sqrt{A}\sqrt{-1}$, ou $+\sqrt{A}\sqrt{-1}$, qui est, pour eux, la racine principale de — A. Mais on voit aussi que cela est déjà dit moins explicitement pour les racines de — A que pour celles de + A.

Plus loin, les auteurs deviennent moins explicites encore. Ils donnent, par exemple (p. 302), des formules (13 et 14) pour la transformation de $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$ et de $\sqrt{a-b\sqrt{-1}}$, sans doubles signes dans le second membre, et dans les applications qui suivent (p. 303) on ne met pas non plus de doubles signes. On choisit donc en réalité l'une des deux racines, tout en prévenant qu'il en existe une autre. Mais ici on ne découvre plus, à première vue, sur quoi le choix est fondé, ni s'il est d'accord avec les conventions antérieures, d'autant plus que dans les

applications on a soin de combiner les signes de a et de b de toutes les manières possibles.

Quant aux formules $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ (pp. 300 et 301), elles donnent lieu à une observation plus grave, sur laquelle nous reviendrons.

Bornons-nous, en ce moment, à l'étude de $\sqrt{a + b\sqrt{-1}}$.

Nous ferons abstraction des méthodes ordinaires de recherche de la valeur de ce radical, méthodes qui auraient besoin d'être soigneusement revues, puisqu'elles conduisent en apparence à une solution unique, et nous nous bornerons à indiquer une première solution, que l'on peut vérifier par l'élévation au carré, et dont on peut ensuite tirer toutes les autres. Cette solution est la suivante :

$$\text{(I)} \qquad \sqrt{a + b\sqrt{-1}} =$$

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} & \text{(pour } a > 0 \text{ et } b > 0\text{).} \\ \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - \sqrt{-1}\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} & \text{(pour } a > 0 \text{ et } b < 0\text{).} \\ \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} & \text{(pour } a < 0 \text{ et } b > 0\text{).} \\ \sqrt{\dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} - \sqrt{-1}\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} & \text{(pour } a < 0 \text{ et } b < 0\text{).} \end{cases}$$

Mais, chacun des quatre résultats partiels pouvant être affecté, dans son ensemble, du signe + ou du signe —, il y a, en définitive, seize arrangements possibles, et l'on aurait le choix entre seize solutions, si la seule condition imposée à la racine carrée de $a + b\sqrt{-1}$ était de reproduire cette imaginaire complexe par l'élévation au carré.

Pour choisir entre ces seize solutions, il faut écarter d'abord toutes celles qui, au moment où b s'annule, ne donnent pas pour $\sqrt{a}$ la valeur principale de ce radical, telle qu'elle a été adoptée dans les conventions préliminaires. Sept combinaisons disparaissent ainsi, et il en reste neuf à discuter.

Chaque fois que b ou a s'annule, deux des formules (I) sont simultanément applicables, et pour la continuité parfaite de la racine (I),

étendue à toutes les valeurs de a et de b, depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, il faudrait que ces deux formules donnassent le même résultat. Cette continuité parfaite est impossible. En faisant successivement $b = 0$, ou $a = 0$, dans les neuf groupes restants, on trouve que six d'entre eux donnent lieu chacun à trois discontinuités, tandis que les trois derniers groupes donnent lieu chacun à une seule discontinuité.

Puisque la continuité parfaite de la fonction $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$ est impossible, il faut du moins choisir, comme racine principale, l'une de celles qui présentent le moins de discontinuités, et nous n'avons plus ainsi le choix qu'entre trois solutions, dont l'une est la solution (I) ci-dessus.

Les deux autres sont les suivantes :

(II) $$\sqrt{a+b\sqrt{-1}} =$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} & \text{(pour } a>0 \text{ et } b>0\text{)}. \\ -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} & \text{(pour } a>0 \text{ et } b<0\text{)}. \\ \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} & \text{(pour } a<0 \text{ et } b>0\text{)}. \\ -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} & \text{(pour } a<0 \text{ et } b<0\text{)}. \end{cases}$$

(III) $$\sqrt{a+b\sqrt{-1}} =$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} & \text{(pour } a>0 \text{ et } b>0\text{)}. \\ \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} & \text{(pour } a>0 \text{ et } b<0\text{)}. \\ \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} & \text{(pour } a<0 \text{ et } b>0\text{)}. \\ -\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} & \text{(pour } a<0 \text{ et } b<0\text{)}. \end{cases}$$

La discontinuité de la première se présente au moment où $b = 0$ et $a < 0$. Elle donne alors pour $\sqrt{a}$ les valeurs $\pm\sqrt{-a}\sqrt{-1}$, tandis qu'il ne faudrait obtenir que le signe supérieur.

La discontinuité de la seconde se présente au moment où $b = 0$ et $a > 0$. Elle donne alors $\pm\sqrt{a}$, tandis qu'il ne faudrait trouver que $+\sqrt{a}$.

Enfin la discontinuité de la troisième répond à $a = 0$ et $b < 0$. On trouve alors deux imaginaires complexes de signes contraires.

Les solutions I et II peuvent s'écrire chacune en une seule formule, et la solution III en deux formules comme il suit :

$$\text{I.}\quad \sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \pm \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

$$\text{II.}\quad \sqrt{a \pm b\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \pm \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}.$$

$$\text{III.}\quad \sqrt{a+b\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

$$\sqrt{\pm a - b\sqrt{-1}} = \pm\left(\sqrt{\frac{\pm a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} - \sqrt{-1}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}\mp a}{2}}\right).$$

Dans ces formules, b est supposé positif; a est aussi supposé positif dans la quatrième; il est positif ou négatif dans les trois premières. On doit prendre simultanément les signes supérieurs ou les signes inférieurs.

Parmi ces solutions, nous adopterons la première, parce qu'elle est la plus simple des trois, et qu'elle s'accorde avec celle que choisissent les auteurs de traités élémentaires (*), bien que leur choix repose sur une discussion insuffisante. La troisième aurait l'avantage de respecter plus complètement les conventions préliminaires et de faire porter la discontinuité sur un cas où aucune convention n'a été antérieurement établie.

Nous y reviendrons; mais nous nous en tiendrons en ce moment à la première. Malgré la discontinuité qu'elle présente chaque fois que b passe par zéro dans une période où a est négatif, cette racine principale

(*) Valisse et Graindorge, T. I, déjà cité, 10e éd., p. 302; et T. II, 4e éd., pp. 11 et 12.

de $a+b\sqrt{-1}$ n'en constitue pas moins une fonction parfaitement déterminée dans toute son étendue, aussi bien et mieux même que les fonctions simples $\operatorname{tg} x$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x-a}$, lesquelles sautent aussi brusquement du positif au négatif (de $+\infty$ à $-\infty$) pour certaines valeurs de la variable.

Nous disons *mieux déterminée*, car pour les trois dernières fonctions l'indétermination est réelle, tandis que pour $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$, on sait qu'il faut choisir $+\sqrt{-1}\sqrt{-a}$, au moment où b s'annule, a étant négatif.

Ainsi que nous l'avons dit précédemment, ces remarques nous ont amené à nous occuper aussi du cas où la quantité sous le radical, au premier membre, au lieu d'être imaginaire, est simplement irrationnelle et nous avons constaté que dans ce cas, au moins, les formules des traités élémentaires et notamment celles qui sont données dans les deux ouvrages spécialement recommandés par le conseil de perfectionnement de l'instruction moyenne(*) ont besoin d'explication et dans l'un des deux de rectification.

Dans la transformation des imaginaires sous un radical carré, le doute ne portait que sur le signe du second membre, mais l'élévation au carré, opérée en respectant toutes les conventions antérieures, donnait, dans tous les cas, un résultat exact. Ici, il n'en est plus de même.

On lit dans le *Traité d'Algèbre* de M. Bertrand (1ère p., 15e éd.,

---

(*) Ceci n'est pas une critique d'une décision récente du conseil de perfectionnement de l'enseignement moyen en Belgique, d'autant moins que l'auteur de la présente note fait partie de ce conseil et qu'il a voté la décision dont il s'agit; mais il a été entendu qu'en recommandant certains livres, on ne prétendait pas les déclarer irréprochables. La désignation d'ouvrages recommandés a uniquement pour objet d'éviter que les élèves ne s'égarent dans un fouillis de méthodes particulières plus ou moins défectueuses ; ces ouvrages constituent, pour les élèves comme pour les interrogateurs, un ensemble de connaissances et de méthodes qu'il est toujours permis de dépasser ou d'améliorer, sans que l'on puisse rester au dessous, un point de départ de perfectionnements futurs. Il a été entendu aussi que la liste des livres recommandés doit être considérée uniquement comme répondant aux nécessités actuelles de l'enseignement, et qu'elle pourrait être modifiée ultérieurement, si les auteurs refusaient d'adopter les modifications jugées nécessaires, ou de corriger les défauts qu'on leur signalerait.

p. 196) : « Faisons remarquer, d'ailleurs, que, quel que soit $a^2 - b$, la formule

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

est vraie, puisqu'en l'élevant au carré, on arrive à une identité ». Il ressort de l'ensemble du § 274 de l'auteur que par les mots « quel que soit $a^2 - b$ », il a simplement voulu dire : « lors même que $a^2 - b$ ne serait pas un carré parfait »; mais il doit supposer que $a^2 - b$ soit positif, de même que a, b, x, y, sans quoi il y aurait trop à redire sur ce § 274. Et cependant ce paragraphe a pour objet la transformation des expressions trouvées dans la formule (2) de la page 194, qui résout l'équation bicarrée, formule où toutes les hypothèses sur les signes peuvent se réaliser. Il manque peut-être là un mot d'explication, mais il n'y a pas en ce point d'erreur formelle dans le Traité de M. Bertrand.

Il n'en est pas de même dans l'ouvrage de ses commentateurs, MM. Falisse et Graindorge, qui, interprétant explicitement les mots « quel que soit $a^2 - b$ » dans un sens absolu, affirment à la page 302 que « les formules (9) et (11) ne cessent pas d'exister quels que soient les signes de a et de b » et indiquent aussi le cas où $\sqrt{a^2-b}$ serait imaginaire, sans examiner de près si dans tous ces cas les formules sont encore exactes.

Il est facile de voir qu'il n'en est rien, et qu'au lieu d'écrire une seule formule applicable à tous les cas, il faut en écrire au moins deux, selon les signes de a et de $a^2 - b$ (nous ne parlerons plus du signe de b, car si b était négatif, on retomberait sur la discussion placée au début de cette note).

Voici les formules exactes :

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} =$$

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} & (a \text{ positif, quel que soit } a^2-b \text{; ou bien } a \text{ et } a^2-b \text{ négatifs}). \\ \mp\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} & (a \text{ négatif, } a^2-b \text{ positif}). \end{cases}$$

On les vérifie aisément, en se rappelant toutefois :

1° Que si $a^2 - b$ est positif, l'élévation au carré démontre l'exactitude

des formules, aux signes près, mais qu'il faut alors faire tendre b vers zéro pour déterminer les signes.

2° Que si $a^2 - b$ est négatif, on doit recourir, pour trouver la vraie valeur du second membre, aux formules établies précédemment pour $\sqrt{a \pm b\sqrt{-1}}$, d'où résulte qu'au fond la transformation donnée ordinairement en premier lieu, et considérée par les auteurs comme la plus simple, ne peut être étudiée complètement qu'en s'appuyant sur l'autre et présente au moins les mêmes difficultés qu'elle, si l'on veut y comprendre tous les cas possibles. (*A continuer*).

SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES,

par M. Gob, professeur à Hasselt.

1. Soient C et C′ deux courbes algébriques planes d'ordre n ayant les mêmes asymptotes. Considérons une sécante quelconque rencontrant la courbe C aux points $A_1, A_2, \ldots A_n$ et la courbe C′ aux points $B_1, B_2 \ldots B_n$. On sait que ces deux groupes de points ont le même barycentre, de sorte que si M désigne un point quelconque de la sécante, on a la relation

$$\Sigma_1^n MA_i = \Sigma_1^n MB_i. \qquad (1)$$

Traçons une droite MX faisant avec la sécante MA_i un angle quelconque θ; prenons-la pour axe polaire et le point M pour pôle. Différentions maintenant la relation (1) dans l'hypothèse où l'on imprime à la sécante MA_i une rotation infiniment petite $d\theta$. Si MP_i et MQ_i désignent les sous-normales polaires relatives aux points A_i et B_i, on aura

$$\frac{dMA_i}{d\theta} = MP_i, \quad \frac{dMB_i}{d\theta} = MQ_i.$$

Nous obtenons donc la formule

$$\Sigma_1^n MP_i = \Sigma_1^n MQ_i. \qquad (2)$$

2. Supposons maintenant que la droite MP_i soit normale à la courbe C en un point A, et déplaçons la sécante MA_i parallèlement à elle-même jusqu'à ce qu'elle se confonde avec la tangente en A. Le point M et deux des points d'intersection de la courbe C avec la sécante ont pour limite le point A. Soient A_{n-1} et A_n ces deux points; alors les points P_{n-1} et P_n tendront vers le centre de courbure ω relatif au point A, et si nous continuons à représenter par A_i, B_i, P_i, Q_i les positions des

points A_i, B_i, P_i, Q_i lorsque la sécante se confond avec la tangente en A, la formule (2) prendra la forme

$$2A\omega + \Sigma_1^{n-2} AP_i = \Sigma_1^n AQ_i. \qquad (3)$$

3. Lorsque toutes les asymptotes sont réelles, il y a avantage à prendre pour la courbe C' le système des asymptotes. Dans cette hypothèse, la formule (3), appliquée à l'hyperbole, donne le théorème suivant :

Si la tangente au point A *de l'hyperbole coupe les asymptotes en des points* B_1 *et* B_2, *et si* Q_1 *et* Q_2 *désignent les points de rencontre de la normale en* A *avec les perpendiculaires élevées sur les asymptotes par les points* B_1 *et* B_2, *le centre de courbure relatif au point* A *est au milieu du segment* $Q_1 Q_2$.

4. Supposons maintenant que la courbe C soit une ellipse ; la courbe C' sera une ellipse homothétique à C. Comme celle-ci est de grandeur quelconque, nous la choisirons telle que ses points de rencontre B_1 et B_2 avec la tangente au point A soient les extrémités de deux diamètres conjugués OB_1 et OB_2. Dans ce cas les normales aux points B_1 et B_2 s'obtiendront immédiatement en abaissant des points B_1 et B_2 des perpendiculaires sur OB_2 et OB_1. On voit sans peine que pour qu'il en soit ainsi, il suffit de prendre les distances AB_1 et AB_2 égales au demi-diamètre conjugué à OA. La formule (3) donne donc le théorème suivant :

Sur la tangente au point A *d'une ellipse de centre* O *portons des longueurs* AB_1, AB_2 *égales au demi diamètre conjugué à* OA. *Des points* B_1 *et* B_2 *abaissons des perpendiculaires sur* OB_2 *et* OB_1 *et soient* Q_1 *et* Q_2 *les points où ces perpendiculaires coupent la normale au point* A. *Le centre de courbure relatif au point* A *est le milieu du segment* $Q_1 Q_2$.

MATHÉMATIQUES ET MATHÉMATICIENS (*).

I.

Les géomètres ont, plus que d'autres, besoin d'être jugés par leurs pairs : la géométrie, en effet, est un arcane. Elle tient ses assises à part, décerne ses prix sans

(*) Citations analogues à celles qui constituent la majeure partie du livre de M. Rebière, annoncé dans la livraison de juin 1893 de *Mathesis*. La première est empruntée à un article de M. Enestrom, dans la *Bibliotheca mathematica*, 1893, p. 59, sur ce livre de M. Rebière.

phrases et, contemplant avec une juste fierté l'univers soumis en ses plus intimes profondeurs aux lois dont elle a saisi l'enchaînement, se réfugie, calme et impassible, dans sa royauté silencieuse. C'est bien une royauté, en effet, et une royauté absolue qu'exerce cette science maîtresse qui ne connaît pas le doute comme ses sœurs et n'a jamais, depuis le temps d'Euclide, bâti sur le sable. Ajoutons que, par son exemple, la géométrie a influé sur la direction imprimée à toutes les branches des connaissances humaines (JURIEN DE LA GRAVIÈRE, C. R. 1885, CI, p. 1307).

II.

Plus que les autres sciences, les mathématiques exigent de ceux qui sont appelés à augmenter par de nouvelles conquêtes le domaine du savoir, une imagination puissante. La clarté de la pensée n'a jamais, à elle seule, fait de découvertes. La meilleure œuvre du mathématicien est de l'art, un art élevé, parfait, hardi comme les rêves les plus secrets de l'imagination, clair et limpide comme la pensée abstraite. Le génie mathématique et le génie artistique se touchent, et il faudrait même expliquer pourquoi ces deux sortes de génies se développent si rarement chez le même homme. Sophie Kovalevsky avait dès sa jeunesse hésité entre les mathématiques et la littérature (G. MITTAG-LEFFLER. Sophie Kovalevsky. Notice biographique. *Acta mathematica*, 1893, XVI, pp 388-389).

III.

[Si l'on considère les points d'intersection de deux systèmes de parallèles qui subdivisent un plan en carrés], un quelconque A de ces points a quatre voisins, et si on désigne la relation de A à l'un de ces points voisins par $+1$, alors la relation à désigner par -1 est déterminée d'elle-même, tandis qu'on peut prendre *à droite* ou *à gauche* celle des deux autres points dont la relation doit être désignée par $+i$ ou par $-i$.

Cette distinction entre *à droite* et *à gauche* est *en soi* complètement déterminée aussitôt qu'on a fixé *dans* le plan ce qu'on désigne par *en avant* et *en arrière*, et fixé aussi, à notre gré, ce qu'on désigne par en haut et en bas, quoique nous *ne* puissions communiquer cette distinction aux autres *que* par des indications relatives à des objets matériels existant réellement.

Kant a déjà fait ces deux remarques, mais on ne comprend pas comment ce philosophe pénétrant a cru trouver dans la première une preuve de son opinion que l'espace est *seulement* une forme de notre intuition extérieure, lorsque la seconde prouve si clairement le contraire et prouve que l'espace a une signification réelle indépendamment de notre intuition (GAUSS, *Werke*, II, p. 177).

Quiconque connaît ce qui constitue l'essence de la géométrie ne peut méconnaître que les auxiliaires logiques (définitions, principes d'identité et de contradiction) ne peuvent par eux-mêmes conduire à rien et ne porteront que des fleurs stériles, sans l'intervention constante et féconde de la vivante intuition des objets (Ib., IV, p. 366).

IV.

La droite, le plan, l'espace

d'après CAUCHY.

« [La] droite [est] le lieu de tous les points, qui relativement aux extrémités de la chaîne [d'atomes ou points matériels] jouiront d'un caractère particulier. Le caractère dont il s'agit consiste, en ce qu'un atome placé à l'un de ces points formera toujours avec les atomes placés aux extrémités de la chaîne, deux couples qu'aucun autre atome ne pourrait former. Tout point qui ne présentera pas ce caractère sera nécessairement situé hors de la droite en question (*Sept leçons de physique générale*; Paris, Gauthier-Villars, 1868. Voir p. 44). »

« La surface plane qui renfermera [trois atomes non situés sur une même droite, est] le lieu de tous les points qui, relativement à ces trois atomes, jouiront d'un caractère particulier. Le caractère dont il s'agit consiste en ce qu'un quatrième atome placé en l'un de ces points, formera toujours avec les trois premiers atomes trois couples qu'aucun autre atome ne pourra former (Ibid., p. 45) ».

Un peu plus loin, il caractérise ainsi un espace à trois dimensions : « Si l'on donne trois atomes avec les distances d'un quatrième atome aux trois premiers et que l'une des distances ne soit pas la somme des deux autres, la position du quatrième atome sera déterminée ou du moins deux atomes seulement pourront être créés, de manière que leurs rapports avec les trois premiers donnent naissance aux trois distances dont il s'agit. Ajoutons que ces deux atomes seront situés de deux côtés différents du plan qui passera par les trois premiers (Ibid., pp. 48-49) ».

SUR UN CAS REMARQUABLE DES TRANSFORMATIONS CENTRALES,

par M. G. DE LONGCHAMPS, professeur de mathématiques spéciales au Lycée St-Louis.

1. Dans un article publié dans ce journal (1890, p. 224), M. Laisant a considéré les transformations centrales qui, en coordonnées polaires, sont représentées par les formules

$$\omega = \Omega\,, \quad f(u, U) = 0,$$

$f(u, U)$ représentant une fonction symétrique des vecteurs u, U qui aboutissent aux points correspondants m, M, situés sur une droite passant par le pôle. Il a, fort justement, appelé l'attention sur un fait remarquable que nous devons rappeler d'abord.

Dans toutes ces transformations, on peut trouver une relation de la forme

$$g(u)\,du + G(U)\,dU = 0,$$

et de cette égalité résulte qu'un certain élément géométrique, que l'on devra déterminer dans chaque transformation, se conserve quand on passe de la figure donnée γ, à la figure transformée Γ. Cet élément, une fois connu, on pourra déterminer, par une construction géométrique, variant avec chaque exemple, le tracé de la tangente à Γ, au point M ; connaissant la tangente à γ, au point m.

Il existe un autre cas où, dans une transformation centrale, on peut résoudre le problème en question en appliquant l'idée mise en lumière, par M. Laisant, dans l'article cité.

2. Adoptons comme formules de transformation les suivantes :

$$\Omega = \omega , \quad U = tu , \tag{1}$$

dans lesquelles : u, ω désignent les coordonnées d'un certain point m ; U, Ω, celles du point correspondant M; t, une fonction quelconque de ω.

Ces formules donnent

$$d\Omega = d\omega, \quad dU = t du + u dt. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on a

$$\frac{tu}{U} dU = t du + u dt,$$

ou

$$\frac{\frac{dU}{d\Omega}}{U} = \frac{\frac{du}{d\omega}}{u} + \frac{1}{t}\frac{dt}{d\omega}.$$

En désignant par v, V les angles que le vecteur OmM fait avec la courbe donnée et avec sa transformée, on a

$$cotg\, V = cotg\, v + \frac{t'}{t}. \tag{A}$$

C'est la formule que nous voulions signaler et qui résout, dans toute sa généralité, le problème dans lequel on se propose de trouver V, connaissant v ; dans cette formule, t' désigne la dérivée de t par rapport à la variable indépendante ω.

3. La formule (A) permettra de construire V par des tracés très divers; car, à une formule correspondent, pour obtenir l'une des quantités qui y pénètrent, connaissant les autres, des constructions qui varient à l'infini. Il y a lieu de rechercher, parmi celles-ci, les plus élégantes.

Voici une remarque qui permettra de résoudre simplement le problème en question, dans un grand nombre de cas.

Soit (fig. 1) A le point de rencontre des tangentes aux points correspondants m, M; projetons A, en H, sur le vecteur OmM.

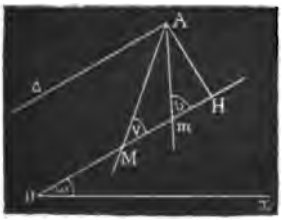


Fig. 1.

Nous avons

$$MH = AH \operatorname{cotg} V, \quad mH = AH \operatorname{cotg} v.$$

D'après cela, la formule (A) devient

$$Mm = AH \frac{t'}{t}. \qquad (B)$$

Cette égalité permettra, très facilement la plupart du temps, de construire AH et d'avoir ainsi une droite Δ, parallèle au vecteur, sur laquelle viennent, à chaque instant, se couper les tangentes correspondantes.

4. C'est ce que nous allons vérifier sur un exemple.

On prend un point m; on projette m, en K, sur Ox; K, se projette, en M, sur le vecteur Om.

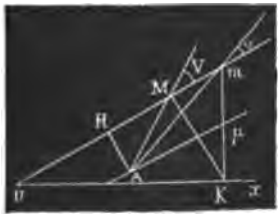


Fig. 2.

Si m se meut dans un certain espace, M décrit un espace correspondant. Dans cette transformation, et avec les notations que nous avons adoptées, les formules sont

$$\Omega = \omega, \quad U = u \cos^2 \omega.$$

Appliquons (*) la formule (B), nous avons (fig. 2), en observant que, dans cet exemple,

$$\frac{t'}{t} = -2 \operatorname{tg} \omega, \quad AH = \frac{1}{2} MK.$$

Ainsi, dans cette transformation, *les tangentes correspondantes se*

(*) En utilisant cette formule, et pour éviter certaines erreurs qui se glissent si facilement dans les applications de la *Géométrie infinitésimale*, il ne faut pas perdre de vue la formule (A). Il y aura lieu, dans chaque exemple, de discuter le signe de la fonction ($t' : t$) pour voir *de quel côté du vecteur* se fait la rencontre des deux tangentes. La difficulté que nous signalons ici est, d'ailleurs, inhérente à toutes les applications géométriques des formules de l'analyse.

coupent sur la parallèle au vecteur menée par le point μ, milieu de l'ordonnée initiale.

5. La transformation précédente est des plus intéressantes et elle conduit à de nombreuses conséquences. Nous en indiquerons ici quelques-unes, faciles à reconnaître.

Fig. 3.

1° La transformation peut être indéfiniment poursuivie, en effectuant le tracé indiqué par la fig. 3.

De m_1 on passe à m_2, de m_2 à m_3; etc... et l'on a

$$u_2 = u_1 \cos^2 \omega, \quad u_3 = u_1 \cos^4 \omega, \quad \ldots$$

On saura donc construire, par le tracé très simple que nous venons d'indiquer, la tangente à toutes les courbes représentées par l'équation

$$U = u \cos^{2n} \omega,$$

n étant un entier positif, lorsqu'on pourra construire la tangente à la courbe $u = f(\omega)$.

2° La transformation est, pour ainsi dire, *à double détente*; elle peut être faite dans le sens qui vient d'être indiqué et aussi dans le sens inverse $m'_1\ m'_2\ m'_3$.

Dans ce cas, les formules de transformation sont

$$U_2 = \frac{u_1}{\cos^2 \omega}, \quad U_3 = \frac{u_1}{\cos^4 \omega}, \quad \ldots$$

3° *A une droite, correspond la cissoïde oblique.*

L'équation cartésienne de la droite donnée étant

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1 = 0,$$

les formules

$$x = \frac{X^2 + Y^2}{X}, \quad y = \frac{Y(X^2 + Y^2)}{X^2},$$

font correspondre à cette droite une cubique représentée par l'équation

$$(X^2 + Y^2)\left(\frac{X}{p} + \frac{Y}{q}\right) = X^2.$$

On déduit de là une étude très intéressante de cette courbe remar-

quable et l'on pourra, avec intérêt, rapprocher les résultats auxquels on est ainsi conduit, de ceux qui résultent de la génération, par points et par tangentes, telle que nous l'avons donnée dans notre *Géométrie analytique*.

4° En transformant une circonférence, le pôle étant un point de la circonférence, l'axe polaire étant un diamètre, on trouve

$$U = a \cos^3 \omega.$$

C'est la courbe que nous avons appelée le *Folium simple* (*Géométrie de la règle et de l'équerre*, p. 126).

En effectuant ensuite des transformations successives, on aboutit à la courbe représentée par l'équation

$$U = a \cos^{2p+1} \omega.$$

Si l'on rapproche ce résultat de celui que nous avons déjà trouvé, on voit que l'on obtient, par cette méthode, comme dérivées du cercle, toutes les courbes

$$U = a \cos^k \omega,$$

k désignant un entier positif quelconque.

5° En appliquant la transformation signalée, l'axe Oy étant pris pour axe de la transformation, on obtient, dans les mêmes conditions, toutes les courbes qui correspondent à l'équation

$$U = a \sin^k \omega,$$

dans laquelle k est susceptible de prendre toutes les valeurs entières, positives.

6° Les courbes en question sont *quarrables* par les fonctions élémentaires.

Il suffit d'observer que la différentielle de l'aire comprise entre deux vecteurs est

$$\tfrac{1}{2} a^2 \cos^{2k} \omega d\omega,$$

pour la première; et

$$\tfrac{1}{2} a^2 \sin^{2k} \omega d\omega,$$

pour la seconde. On applique ensuite les formules connus qui font connaître les intégrales

$$\int_0^{\omega} \cos^{2k} \omega d\omega, \quad \int_0^{\omega} \sin^{2k} \omega d\omega.$$

7° Ces courbes sont *rectifiables* par les fonctions élémentaires quand k est pair; par les fonctions elliptiques, si k est impair.

6. Parmi les transformations qui rentrent dans le groupe considéré dans cette note, nous signalerons les suivantes :

1° On donne une droite Δ, un point O sur cette droite; d'un point m on abaisse une perpendiculaire mM sur le vecteur symétrique de Om, par rapport à Δ :

m, M se correspondent.

On observera qu'en prenant le symétrique de M, par rapport à Δ, on a un point M', situé sur Om; alors m, M' se correspondent dans une transformation centrale. D'ailleurs, le lieu de M' est une courbe Γ' égale à la courbe Γ décrite par M. On peut donc étudier la courbe Γ', pour connaître les propriétés de Γ.

C'est cette transformation que nous avons précédemment signalée (Congrès de Besançon, 1893) et qui nous a conduit à la conception du compas trisecteur.

A la circonférence ($\rho = R$) correspond la rosace à quatre feuilles $U = R \cos 2\omega$. L'application du principe général que nous avons donné plus haut, conduit, pour cette courbe remarquable, à un tracé de la tangente plus simple que ceux que nous avons établis (*loc. cit.*).

2° Sur Om, on prend OM égal à la distance de m à Δ; m, M se correspondent, etc....

SUR UNE TRANSFORMATION CENTRALE,

par M. L. Meurice, docteur en sciences physiques et mathématiques (*).

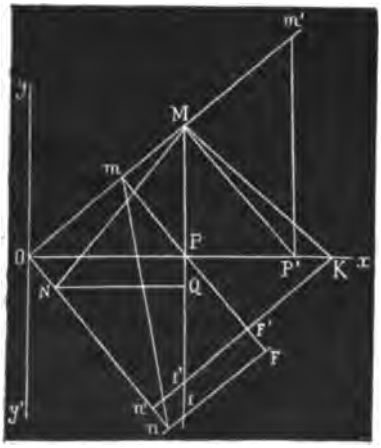
1. On donne une droite Ox et un point O sur cette droite. D'un point quelconque M on abaisse une perpendiculaire MP sur Ox, et l'on projette ensuite P en m sur le rayon vecteur OM. Les points m et M se correspondent dans une transformation caractérisée par la formule

$$\rho = U \cos^2\omega, \qquad (1)$$

où (U, ω), (ρ, ω) sont les coordonnées polaires des points homologues M et m.

(*) L'article de M. Meurice a été écrit il y a plusieurs années; il est extrait des notes que nous a remises l'auteur. On peut le rapprocher du n° 4 de l'article précédent.

Étant donnée la normale MN à une courbe (M), on peut déterminer la normale à la courbe (m). En effet, si nous faisons tourner toutes les vitesses de $\frac{\pi}{2}$ dans le même sens autour de leurs points d'application, nous pouvons représenter les vitesses de circulation des points M et m autour du pôle O par les rayons vecteurs MO, mO. En menant en O sur MO une perpendiculaire qui rencontre la normale à la courbe (M) en N, nous aurons la vitesse MN de M sur sa trajectoire. Traçons par N la parallèle à Ox qui coupe MP en Q; MQ représentera la vitesse de M dans le sens Ox, et aussi celle de P sur Ox. Par suite, si nous prenons sur MP la longueur QI = MP et que nous projetions PI en PF sur mP, PF représente la vitesse que le point P emprunte à la rotation de la droite Pm autour du point où elle touche son enveloppe. Les droites OM, Pm ayant la même vitesse angulaire, la vitesse de circulation de chacun des points de Pm sera également représentée par la distance de ce point au point de contact de l'enveloppe. Il en résulte que F est ce point de contact et que Fm est la vitesse de circulation de m autour de F. Comme IF et ON se rencontrent en n, on voit, par la règle du quadrilatère des vitesses, que mn est la normale à la courbe (m).



La droite mF enveloppe l'antipodaire de O par rapport à la ligne (m).

2. Si le point M décrit une circonférence de centre O, le point m décrit la courbe représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = R\cos^2\omega;$$

cette ligne se compose de deux ovales se touchant en O sur une perpendiculaire Oy à Ox.

Comme N coïncide avec O, on trouve la normale au point m, en menant, par le point I' symétrique de M, par rapport à Ox, une perpendiculaire n'I'F' sur Pm; mn' sera la droite cherchée.

L'inverse de la courbe (m) par rapport au cercle de centre O et de rayon R est la courbe ayant pour aquatron

$$\varpi = \frac{R}{\cos^2\omega},$$

déjà étudiée par M. de Longchamps (J. M. S., t. V, 1886, p. 276). Pour la construire, on peut mener la tangente MP′ au cercle, puis la perpendiculaire P′m' à Ox.

La droite ϖ′F′ rencontre Ox au symétrique K de O par rapport à P. Les droites MK et I′K enveloppent une même hypocycloïde à quatre rebroussements; car les segments de ces droites compris entre Ox et Oy ont une longueur constante 2R. Le point ϖ' décrit la podaire de O par rapport à cette hypocycloïde ou une rosace à quatre feuilles.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE(*).

Essai sur le postulat d'Euclide, par M. Th. Crevets, Licencié ès Mathématiques. Bucarest, Socecu, 1895 (Brochure de 40 pages in-8°).

Dans le théorème IX de sa brochure, à la p. 34, l'auteur suppose qu'une droite ne peut pas être asymptote d'une autre. Cela revient, au fond, à admettre le postulatum.

Le but de l'opuscule de M. Crevets est donc manqué, comme c'était inévitable puisque l'on a démontré que le postulatum est indémontrable.

Mais les propositions qui précèdent le théorème IX semblent établies avec rigueur, et, par suite, elles peuvent servir à initier quelques lecteurs aux premières notions de géométrie lobatchefskienne. (P. M.)

Traité d'algèbre. Compléments, par M. H. Laurent, Examinateur d'admission à l'École Polytechnique, Quatrième partie : Théorie des polynomes à plusieurs variables. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894 (56 pages in-8°). Prix : fr. 1,20.

Sommaire : 1. Le théorème de Jacobi. 2. Les fonctions symétriques et l'élimination. 3. Équations homogènes. 4. Propriétés des solutions. 5. Équivalences algébriques.

Exercices de Calcul différentiel, par M. L. Collette, professeur agrégé de l'enseignement moyen du degré supérieur. Liége, A. Miot et Jamar, 1894 (8-245 p. in-8°) Prix : 5 fr.

(*) Faute d'espace, nous ne donnons que des indications très sommaires sur les livres cités dans cette revue bibliographique.

Les questions traitées dans ce recueil sont celles qui sont proposées dans le Cours d'analyse de l'Université de Liége. Ces exercices relatifs à toutes les parties d'un cours ordinaire de calcul différentiel sont groupés, gradués et résolus de manière à permettre aux étudiants de s'initier progressivement à la théorie élémentaire des fonctions et à ses applications élémentaires. Voici le sommaire des divers chapitres de l'ouvrage :

Introduction. Principales formules employées. 1. Infiniment petits. 2-3. Dérivées et différentielles des fonctions d'une variable. 4. Différentiation des fonctions de plusieurs variables. 5. Changement de variables. 6. Théorèmes de Taylor et de Mac-Laurin. 7. Exponentielles imaginaires et fonctions hyperboliques 8. Séries (trop peu d'exercices). 9. Indéterminations. 10. Maximums et minimums (22 pages). 11-15. Tangentes. Discussion des courbes planes; points singuliers, asymptotes; courbes unicursales. 16. Différentielles de l'aire et de l'arc. Courbure. 17. Contact des courbes planes (23 pages). 18-20. Cycloïde; épicycloïdes et hypocycloïdes; chaînette. 21,24. Courbes et surfaces enveloppes. 22. Ligne à double courbure. 23. Surfaces : plan tangent, etc. 25. Courbure des surfaces.

Nous recommandons bien volontiers aux maîtres et aux élèves les *Exercices de calcul différentiel* de M. Collette. Nous engageons l'auteur, à qui l'on doit un recueil semblable sur la première partie du *Calcul intégral* (Voir *Mathesis*, 1894, p. 45) à publier aussi des exercices sur les équations différentielles. (P. M.)

Cours de Mécanique à l'usage des Candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr, par M. X. Antomari, Docteur ès sciences, directeur des études et professeur de mathématiques spéciales à l'École Monge. Paris, Nony et C^ie^, 1895 (268 p. in-8°).

Sommaire. *Préliminaires.* Notions de géométrie analytique à trois dimensions. Introduction : point matériel, mouvements, repos, inertie, force, objet et division de la mécanique.

I. *Statique.* 1. Notions sur les forces; dynamomètres. 2. Couples. 3. Composition des forces appliquées à un point. 4. Équilibre d'un point matériel. 5. Forces parallèles. 6-10. Centres de gravité. 11-13. Forces appliquées à un corps solide; conditions d'équilibre. 14-15. Levier, balance, poulie, treuil, plan incliné. 16. Frottement. *Exercices* (96, pp. 154-165).

II. *Cinématique.* 1. Vitesse dans un mouvement quelconque. 2. Mouvement rectiligne et uniformément varié. 3. Composition des mouvements. — *Exercices* (20, pp. 203-206).

III. *Dynamique.* 1. Principes généraux et mouvement produit par une force constante. 2. Proportionnalité des forces et des accélérations; masse. 3. Mouvement des projectiles dans le vide. 4. Travail et force vive. 5. Machines à l'état de mouvement. — *Exercices* (32, pp. 262-266).

Sur deux autres ouvrages de mécanique de M. Antomari, voir *Mathesis*, 1893, pp. 39-40, 1895, p. 47. — Les principes fondamentaux de cette science pourraient, selon nous, s'exposer beaucoup plus simplement, si on la divisait nettement en

mécanique rationnelle, science purement formelle qui se déduit toute entière de la géométrie et des définitions, et en *mécanique physique*, où intervient l'expérience. Dans l'ouvrage de M. Antomari, comme dans la plupart des Traités, ces deux sciences sont entremêlées (voir, par exemple, la définition de la force, p. 11-12).

(P. M.)

Deux mille quatre cent nouvelles questions mathématiques posées aux examens d'admission aux écoles spéciales (de Belgique), aux examens de régent et de régente, de géomètre-arpenteur et aux examens d'admission à la Caisse d'Épargne, avec la résolution des questions des concours de première et de deuxième scientifiques de 1852 à 1894, par M. E. VERHELST, docteur en sciences physiques et mathématiques, etc. Deuxième édition. Bruxelles, Castaigne, 1895, (392 p. in-12). Prix : 3 fr. 50.

Seconde édition, revue et augmentée, de l'excellent recueil annoncé dans *Mathesis*, 1888, pp. 68-69. L'édition précédente ne contenait que 1800 exercices.

NOTES EXTRAITES DE LA CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

(*Suite*; voir page 138).

3. *Problème sur la sphère.* Dans le tome II de la CGQ., pp. 310-313, Ch. Tandel, régent au collège d'Echternach, détermine *le maximum du nombre de sphères qui peuvent entrer en contact avec une sphère centrale de même rayon*, problème dont il avait trouvé l'énoncé dans les *proportions chimiques* de Berzélius. Il entoure d'abord la sphère centrale O de six sphères qui se touchent deux à deux; les centres de ces sept sphères sont dans un même plan P. Il place ensuite *au-dessus* du plan P trois sphères qui touchent la sphère centrale et deux des autres sphères; de même, trois sphères au-dessous de P.

Cette question, traitée depuis dans divers Recueils, a été résolue dans *Mathesis* (t. VI, p. 124) par M. Fauquembergue, avec un arrangement des sphères autre que celui de Tandel.

4. *Théorème sur des parallélogrammes.* Dans une note de Meyer(*), docteur de l'Université de Liége, sur le carré de l'hypoténuse, nous

---

(*) Antoine Meyer, né à Luxembourg en 1805, mort en 1857 à Liége où il occupa depuis 1849 la chaire d'analyse supérieure; auteur de travaux très estimés sur les probabilités, les intégrales définies, etc.

rencontrons une proposition, connue depuis longtemps, mais présentée ici d'une façon nouvelle. La voici, avec une légère généralisation

Soient CADE, CBFG *deux parallélogrammes situés dans un même plan, et soient* I *le point de rencontre des côtés* AD *et* BF, K *celui des côtés* DE *et* FG. *Le parallélogramme ayant ses côtés égaux et parallèles aux droites* AB *et* CK, *et celui dont les côtés sont égaux et parallèles aux droites* GE *et* CI *sont équivalents entre eux; leur aire commune est égale à la somme ou à la différence des aires des parallélogrammes* CADE *et* CBFG.

5. *Sur les podaires de parabole.* Au concours universitaire de 1824, l'université de Louvain avait proposé la question suivante :

Les coordonnées d'un point C *par rapport à deux axes rectangulaires* AX, AY *étant (a, b), si l'on mène une droite quelconque* CP *coupant* AY *en* P, *et que l'on projette* A *en* M *sur la perpendiculaire élevée en* P *sur* CP, *on demande d'étudier le lieu de* M *au moyen de son équation, de déterminer l'arc et l'aire de cette courbe et d'en trouver des applications.*

Une médaille d'or a été décernée à un mémoire de P. F. Schmitz, élève de l'Université de Louvain (plus tard professeur au collège de Saint-Trond). L'auteur trouve pour équation de la courbe (M)

$$x^3 = y^2(b - x) + axy,$$

et observe que la ligne rentre dans les *hyperboles défectueuses qui n'ont qu'un diamètre*, que pour $a = 0$ elle présente un point de rebroussement *(Cissoïde)*; enfin il fait servir la courbe à la duplication du cube et à la trisection de l'angle.

La courbe (M) est évidemment la podaire de A par rapport à la parabole enveloppe de MP (foyer C, tangente au sommet AY). Si A est le sommet ou le pied de la directrice ou un point quelconque de la directrice de la parabole, la podaire est une cissoïde de Dioclès, une strophoïde droite ou une strophoïde oblique; dans tous les cas, la podaire peut être considérée comme une cissoïdale, c'est-à-dire qu'elle admet un mode de génération analogue à celui de la cissoïde ordinaire, avec cette différence que la tangente au cercle générateur ou l'asymptote est remplacée par une droite quelconque.

Cette dernière remarque est faite par Quetelet à la suite de l'analyse du mémoire de Schmitz (CGQ, t. II, p. 60). Etait-elle nouvelle à cette époque?

6. *Théorèmes sur les coniques.*

a) *Etant données deux droites* AB, AC, *qu'on divise, chacune en n parties égales, on numérote les points de division de* AB *à partir de* A *et ceux de* AC *à partir de* C, *et l'on joint par des droites les points de même rang. Les intersections de ces droites, prises dans l'ordre de leur tracé, seront sur une même parabole* (Garnier, CGQ, t. II, p. 77 et 129).

L'auteur donne une solution analytique de la question qui est empruntée à Puissant.

b) *Ayant tracé dans une ellipse deux diamètres égaux* COD *et* C'OD', *si d'un point quelconque de l'ellipse comme centre avec un rayon égal à* $\frac{ab}{OC}$, *on décrit un cercle, l'arc* NN' *de ce cercle intercepté entre les diamètres est constant* (Timmermans, CGQ, t. II, p. 76).

Il est plus facile de démontrer la réciproque : Le lieu du centre d'un cercle de rayon constant qui coupe deux droites données OC, OC' en des points N, N' dont la distance est constante, est une ellipse ayant pour centre O et pour axes les bissectrices Ox, Oy de l'angle COC'. Les longueurs de ces axes se déterminent en supposant la droite NN' perpendiculaire à Ox ou à Oy.

c) *Si l'on connaît le foyer* F *d'une parabole et un point* M *ou une tangente t, le sommet décrit une cardioïde ou une circonférence.* (Quetelet, t. I, p. 354).

Dans le premier cas, le lieu du sommet est la podaire de F par rapport à un cercle de diamètre MF ; dans le second cas, le sommet se trouve sur la circonférence qui a pour diamètre la perpendiculaire abaissée de F sur t.

d) *Soit* ABC *un triangle circonscrit à une conique de foyer* F. *Une tangente quelconque t est rencontrée en* A', B', C' *par les perpendiculaires élevées en* F *sur les droites* FA, FB, FC : *Les droites* AA', BB', CC' *concourent en un même point* P (Dandelin, t. I, p. 322, § 22). Dandelin déduit cette proposition des propriétés des projections stéréographiques. En voici une démonstration par la géométrie projective.

Soient A'', B'', C'' les points où t rencontre BC, CA, AB. Les rayons FA et FA'', FB et FB'', FC et FC'' sont conjugués dans une involution.

Les angles BFC et B''FC'' étant égaux ou supplémentaires, les angles BFB'', CFC'' et AFA'' ont les mêmes bissectrices Fx, Fy. Les angles AFA', BFB', CFC' étant droits, les angles A'FA'', B'FB'', C'FC'' ont

leurs côtés symétriques par rapport à la bissectrice Fz de l'angle xFy. On en conclut que les couples A'A'', B'B'', C'C'' appartiennent à une même involution ; donc, etc. (CREMONA, § 103).

e) *On donne un diamètre* COC' *d'une conique en grandeur et en position, et son conjugué* DOD' *seulement en position : les foyers* F *et* F' *de la courbe décrivent une hyperbole équilatère* (Dandelin, t. I, p. 322, § 24).

L'auteur démontre ce théorème au moyen des projections stéréographiques. On y arrive aussi très simplement en observant que les droites CF, C'F se correspondent dans deux faisceaux inversement égaux ; car les droites FC et F'C ayant des directions symétriques par rapport à la tangente en C, les droites FC et FC' ont des directions antiparallèles par rapport à DD'.

Remarquons, en passant, que si l'on donne la longueur du diamètre DOD' et qu'on suppose celui-ci mobile autour de O, les points F, F' décrivent une lemniscate ; car $FC.F'C = \overline{OD}^2$.

f) Soient M le milieu d'une corde AB d'une parabole, C l'extrémité du diamètre passant par M, F le foyer. On a

$$\tfrac{1}{2}(FA + FB) = FC + CM. \qquad (\textit{A continuer.})$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES(*).

Question 835.

(Voir *Mathesis*, (1), VIII, p. 279).

1. *Si deux triangles sont doublement orthologiques, ils le sont triplement.* 2. *Construire deux triangles qui soient triplement homologiques et triplement orthologiques.* (E. LEMOINE).

Cette question a été complètement traitée par M. Lemoine dans la note : *Sur les triangles orthologiques* (Congrès de Limoges, 1890). Nous allons en donner une solution développée, en insistant sur ses rapports avec la théorie de l'involution.

1° Steiner (*Crelle*, II, p. 287 ; *Œuvres complètes*, I, p. 157) a énoncé le théorème suivant : *Étant donnés deux triangles* ABC *et* A'B'C', *si les perpendiculaires menées de* A, B, C *sur* B'C', C'A', A'B' *concourent en un*

(*) Nous avons reçu, trop tard pour la mentionner en juillet, une solution analytique de la question 929 par M. J. Jonesco.

point O, *les perpendiculaires abaissées de* A', B', C' *sur* BC, CA, AB *concourent aussi en un point* O'. De tels triangles sont dits *orthologiques;* O et O' sont les *centres d'orthologie.*

Si l'on fait tourner le triangle A'B'C' d'un angle droit dans son plan, le théorème de Steiner est compris dans le suivant que nous avons proposé dans *Mathesis* [(1) II, p. 144 et (1) III, p. 86] : *Étant donnés un triangle* ABC *et un point* P, *si l'on construit un second triangle* $A_1B_1C_1$ *dont les côtés sont parallèles à* PA, PB, PC, *les parallèles menées par* A_1, B_1, C_1 *à* BC, CA, AB *concourent aussi en un même point* P_1. On peut rattacher cette proposition à la théorie de l'involution. En effet, les six côtés du quadrangle complet ABCP marquent sur la droite de l'infini une involution; autrement dit, les parallèles α, β, γ, α', β', γ' menées par un même point S à BC, CA, AB, PA, PB, PC forment trois couples $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ qui sont en involution. Réciproquement, étant donnés trois couples $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ d'un faisceau involutif, si l'on construit un triangle ABC dont les côtés sont parallèles à α, β, γ, les parallèles à α', β', γ' menées par A, B, C concourent en un même point. Comme on peut intervertir les rôles des ternes $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$, le théorème est démontré.

2° La première partie de la question 635 peut se déduire de la question 280 de *Mathesis* [(1), III, p. 216 et (1), IV, p. 134(*)], qu'on peut énoncer ainsi :

Si P *est un point du plan d'un triangle* ABC, *tel que les parallèles à* PA, PB, PC *par* B, C, A *concourent en un point* P', *les parallèles à* PA, PB, PC, *par* C, A, B *concourent en un point* P'', *et les triangles* ABC, PP'P'' *ont la même ellipse de Steiner.*

Nous allons reproduire la démonstration de ce théorème que nous avons donnée dans notre note : *Sur le point de Steiner* (J. M. S., 1886, p. 51). Considérons d'abord un triangle équilatéral ABC et un point quelconque P de son plan, et faisons tourner ce plan de 120° autour du centre O du cercle ABC, de manière que les points A, B, C, P viennent se placer en B, C, A, Q. Si P n'est pas sur la circonférence ABC, Q est le seul point tel que les faisceaux P(ABC), Q(BCA) soient directement égaux, et cependant les rayons homologues de ces faisceaux ne sont pas

(*) M. Soons (Tirlemont) nous a adressé de la question 635, 1°, une démonstration se rapprochant de celle qui a déjà paru dans *Mathesis*, IV, p. 134.

parallèles. Mais si P appartient à la circonférence ABC, tous les faisceaux ayant leur sommet sur cette circonférence et leurs rayons passant par A, B, C ou par B, C, A ou par C, A, B sont directement égaux; dans ce cas les droites QC, QA, QB sont parallèles à PA, PB, PC, et une seconde rotation du plan ABC autour de O amène Q en un point R, tel que les rayons RB, RC, RA sont parallèles à PA, PB, PC. Le théorème est donc démontré dans le cas d'un triangle équilatéral; une projection orthogonale l'étend à un triangle quelconque.

3° D'après cela l'ellipse de Steiner d'un triangle ABC est le lieu des centres d'orthologie de ABC par rapport à tous les triangles triorthologiques avec ABC.

Soient P l'un des centres d'orthologie, P_i l'inverse de P par rapport à ABC, A'B'C' le triangle podaire de P_i relativement à ABC. Les droites AP, BP, CP étant perpendiculaires à B'C', C'A', A'B', A'B'C' est un triangle triorthologique avec ABC. Lorsque P parcourt l'ellipse de Steiner, P_i se meut sur la droite de Lemoine de ABC. Ce théorème est dû à M. Lemoine.

4. Nous signalons quelques conséquences qui se dégagent immédiatement de ce qui précède.

a) Si l'on mène par un même point S des parallèles $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ aux côtés BC, CA, AB du triangle et aux droites PA, PB, PC (ou P'B, P'C, P'A), on peut énoncer le théorème suivant : ***Étant donné un faisceau de six rayons*** $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, ***si le terne*** $\alpha\beta\gamma$ ***est en involution avec chacun des ternes*** $\alpha'\beta'\gamma'$, $\beta'\gamma'\alpha'$ ***il l'est aussi avec le terne*** $\gamma'\alpha'\beta'$. Cette proposition a lieu aussi pour six éléments d'une ponctuelle ou d'un faisceau de plans. On la démontre facilement dans le cas d'une ponctuelle en observant que les trois involutions s'expriment, respectivement, par les équations

$$\alpha\beta' . \beta\gamma' . \gamma\alpha' = -\alpha'\beta . \beta'\gamma . \gamma'\alpha,$$
$$\alpha\gamma' . \beta\alpha' . \gamma\beta' = -\beta'\beta . \gamma'\gamma . \alpha'\alpha,$$
$$\alpha\alpha' . \beta\beta' . \gamma\gamma' = -\gamma'\beta . \alpha'\gamma . \beta'\beta,$$

dont l'une est la conséquence des deux autres.

b) Pour que deux triangles ABC, A'B'C' soient triorthologiques, il faut et il suffit qu'ils se projettent sur un même plan suivant deux triangles équilatéraux après que l'un d'eux a tourné de 90° dans son plan.

5° Avant de passer à la seconde partie de la question 635, rappelons

ce théorème : *Si le triangle* ABC *est homologique à la fois avec* A'B'C' *et* B'C'A', *il l'est aussi avec* C'A'B'.

Cette proposition ne diffère pas d'un cas particulier du théorème de Pascal, à savoir : *Étant donnés trois points* L, M, N *sur une droite* u *et trois points* L', M', N' *sur une seconde droite* u', *les couples de droites* LM' *et* L'M, MN' *et* M'N, NL' *et* N'L *ont leurs points d'intersection sur une même droite* u''. En effet, les deux triples de droites LM', MN', NL' et L'M, M'N, N'L sont les côtés de deux triangles qui ont pour axe d'homologie u, u', u'', suivant que l'on fait correspondre aux côtés LM', MN', NL' du premier les côtés N'L, L'M, M'N ou M'N, N'L, L'M ou L'M, M'N, N'L du second.

M. Lemoine (*loc. cit.*) avait déjà remarqué que le théorème des triangles trihomologiques résulte de ce cas particulier du théorème de Brianchon : *Etant données trois droites* l, m, n *issues d'un même point* U *et trois droites* l', m', n' *issues d'un second point* U', *si l'on pose*

$$mn' \equiv A, \quad nl' \equiv B, \quad lm' \equiv C, \quad m'n \equiv A', \quad n'l \equiv B, \quad l'm \equiv C',$$

les droites AA', BB', CC' *passent par un même point* U''. Le triangle ABC est donc homologique avec C'A'B', B'C'A' et A'B'C', le centre d'homologie étant respectivement U, U', U''.

6° ABC étant un triangle quelconque, soit A'B'C' le triangle podaire d'un point quelconque P_1 de la droite de Lemoine de ABC ; les triangles ABC, A'B'C' sont triorthologiques. Nous allons construire, d'après M. Lemoine, un triangle homothétique à A'B'C' et trihomologique à ABC.

Sur une droite donnée Ax prenons un point quelconque A_1, et menons les droites A_1y, A_1z, respectivement parallèles à A'B', A'C' ; A_1y coupe AB en un point λ, A_1z coupe AC en un point μ ; menons la droite $\lambda\mu$ qui rencontre BC en ν, et par ν tirons une parallèle à B'C', qui rencontre A_1y en B_1 et A_1z en C_1 : $A_1B_1C_1$ est homothétique à A'B'C' et homologique à ABC, l'axe d'homologie étant $\lambda\mu\nu$. Soit O le point l'intersection de AA_1, BB_1, CC_1 ; ce point reste fixe lorsque A_1 parcourt Ax, et par suite les points B_1, C_1 se meuvent sur OB et OC.

Construisons maintenant un triangle $A_1B_2C_2$ homothétique à A'B'C' et homologique à BCA. A cet effet, déterminons le point d'intersection λ' de A_1y avec BC, le point de rencontre μ' de A_1z avec AB ; menons la droite $\lambda'\mu'$ qui coupe AC en ν', et tirons par ν' une parallèle à B'C', qui rencontre A_1y en B_2, A_1z en C_2. Si A_1 se déplace sur Ax, le point B_2

décrit une conique Σ; car sur chaque droite A_1y parallèle à $A'B'$ nous trouvons un seul point B_2 à distance finie et un point à distance infinie qui correspond au cas où la droite $\lambda'\mu'$ (dont l'enveloppe est une parabole tangente à BA et BC) est parallèle à AC. La courbe Σ, qui passe par A et C, est rencontrée par la droite OB en deux points B_1, B'_1 qui sont les sommets de deux triangles $A_1B_1C_1$, $A'_1B'_1C'_1$ homothétiques à $A'B'C'$ et trihomologiques à ABC.

7° Lorsque la droite Ax tourne autour de A, le point O, centre d'homologie du triangle fixe ABC et d'un triangle variable $A_1B_1C_1$ constamment homothétique à un triangle fixe $A'B'C'$, décrit une conique; car la droite Ax renferme deux points du lieu, savoir O et le point A considéré comme un triangle à trois sommets confondus.

Ce lieu, déja proposé dans *Mathesis* (t. VI, p. 144 et t. X, p. 230), est compris dans le suivant dont s'est occupé M. Lemoine (J. M. S., 1889, pp. 35-40 et 60-64) : *Soient* ABC, A'B'C' *deux triangles quelconques. Le lieu des points* O *et le lieu des points* O' *tels, que* AO, BO, CO *soient respectivement parallèles à* A'O', B'O', C'O' *sont deux coniques homothétiques.* Voici une nouvelle démonstration de ce théorème.

Si par un même point on mène des droites α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' parallèles à BC, CA, AB, B'C', C'A', A'B', OA, OB, OC, le faisceau O (ABC) est caractérisé par la propriété que le terne $\alpha''\beta''\gamma''$ est en involution à la fois avec les ternes $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$. De là résulte une construction facile des faisceaux O (ABC) : Par un point fixe S on mène trois rayons λ, μ, ν parallèles à BC, CA, AB, et par un point variable S', trois rayons λ', μ', ν' parallèles à B'C', C'A', A'B'; si L, M, N sont les points d'intersection des couples $\lambda\lambda'$, $\mu\mu'$, $\nu\nu'$, on peut prendre pour AO, BO, CO des parallèles à MN, NL, LM. Pour obtenir toutes les formes du triangle LMN, il suffit de faire décrire à S' une droite u ne passant pas par S. Les points S', L, M, N, engendreront des ponctuelles semblables; les droites MN, NL, LM envelopperont trois paraboles π_1, π_2, π_3, et leurs parallèles α'', β'', γ'' se correspondront dans des faisceaux qui sont projectifs avec la ponctuelle (S'). On conclut de là que les points O, O' décrivent deux coniques circonscrites aux triangles ABC, A'B'C'. Ces courbes sont homothétiques; car lorsque O est à l'infini dans une direction, O' est à l'infini dans la même direction. Les directions asymptotiques sont celles des deux tangentes communes aux trois paraboles π_1, π_2, π_3.

Il est facile de trouver la tangente s au point A de la conique (O). En effet, lorsque O coïncide avec A, le faisceau O (ABC) se compose des rayons s, AB, AC ; donc si l'on mène les droites B'A'', C'A'' respectivement parallèles à BA, CA et se coupant en A'', le courbe (O') passe par A'' (et par les points analogues B'', C''), et s est parallèle à A'A''.

Prenons pour A'B'C' le triangle BCA ; alors la tangente en A à la conique (O) est parallèle à BC, et par suite cette courbe devient l'ellipse de Steiner de ABC. Le lieu (O') est cette même ellipse, et l'on aurait encore la même courbe si l'on remplaçait A'B'C' par CAB. Nous avons ainsi une nouvelle démonstration de la question 280 de ***Mathesis***, si l'on observe encore que les rôles des triangles ABC, PP'P'' peuvent être intervertis. (J. N.).

×Question 677.

(Voir *Mathesis*, (I) X, p. 72.)

Construire un triangle ABC, ***connaissant*** : 1° ***deux côtés*** $AB = c$, $AC = b$ ***et deux droites isogonales appartenant à l'angle*** A ; 2° ***La symédiane issue de*** A ***et ses distances aux points*** B, C ; 3° ***Le centre de gravité*** G, ***le point de Lemoine*** K ***et a) le milieu d'une hauteur, b) le pied d'une hauteur.*** 4° ***Deux côtés et l'angle de Brocard.*** 5° ***Un côté, l'angle de Brocard et l'angle sous lequel la base est vue du centre de gravité.*** (EMMERICH.)

Solution par M. DÉPREZ (Charleroi). 1° Soient $AP = p$, $AQ = q$ les deux isogonales, qui rencontrent BC en P, Q et la circonférence ABC en P', Q'. Les triangles ABP, AQ'C étant équiangles, on a

$$AB.AC = AP.AQ', \quad \text{d'où} \quad QQ' = \frac{bc}{p} - q.$$

Si l'on pose $BQ = x$, $CQ = y$, on trouve aisément

$$xy = AQ.QQ' = q\left(\frac{bc}{p} - q\right), \tag{1}$$

$$b^2x + c^2y = q^2(x + y) + xy(x + y). \tag{2}$$

En remplaçant xy par la valeur (1), on déduit de (2) :

$$\frac{x}{y} = \frac{c(qb - cp)}{b(pb - cq)}. \tag{3}$$

Les égalités (1) et (3) font connaître x et y.

2° Soient

$$AM = m, \quad AN = n, \quad BB' = \beta, \quad CC' = \gamma$$

la médiane et la symédiane issues de A, et les perpendiculaires abaissées de B et C sur AN. Des triangles semblables BB'N, CC'N on déduit

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{BN}{NC} = \frac{c^2}{b^2}.$$

On connaît donc le rapport des côtés AB, AC.

D'après un théorème connu, on a

$$\frac{n^2}{m^2} = \frac{4b^2c^2}{(b^2+c^2)^2} = \frac{4\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2};$$

par suite on peut trouver m.

Prolongeons AM de MA' = AM. On a

$$\text{aire } CAA' = ABC = \tfrac{1}{2} n(\beta+\gamma).$$

On connaît donc la base AA' du triangle CAA', la surface et le rapport des côtés CA, CA'.

3° *a*) Si l'on donne le centre de gravité G, le point de Lemoine K et le milieu J de la hauteur AH_a, on prolonge JG de $GH'_a = 2JG$; H'_a sera le symétrique de H_a par rapport au milieu M de BC, car G est aussi le centre de gravité du triangle $AH_aH'_a$. Comme K est situé sur la droite JM, le point M résulte de l'intersection de la droite JK avec la circonférence de diamètre H'aP, P désignant le milieu de JH'_a; on obtient le sommet A en prolongeant MG de GA = 2MG, et le centre O du cercle ABC se détermine par l'intersection de MP avec la symétrique de AJ par rapport à la bissectrice de l'angle KAG.

b) Si l'on donne les points G, K, H_a, on obtient le milieu L de la droite JM en divisant H_aG dans le rapport 2 : 1, car H_aG est une médiane du triangle $AH_aH'_a$. La circonférence de centre L et de rayon LH_a coupe la droite LK aux points J et M, etc.

4° On a

$$tg\omega = \frac{4S}{a^2+b^2+c^2} = \frac{bc\sin A}{b^2+c^2-bc\cos A};$$

donc l'angle A se déduit de

$$\sin(A+\omega) = \sin\omega \frac{b^2+c^2}{bc}.$$

5° Soit φ l'angle BGC ; on trouve aisément

$$a^2 = \overline{BG}^2 + \overline{CG}^2 - 2BG.CG\cos\varphi,$$

$$S = \tfrac{1}{2}BG.CG\sin\varphi,$$

$$c^2 + a^2 = \frac{9}{2}\overline{BG}^2 + \frac{b^2}{2}, \quad b^2 + a^2 = \frac{9}{2}\overline{CG}^2 + \frac{c^2}{2},$$

d'où, en éliminant BG et CG,

$$\operatorname{cotg}\varphi = \frac{b^2+c^2-5a^2}{12S}. \tag{4}$$

On a aussi

$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S}; \tag{5}$$

par suite

$$\frac{\operatorname{cotg}\varphi}{\cot\omega} = \frac{b^2+c^2+a^2}{3(b^2+c^2-5a^2)},$$

égalité qui détermine la somme b^2+c^2 en fonction de a, φ, ω.

Si l'on élimine S et b^2+c^2 entre (4), (5) et

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4S\operatorname{cotg} A,$$

on obtient

$$\operatorname{cotg} A = \operatorname{cotg}\varphi + \tfrac{2}{3}\cot\omega.$$

On connaît donc a, A, b^2+c^2.

Remarques. 1. Si l'on donne les côtés AB, AC et les longueurs p, q de deux droites isotomiques AP, AQ, les segments $BP = x$, $PC = y$ résultent des égalités

$$c^2y + b^2x = (x+y)(p^2+xy), \quad c^2x + b^2y = (x+y)(q^2+xy),$$

qu'on ramène facilement à

$$\frac{y}{x} = \frac{b^2+q^2-c^2-p^2}{b^2+p^2-c^2-q^2}, \quad 2xy = b^2+c^2-p^2-q^2.$$

II. Le procédé indiqué pour le problème 3° peut être appliqué à la construction d'un triangle dont on connaît le centre de gravité, le centre du cercle inscrit et *a*) le milieu d'une hauteur, *b*) le pied d'une hauteur.

×Question 799.

(Voir *Mathesis*, (2), II, p. 281).

Soient P, Q *deux points d'une sphère; les arcs* AP, BP, CP *rencontrent les côtés correspondants* BC, CA, AB *du triangle sphérique* ABC *aux points* A′, B′, C′. *On a la relation*

$$\cos PQ = \cos AQ \frac{\sin PA'}{\sin AA'} + \cos BQ \frac{\sin PB'}{\sin BB'} + \cos CQ \frac{\sin PC'}{\sin CC'}.$$

(Déprez.)

Solution par M. Cristescu. Menons l'arc de grand cercle QA′. Le triangle QAA′ donne

$$\cos PQ \sin AA' = \cos AQ \sin PA' + \cos QA' \sin PA. \qquad (1)$$

Le triangle QBC donne aussi

$$\cos QA' \sin BC = \cos BQ \sin CA' + \cos CQ \sin BA'. \qquad (2)$$

Eliminant cos QA′ entre (1) et (2), on trouve

$$\cos PQ = \cos AQ \frac{\sin PA'}{\sin AA'} + \cos BQ \frac{\sin CA' \sin PA}{\sin BC \sin AA'} + \cos CQ \frac{\sin BA' \sin PA}{\sin BC \sin AA'}. \qquad (3)$$

Les triangles PBA′, PCA′ coupés respectivement par les transversales CA, AB donnent

$$\frac{\sin CA'}{\sin BC} \cdot \frac{\sin AP}{\sin AA'} \cdot \frac{\sin BB'}{\sin PB'} = 1, \quad \frac{\sin BA'}{\sin BC} \cdot \frac{\sin PA}{\sin AA'} \cdot \frac{\sin CC'}{\sin PC'} = 1;$$

d'où

$$\frac{\sin CA'}{\sin BC} \cdot \frac{\sin PA}{\sin AA'} = \frac{\sin PB'}{\sin BB'}, \quad \frac{\sin BA'}{\sin BC} \cdot \frac{\sin PA}{\sin AA'} = \frac{\sin PC'}{\sin CC'},$$

et, par suite, l'égalité (3) devient

$$\cos PQ = \cos AQ \frac{\sin PA'}{\sin AA'} + \cos BQ \frac{\sin PB'}{\sin BB'} + \cos CQ \frac{\sin PC'}{\sin CC'}.$$

×Question 816.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 56.)

Éliminer x, y, z entre les équations

$$yz(1-2x)=\alpha^2(1-x)^2,\quad zx(1-2y)=\beta^2(1-y)^2,$$
$$xy(1-2z)=\gamma^2(1-z)^2,\quad x+y+z=1.\quad \text{(D. Besso.)}$$

Solution par M. E. Fauquembergue. Pour obtenir des équations symétriques en x, y, z, nous formerons les quantités

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2,\quad \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2},\quad \alpha^2\beta^2\gamma^2,$$

que nous désignerons respectivement par A, B, C; nous désignerons aussi par P la somme $xy+yz+zx$ et par Q le produit xyz (*).

Les trois premières équations donnent

$$\alpha^2=yz\left[1-\frac{x^2}{(1-x)^2}\right],\quad \beta^2=zx\left[1-\frac{y^2}{(1-y)^2}\right],\quad \gamma^2=xy\left[1-\frac{z^2}{(1-z)^2}\right].$$

On en déduit, en tenant compte de la quatrième équation,

$$A=P-Q\left[\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{y}{(1-y)^2}+\frac{z}{(1-z)^2}\right],$$

ou

$$A=P-Q.\frac{PQ-3P+5Q+1}{(P-Q)^2}=\frac{P^3-2P^2Q+3PQ-5Q^2-Q}{(P-Q)^2}.\quad (1)$$

Des relations

$$\frac{1}{\alpha^2}=\frac{1}{Q}\left[x+\frac{x^3}{1-2x}\right],\quad \frac{1}{\beta^2}=\frac{1}{Q}\left[y+\frac{y^3}{1-2y}\right],\quad \frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{Q}\left[z+\frac{z^3}{1-2z}\right],$$

on déduit

$$B=\frac{1}{Q}\left[1+\frac{x^3}{1-2x}+\frac{y^3}{1-2y}+\frac{z^3}{1-2z}\right],$$

ou

$$B=\frac{4P^2-8PQ-P+Q}{Q(4P-8Q-1)}.\quad (2)$$

(*) Dans le cours des calculs on rencontre les expressions Σx^3, Σx^3, Σx^4. On obtient rapidement leurs valeurs en fonction de P et Q, en les considérant comme des sommes de puissances semblables de racines de l'équation $V^3-V^2+PV-Q=0$.

(E. F.)

Les équations proposées donnent encore

$$C = \frac{x^2y^2z^2(1-2x)(1-2y)(1-2z)}{(1-x)^2(1-y)^2(1-z)^2} = \frac{Q^2(4P-8Q-1)}{(P-Q)^2}. \qquad (3)$$

Le problème revient maintenant à éliminer P et Q entre les équations (1), (2) et (3).

A cet effet, posons

$$P = QR \quad \text{et} \quad 4P - 8Q - 1 = S, \qquad (4)$$

d'où

$$P = \frac{R(S+1)}{4(R-2)}, \quad Q = \frac{S+1}{4(R-2)};$$

les équations (3) et (2) deviennent

$$S = C(R-1)^2, \qquad (5)$$

$$RS + 1 = BS, \qquad (6)$$

d'où, par élimination de R,

$$S^3 - (B-1)^2 CS^2 + 2(B-1)CS - C = 0. \qquad (7)$$

Pour obtenir une autre équation en S, mettons d'abord l'équation (1) sous la forme

$$P^2(4P-8Q) + 3Q(4P-8Q) + 4Q^2 - 4Q = 4A(P-Q)^2,$$

ou, en tenant compte des relations (4) et divisant les deux membres par Q,

$$QR^2(S+1) + 3(S+1) + 4Q - 4 = 4AQ(R-1)^2,$$

$$R^2(S+1)^2 + 12(RS+1) - 4R - 20S = 4A(S+1)(R-1)^2.$$

Après avoir développé et remplacé

$$RS \text{ par } BS - 1, \quad (R-1)^2 \text{ par } \frac{S}{C} \quad \text{et} \quad R \text{ par } B - \frac{1}{S},$$

on trouve l'équation

$$DS^3 + ES^2 - 6BCS + 4C = 0, \qquad (8)$$

dans laquelle

$$D = B^2C - 4A, \quad E = 2(B^2 + 5B - 10)C - 4A + 1.$$

Nous sommes ramenés à un problème bien connu : éliminer S entre les équations du troisième degré (7) et (8). D'ailleurs l'élimination des

deux derniers termes ainsi que celle des deux premiers se font très-simplement et conduisent à ces équations du second degré :

$$(D+4)S^2+[E-4(B-1)^2C]S+2(B-4)C=0, \qquad (9)$$

$$[(B-1)^2CD+E]S^2-2[3B+(B-1)D]S+(D+4)C=0. \qquad (10)$$

Or, on sait que la résultante des deux équations.

$$aS^2+bS+c=0, \quad a'S^2+b'S+c'=0,$$

est

$$(ac'-ca')^2-(ab'-ba')(bc'-cb')=0. \qquad (11)$$

Nous pouvons donc considérer le problème comme résolu.

Remarque. Dans le système d'équations proposées par M. Besso, α, β et γ sont les bissectrices intérieures des angles d'un triangle ayant pour côtés x, y, z et dont le périmètre est égal à 1. Donc le résultat de l'élimination de x, y, z exprime la relation qui existe entre les longueurs des bissectrices des angles d'un triangle dont le périmètre est constant.

Parthenay, 23 mai 1895.

Question 872.

(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 215).

Trouver l'enveloppe et les trajectoires orthogonales des circonférences telles que les rayons aboutissant aux points M, N ***où elles rencontrent une droite fixe d passant par deux points fixes*** A, B ***situés sur une perpendiculaire d' à la droite considérée d.*** (E. Cesaro.)

Enveloppe. Les rayons CM, CN de la circonférence variable formant un triangle isoscèle, le triangle CAB est également isoscèle; donc le centre C décrit la perpendiculaire élevée au milieu O de AB, et les points M', N' diamétralement opposés à M, N se meuvent sur une droite d_1 parallèle à d. La question proposée se réduit donc à la suivante :

On donne deux parallèles d, d_1 et un point A ; ***trouver l'enveloppe des circonférences*** C ***qui ont pour diamètres les droites*** MM' ***menées par*** A ***et limitées aux parallèles d, d_1.***

Prenons pour axes coordonnés la perpendiculaire élevée au milieu O de AB et la droite donnée d' ; la circonférence variable a pour équation

$$(x-\alpha)^2+y^2=R^2.$$

Menons CI perpendiculaire à d. Les triangles semblables AOC, CIM donnent

$$\frac{CM}{AC} = \frac{CI}{AO}, \quad \text{d'où } R = \frac{b\sqrt{\alpha^2+a^2}}{a},$$

a et b désignant les longueurs AO, CI. L'équation de la circonférence C est donc

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = \frac{(\alpha^2+a^2)\,b^2}{a^2}. \qquad (1)$$

Si on la dérive par rapport au paramètre variable α, on trouve

$$-x+\alpha = \frac{\alpha b^2}{a^2}; \qquad (2)$$

en éliminant α entre (1) et (2) on obtient pour l'enveloppe

$$(a^2-b^2)\,y^2 - b^2x^2 = b^2\,(a^2-b^2),$$

c'est-à-dire une ellipse ou une hyperbole, suivant que le point A est situé entre les parallèles d, d_1 ou en dehors. (Brocard, Collette.)

Trajectoires orthogonales. Cherchons d'abord l'équation différentielle des circonférences C en éliminant le paramètre α entre l'équation (1) et sa dérivée :

$$x - \alpha + y\frac{dy}{dx} = 0;$$

nous aurons, p désignant la dérivée $\frac{dy}{dx}$,

$$(a^2-b^2)\,y^2p^2 - 2b^2xyp + a^2y^2 - b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Pour l'équation différentielle des trajectoires orthogonales il faut changer p en $-\frac{1}{p}$, ce qui donne

$$(a^2y^2 - b^2x^2 - a^2b^2)\,p^2 + 2b^2xyp + (a^2-b^2)\,y^2 = 0. \qquad (3)$$

Il reste à intégrer l'équation (3). Nous donnerons plus tard, d'après Quetelet, une solution géométrique de la première partie, qui se rencontre dans la recherche de la caustique par réfraction d'une droite.

*Question 926.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IV, p. 104).

La somme de $(2m+1)$ *nombres triangulaires consécutifs est égale à* $2m+1$ *fois le terme du milieu, plus la somme des carrés des* m *premiers nombres entiers.* (DE ROCQUIGNY.)

Solution par M. FAUQUEMBERGUE. Soit $\frac{x(x+1)}{2}$ le premier triangulaire de la suite considérée; le dernier sera

$$\frac{(x+2m)(x+2m+1)}{2}$$

et celui du milieu

$$\frac{(x+m)(x+m+1)}{2}.$$

On sait que la somme des n premiers nombres triangulaires est égale au nombre des boulets de la pile à base triangulaire, ayant n boulets au côté; c'est le nombre pyramidal de rang n, c'est-à-dire

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Donc la somme des $(x+2m)$ premiers triangulaires est

$$\frac{(x+2m)(x+2m+1)(x+2m+2)}{6},$$

et celle des $(x-1)$ premiers est

$$\frac{(x-1)x(x+1)}{2}.$$

Par suite la somme des $(2m+1)$ nombres triangulaires consécutifs est

$$\frac{(x+2m)(x+2m+1)(x+2m+2)}{6}-\frac{(x-1)x(x+1)}{6},$$

résultat qu'on peut mettre sous la forme

$$(2m+1)\frac{(x+m)(x+m+1)}{2}+\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

C. Q. F. D.

Solution analogue par MM. Brocard et François. MM. Cristescu, Déprez, Vanderstegen cherchent la somme

$$n(n+1)+n(n+1)+\cdots+(n+2m)(n+2m+1),$$

ordonnée suivant les puissances de n, etc.

Solution par MM. Petrescu (Bucharest), Hacken *et* J. Jonescu. Représentons les rangs de $2m+1$ nombres triangulaires consécutifs par

$$p-m,\ p-m-1,\ \ldots,\ p-1,\ p,\ p+1,\ \ldots,\ p+m-1,\ p+m.$$

On a

$$T_{p-x}+T_{p+x}=\frac{(p-x)(p-x+1)}{2}+\frac{(p+x)(p+x-1)}{2}$$

$$=x^2+2T_p.$$

Faisant $x=1, 2, \ldots, m$ et ajoutant les résultats, on trouve

$$\sum_{p=m}^{p+m} T_n=(1+2^2+\ldots+m^2)+(2m+1)\,T_p.$$

Question 943.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 128.)

Trouver le lieu d'un point tel que les axes des deux paraboles passant par les points d'incidence des normales menées de ce point à une ellipse donnée, se coupent sur cette ellipse. (E. N. Barisien.)

Solution par MM. Gillet, Droz-Farny, Déprez, J. Jonesco *et* Cristescu. Les coniques qui passent par les points d'intersection des courbes données par les équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,\quad c^2xy+b^2\beta x-a^2\alpha y=0$$

sont comprises dans la suivante :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+\lambda(c^2xy+b^2\beta x-a^2\alpha y)=0.$$

On aura une parabole si l'on prend

$$\lambda^2c^4-\frac{4}{a^2b^2}=0\quad\text{ou}\quad\lambda=\pm\frac{2}{abc^2}.$$

Les deux paraboles du faisceau ont donc pour équations

$$f(x,y)\equiv c^2\left(\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\right)^2\pm 2ab\left(\frac{\beta x}{a^2}-\frac{\alpha y}{b^2}\right)-c^2=0.$$

On en déduit

$$f'_x=\frac{2c^2}{a}\left(\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\right)\pm\frac{2b\beta}{a},\quad f'_y=\pm\frac{2c^2}{b}\left(\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}\right)\mp\frac{2a\alpha}{b},$$

d'où l'on tire pour équation de l'axe :

$$\frac{x}{a}\pm\frac{y}{b}=\frac{a^3\alpha\mp b^3\beta}{c^2d^2},\quad (d^2=a^2+b^2).$$

Les axes des deux paraboles se coupent au point

$$\frac{x}{a}=\frac{a^3\alpha}{c^2d^2},\quad \frac{y}{b}=-\frac{b^3\beta}{c^2d^2};$$

si ce point décrit l'ellipse donnée, le point (α, β) se meut sur l'ellipse

$$a^6\alpha^2+b^6\beta^2-c^4d^4=0.$$

Question CCXIII.

(Voir N. C. M., p. 403, t. II, 1876.)

La somme $-1^4+3^4-5^4+7^4-\cdots+(4x-1)^4$ *n'est ni un carré, ni le double d'un carré, ni le triple d'un carré.* (E. Lucas.)

Solution par M. E. Fauquembergue. La différence des deux derniers termes est égale à

$$[(4x-1)^2-(4x-3)^2]\,[(4x-1)^2+(4x-3)^2],$$

ou à

$$16(2x-1)\,[4(2x-1)^2+1]=64(2x-1)^3+16(2x-1).$$

Par conséquent la suite proposée est égale à 64 fois la somme des cubes des x premiers nombres impairs, augmentée de 16 fois la somme de ces mêmes nombres, c'est-à-dire à

$$64x^2(2x^2-1)+16x^2$$

ou encore

$$16x^2(8x^2-3).$$

Or, le nombre impair $8x^2-3$ ne peut évidemment pas être le double d'un carré. Il n'est pas non plus un carré, puisque le carré de tout nombre impair est un multiple de 8 plus 1.

Si $8x^2 - 3$ était le triple d'un carré, x serait multiple de 3, soit $x = 3y$, et le nombre $24y^2 - 1$ devrait être carré; ce qui est impossible pour la même raison que dans le cas précédent.

Donc le théorème est démontré.

QUESTIONS D'EXAMEN.

694. Soient a, b les bases et S la surface d'un trapèze ABCD. On joint le milieu de chaque côté latéral aux sommets du côté opposé; les quatre droites ainsi menées déterminent un quadrilatère dont l'aire S' est donnée par la formule

$$S' = S\,\frac{(a+b)^2}{(a+3b)(b+3a)}.$$

Le quadrilatère déterminé par les quatre droites qui joignent le milieu d'une base aux extrémités de l'autre base a pour aire $\dfrac{abh}{2(a+b)}$.

695. Si, dans un triangle ABC, m_a, m_b, m_c désignent les longueurs des bissectrices et l_a, l_b, l_c celles des trois symédianes, on a :

$$\Sigma\,\frac{l_a^2(4m_a^2+m_b^2+m_c^2)^2}{m_a^2} = 36\,\Sigma m_b^2 m_c^2. \qquad \text{(E. Lemoine.)}$$

696. Un terrain a été payé à raison de 2500 livres tournois l'arpent de Paris, avant l'établissement du système métrique, et sa valeur a quadruplé depuis cette époque. On demande quel est, à cent francs près, son prix actuel à l'hectare, sachant :

1° Que 80 francs valent 81 livres tournois;

2° Que l'arpent de Paris contenait cent perches carrées, dont chacune était un carré de trois toises de côté;

3° Que la longueur de la toise équivalait à $1^m,94904$.

(*Concours d'admission aux Écoles d'Arts et Métiers*, 1893).

Solution. 1 arpent = 900 toises carrées = $9 \times 19,4904^2$ mètres carrés = $0,194904^2$ hectares. — 2500 livres tournois valent $\dfrac{80}{81} \times 2500$ francs. — Un hectare vaut donc actuellement

$$\frac{80 \times 2500 \times 4}{81 \times 9 \times 0,194904^2} \text{ francs.}$$

697. Une pyramide pentagonale régulière SABCDE repose par sa base ABCDE sur le plan horizontal. Le diamètre du cercle circonscrit

à la base a pour longueur 6 centimètres. L'arête latérale a pour longueur la diagonale AD.

1° Déterminer cette pyramide et trouver la perpendiculaire commune PQ au côté AB et à l'arête SD.

2° Trouver, sur la surface de la pyramide, le lieu des points également distants des pieds P et Q de la perpendiculaire commune.

Au tracé à l'encre, on représentera la projection horizontale de la surface opaque de la pyramide avec le tracé du lieu géométrique, puis la ligne PQ, prolongée d'une longueur égale à PQ de part et d'autre des points P et Q.

(*Composition de Géométrie descriptive au Concours d'admission à l'Institut agronomique*, en 1893).

QUESTIONS PROPOSÉES.

*1031. Si l'angle A d'un triangle ABC est égal à 60° ou 120°, la ligne d'Euler HO forme un triangle isoscèle avec les côtés AB, AC, et le centre du cercle des neuf points est situé sur la bissectrice de l'angle BAC ou sur celle de l'angle supplémentaire adjacent. (J. Neuberg.)

1032. Soient A', B', C', D' les projections d'un point M sur les côtés a, b, c, d d'un quadrilatère donné.

1° Si la somme $m.\overline{A'B'}^2 + n.\overline{C'D'}^2$ est constante, le lieu de M est une circonférence ou une droite. 2° Si le produit A'B'.C'D' est constant, le lieu de M est un ovale de Cassini. 3° Si la somme $m.A'B' \pm n.C'D'$ est constante, le point M décrit un ovale de Descartes, qui peut dégénérer en une conique. (Déprez.)

1033. Soient ABC un triangle circonscrit à une parabole, tel que les normales aux points de contact A', B', C' des côtés BC, CA, AB concourent en un même point N. Les droites AA', BB', CC' concourent en un même point P. Les parallèles menées par A, B, C respectivement aux droites B'C', C'A', A'B' concourent en un même point Q. Démontrer que les cinq points A, B, C, P, Q sont situés sur une même hyperbole équilatère Σ.

Soient A'', B'', C'' les symétriques de N par rapport aux milieux des côtés du triangle A'B'C'; l'orthocentre du triangle A''B''C'' est situé sur Σ.

On construit les parallélogrammes C'AB'A''', A'BC'B''', B'CA'C'''; les droites A'A''', B'B''', C'C''' forment un triangle $A''B''C''$ inscrit à Σ et qui a même orthocentre que ABC. (TUCKER.)

×**1034.** Calculer le côté d'un triangle équilatéral ou d'un tétraèdre régulier, connaissant les distances d'un point de son plan à ses sommets. (T. H. DE LAND.)

1035. On considère une cubique gauche équilatère. Il existe une infinité de plans rencontrant la cubique en trois points vus d'un point fixe M de la courbe sous un angle trièdre trirectangle. Démontrer que tous ces plans sont parallèles au plan normal à la cubique au point M.

Application. Un plan quelconque parallèle au plan diamétral du diamètre passant par un point P de l'espace, dans une quadrique, rencontre la cubique des pieds des normales menées par le point P en trois points qui sont vus de P sous un angle trièdre trirectangle. (A. CAZAMIAN.)

M. Retali nous fait observer que la question 1030 n'est pas nouvelle. Néanmoins nous en publierons volontiers une solution, comme aussi de la question 1035.

1036. Résoudre un triangle, connaissant le rayon du cercle circonscrit, sa surface et celle du triangle formé par les centres des trois cercles ex-inscrits. — Le problème dépend d'une équation du 3e degré. Trouver la condition de réalité des racines. (E. N. BARISIEN.)

1037. On considère tous les trapèzes ayant l'une des bases fixe en grandeur et en position, dont les diagonales sont rectangulaires, et la hauteur constante. Le lieu du point de rencontre des côtés non parallèles est une conique dont le foyer est au milieu de la base fixe. (E. N. BARISIEN.)

×**1038.** Soient H l'orthocentre d'un triangle ABC et O le centre du cercle circonscrit; les hauteurs AH, BH, CH rencontrent la circonférence ABC en A_1, B_1, C_1; la droite HO rencontre BC, CA, AB en A', B', C'; enfin A_2, B_2, C_2 désignent les symétriques de A, B, C par rapport à O.

1° Les droites A_2A', B_2B', C_2C' concourent en un point M de la circonférence ABC; 2° les points M, H et le point de Tarry sont en ligne droite; 3° les droites A_1A', B_1B', C_1C' se coupent au point de Steiner. (E. LEMOINE.)

*SUR LES VALEURS PRINCIPALES DES RADICAUX,

par M. De Tilly.

(*Suite;* voir pages 177-183.)

II. Appliquons maintenant des idées analogues à la détermination de la valeur principale de la racine m^{me} de $a+b\sqrt{-1}$.

Pour cela, reprenons d'abord, sous une forme également généralisée, les conventions admises pour l'extraction des racines des quantités réelles.

1° La racine m^{me} principale de la quantité positive a est sa racine arithmétique, positive.

2° La racine m^{me} principale de $-a$ s'obtient, si m est impair, en prenant avec le signe — la racine m^{me} arithmétique de a.

3° La racine m^{me} principale de $-a$ s'obtient, si m est simplement pair, en multipliant la racine m^{me} arithmétique de a par $+\sqrt{-1}$.

Les racines indiquées dans ces trois règles sont considérées comme principales, parce qu'elles sont plus simples que toutes les autres; celle du 1° est la seule qui soit réelle et positive; celle du 2°, la seule qui soit réelle; celle du 3° est l'une des deux seules qui soient imaginaires simples, et elle a le signe +, tandis que l'autre a le signe —.

On peut poser :

$$\sqrt[m]{a+b\sqrt{-1}}=\sqrt[m]{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{\varphi+2k\pi}{m}\right),$$

formule dans laquelle la racine carrée de a^2+b^2, puis la racine m^{me} du résultat sont prises arithmétiquement, et qui donne les m valeurs du premier membre, en faisant successivement, dans le second, $k=0$, $1, \ldots, m-1$.

φ est l'angle, compris entre 0 et 2π(*), qui a pour cosinus $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et pour sinus $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, les radicaux étant, de nouveau, pris arithmétiquement.

(*) Ceci est purement conventionnel. Au lieu de prendre φ entre 0 et 2π, on pourrait choisir d'autres limites. Mais il ne semble pas qu'on doive y trouver avantage.

Il s'agit maintenant de choisir une racine principale, variant avec a et b d'une manière continue, ou avec le moins de discontinuités possibles, et s'accordant avec les conventions relatives à $\sqrt[m]{a}$ et $\sqrt[m]{-a}$.

Nous n'avons que le choix de la valeur de k, mais on peut observer que k ne doit pas nécessairement rester le même dans toute l'étendue de la fonction qui représente la racine choisie. On peut admettre une variation brusque de k, pour certaines valeurs de a et de b, pourvu qu'alors les diverses valeurs de k, relatives aux diverses manières de faire converger a et b vers leurs états actuels, ne donnent, autant que possible, qu'une seule racine.

Il est d'ailleurs évident qu'une discontinuité dans la racine ne peut provenir que d'une double valeur de cette racine, et que la double valeur elle-même ne peut provenir que de deux circonstances : une variation de k comme nous venons de le dire, ou bien l'ambiguïté qui se produit dans la valeur de φ quand $b = 0$ et que a est positif, parce que alors on peut prendre, dans les limites assignées, $\varphi = 0$ ou $\varphi = 2\pi$. Passer de la première de ces valeurs à la seconde produirait le même effet sur les formules que d'augmenter k d'une unité, et il résulte de là que les deux causes de discontinuité peuvent se compenser.

Considérons, en effet, a et b comme deux coordonnées, et partons d'un point A, où $b = 0$, en suivant une courbe fermée qui, au point A, traverse l'axe des a. Le long de cette courbe, a et b varieront d'une manière continue ; mais suivant qu'on arrivera en A du côté des b positifs ou des b négatifs, on devra forcément prendre, par continuité, $\varphi = 0$ ou $\varphi = 2\pi$. Or cette valeur double produit elle-même une discontinuité dans la racine au point A. C'est celle qui a été signalée, notamment par Puiseux (*Journal de Liouville*, tt. XV et XVI).

On peut la faire disparaître en diminuant k d'une unité sur la branche des b négatifs ; ou bien (si k était égal à 0 sur l'autre branche), en l'augmentant de $m - 1$ unités, ce qui revient au même, l'augmentation de m unités étant sans effet.

Il nous sera facile maintenant de déterminer la racine qu'il convient de choisir.

Considérons d'abord les valeurs positives de a. Si b est également positif, et si on le fait diminuer indéfiniment, on ne peut trouver un résultat s'accordant avec la convention 1° ci-dessus, au moment où b

s'annule, qu'à la condition de poser $k = 0$. Si b est négatif, et si l'on fait diminuer indéfiniment sa valeur numérique, on ne peut trouver un résultat s'accordant avec la même convention 1°, au moment où b s'annule, qu'en posant $k = m - 1$.

Il suffit, pour s'assurer de l'exactitude de ces propositions, de vérifier l'accord pour les valeurs de k indiquées, et d'observer qu'il ne peut exister pour aucune autre valeur de k, puisque alors la racine résultant de la convention 1° resterait la même, tandis que l'autre serait multipliée par une racine de l'unité *différente de* $+1$.

Il n'y a donc aucun doute sur les valeurs à adopter pour a positif. Mais le cas de a négatif doit être discuté séparément pour les diverses valeurs possibles de m.

m impair.

Si b, positif ou négatif, tend vers zéro, on ne peut trouver un résultat s'accordant avec la convention 2° ci-dessus, au moment où b s'annule, qu'à la condition de poser $k = \frac{1}{2}(m - 1)$. Même vérification que plus haut.

Cherchons donc tous les arrangements possibles, ou toutes les valeurs de k relatives aux quatre hypothèses distinctes :

$$(a > 0, b > 0), \quad (a > 0, b < 0), \quad (a < 0, b > 0), \quad (a < 0, b < 0).$$

Nous écrirons ces quatre valeurs de k, les unes à la suite des autres, sur une même ligne horizontale, dans l'ordre indiqué, en représentant, comme toujours, par le chiffre ou la *lettre* o la valeur zéro, et par les lettres n, p, a, respectivement, la valeur $m - 1$, la valeur $\frac{1}{2}(m - 1)$, ou une valeur quelconque, *autre* que o, n ou p.

Il faut donc écrire les arrangements des lettres o, n, p, a, de manière à rendre minimum le nombre des discontinuités.

Mais, d'après ce qui précède, la première lettre doit être o, ou bien la seconde doit être n ; et en outre la troisième ou la quatrième doit être p.

Alors il y aura une discontinuité chaque fois que l'un des cas suivants se présentera : si la première lettre n'est pas o (discontinuité pour $b = 0$, $a > 0$) ; si la seconde lettre n'est pas n (même cas) ; si la troisième lettre n'est pas la même que la première ($a = 0$, $b > 0$) ; si la quatrième n'est pas la même que la seconde ($a = 0$, $b < 0$) ; si la quatrième n'est pas la même que la troisième ($b = 0$, $a < 0$).

D'après cela, l'arrangement *onpp*, par exemple, qui réunit toutes les conditions au moment où $b = 0$, présente deux discontinuités quand $a = 0$. Puisqu'il existe des arrangements ne renfermant que deux discontinuités, excluons tous ceux qui en renferment plus de deux, et recherchons dans cette hypothèse les arrangements restants.

Examinons d'abord les arrangements de deux lettres, satisfaisant aux conditions voulues. Ce sont :

$\dot{o}\dot{o}$, $\dot{o}\dot{n}$, $\dot{o}\dot{p}$, $\dot{o}\dot{a}$, $\dot{n}\dot{n}$, $\dot{p}\dot{n}$, $\dot{a}\dot{n}$ (les discontinuités sont marquées d'un point).

Ajoutons la troisième lettre, d'abord à l'arrangement *on*, qui n'a pas encore de discontinuité. Nous aurons :

$$\dot{o}n\dot{o},\ \dot{o}n\dot{n},\ \dot{o}n\dot{p},\ \dot{o}n\dot{a}.$$

Pour les arrangements qui ont déjà une discontinuité, la troisième lettre doit être la même que la première ou que la seconde; autrement il serait impossible de placer la quatrième sans avoir trois discontinuités. On trouve ainsi :

$$\dot{o}\dot{o}\dot{o},\ o\dot{p}\dot{o},\ o\dot{p}\dot{p},\ \dot{o}a\dot{o},\ \dot{o}a\dot{a},\ \dot{n}n\dot{n},\ p\dot{n}\dot{p},\ \dot{p}n\dot{n},\ a\dot{n}\dot{a},\ \dot{a}n\dot{n}.$$

Enfin, plaçons la quatrième lettre, en observant qu'elle doit être p chaque fois que la troisième n'est pas p, et supprimons tous les arrangements qui ont trois discontinuités. Il reste

$$\ddot{o}n\dot{o}p,\ o\dot{n}\dot{p}p,\ o\dot{n}\dot{p}n,\ \dot{o}p\dot{o}p,\ \dot{o}p\dot{p}p,\ \dot{p}n\dot{p}p,\ \dot{p}n\dot{p}n.$$

Nous avons ainsi trouvé les sept arrangements possibles à deux discontinuités, et démontré en même temps qu'il est impossible d'en rencontrer moins de deux.

m simplement pair.

Si b (positif ou négatif) converge vers zéro, on ne peut trouver un résultat s'accordant avec la convention 3° ci-dessus, au moment où b s'annule, qu'à la condition de poser $k = \frac{1}{4}(m - 2)$. Même vérification que plus haut.

Il en résulte que toutes les déductions relatives au cas de m impair sont applicables au cas de m simplement pair, pourvu que la lettre p représente $\frac{1}{4}(m - 2)$ au lieu de représenter $\frac{1}{2}(m - 1)$.

Si $m = 2$, on a $n = 1$ et $p = 0$. Alors, dans chacun des sept arran-

gements, l'hypothèse $p = 0$ fait disparaître une discontinuité et de plus ces arrangements se réduisent à trois, savoir :

$$\text{I. } 0\,1\,0\,\dot{1}$$
$$\text{II. } 0\,\dot{0}\,0\,0$$
$$\text{III. } 0\,1\,0\,\dot{0},$$

c'est-à-dire aux trois systèmes à une seule discontinuité trouvés précédemment pour la racine carrée. Nous les avons placés dans le même ordre que ceux-ci et nous aurions pu traiter par le procédé actuel le cas $m = 2$, dès le début de cette note. L'exposition de ce cas élémentaire eût été un peu plus courte, mais aussi un peu plus abstraite.

m doublement pair.

Quand m est doublement pair, il n'y a aucune condition relative aux racines de $-a$, qui sont toutes imaginaires complexes.

Alors la lettre p disparaît, et il faut former les arrangements quatre à quatre des trois lettres o, n, a.

Comme il est visible que l'arrangement $o\dot{o}oo$, par exemple, ne donne qu'une seule discontinuité, nous exclurons tous ceux qui en contiennent plus d'une.

Dans ces conditions, les arrangements deux à deux sont

$$\dot{o}o,\quad o\dot{n},\quad o\dot{a},\quad \dot{n}n,\quad \dot{a}n.$$

L'arrangement on donne les arrangements de trois lettres

$$on\dot{o},\quad on\dot{n},\quad on\dot{a}.$$

Les autres donnent

$$\dot{o}oo,\quad \dot{o}ao,\quad \dot{n}nn,\quad \dot{a}na.$$

Enfin, introduisant la quatrième lettre, on trouve :

$$on\dot{o}o,\quad on\dot{o}n,\quad on\dot{n}n,\quad \dot{o}ooo,\quad \dot{n}nnn.$$

En résumé, parmi tous les systèmes trouvés, le plus simple, à divers points de vue, est $on\dot{p}\dot{p}$, applicable à toutes les hypothèses, et qui se réduit à $on\dot{o}o$ dans deux cas : si m est doublement pair, ou bien si m, simplement pair, est égal à 2. Aucune des discontinuités qu'il présente ne se rapporte, ni à $\sqrt[m]{a}$, ni à $\sqrt[m]{-a}$, mais seulement à $\sqrt[m]{\pm b\sqrt{-1}}$, pour lesquelles aucune convention préliminaire n'a été établie.

C'est donc là la valeur qu'il serait le plus rationnel d'adopter, et dès lors pour la racine carrée (p. 179), ce serait la valeur III, c'est-à-dire la plus compliquée, qu'il faudrait choisir. Nous n'avons pas cru devoir le proposer, pour ne pas changer, sans raison majeure, une convention généralement admise. Les résultats ne se modifieraient, d'ailleurs, que par un changement de signe se rapportant au cas où a et b sont tous les deux négatifs. Mais les formules $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ (p. 182) seraient aussi un peu plus compliquées dans le système III.

Une autre remarque assez curieuse, c'est que dans tous les cas de discontinuité, sauf pour $m = 2$, les deux valeurs qu'on obtient simultanément ne sont jamais égales et de signes contraires. Cependant il suffit que m soit pair pour qu'à toute valeur de la racine en corresponde une autre égale et de signe contraire; mais si l'on obligeait ces deux racines à entrer dans un même système, celui-ci ne pourrait plus contenir un nombre minimum de discontinuités.

Pour s'assurer de ce fait, il convient de dresser un tableau de toutes les valeurs de k, dans les divers systèmes à discontinuité minima, chaque colonne répondant à une hypothèse sur a et sur b, dans le même ordre que ci-dessus.

La première et la seconde colonne doivent être comparées entre elles quand b s'annule, a étant positif. Alors, pour celle des deux qui a la valeur normale de k, on trouvera :

$$\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{m} = 0, \quad \cos\frac{\varphi + 2k\pi}{m} = 1.$$

Pour l'autre colonne, on devrait donc avoir :

$$\cos\frac{\varphi + 2k'\pi}{m} = -1,$$

avec les mêmes valeurs de a et de b, donc une valeur de φ égale à 0 ou à 2π. On en déduit $k' = \frac{1}{2}m$ ou $\frac{1}{2}(m-2)$, valeurs que nous ne trouvons nulle part dans les deux colonnes, quand m n'est pas égal à 2.

Si la discontinuité porte sur la troisième ou la quatrième colonne, φ n'est égal ni à 0, ni à 2π. Alors, en appelant k et k' les valeurs relatives aux deux racines simultanément recherchées, pour les valeurs données de a et de b, on devrait avoir

$$\frac{\varphi + 2k\pi}{m} - \frac{\varphi + 2k'\pi}{m} = \pm\pi,$$

équation d'où φ et π disparaissent, et qui se réduit à $k - k' = \pm \frac{1}{2} m$. Cette relation, encore une fois, ne se vérifie nulle part, si m n'est pas égal à 2.

Nous nous sommes attaché spécialement, tant pour $m = 2$ que pour m quelconque, au choix d'une seule racine principale. Toutes les autres racines s'en déduisent, en multipliant la première par les racines de l'unité autres que $+1$, c'est-à-dire par des constantes.

Il semble donc que cette notion de la racine principale (malgré les discontinuités que cette racine présente) est une idée parfaitement claire, bien qu'elle ne figure pas, en général, dans les traités d'Algèbre. Le cours d'Algèbre supérieure de l'École militaire en dit quelques mots, spécialement relatifs au cas où a et b sont positifs. Peut-être y aurait-il lieu de donner à ce sujet certains détails complémentaires, dans le sens des observations ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE.

L'Arithmétique amusante, par Ed. Lucas. Un vol. in-8° de VIII, 266 pages et 69 figures dans le texte. — Paris, Gauthier-Villars et fils, 1895. Prix : 7 fr. 50.

Le compte rendu bibliographique des quatre volumes des *Récréations mathématiques* d'Ed. Lucas a été donné dans ce journal (1882, 181-183; 1883, 202-203; 1893, 90-91; 1894, 225-227).

En présentant le 3e et le 4e volumes, nous avons annoncé que la Société mathématique de France avait délégué à MM. Delannoy, Laisant et Lemoine, amis personnels d'Ed. Lucas et tous trois animés du même dévouement à l'œuvre du regretté géomètre, le soin d'achever la publication des *Récréations mathématiques*, de la *Théorie des Nombres*, et des autres travaux que Lucas aurait entrepris. Parmi ces derniers, on a retrouvé des matériaux assez étendus pour pouvoir former un ouvrage distinct, sous le nom d'*Arithmétique amusante*, que l'auteur comptait publier dès 1885, mais dont la publication vient seulement d'être terminée, et fait l'objet du présent résumé bibliographique.

L'ouvrage est divisé en quatre chapitres et en quatre notes additionnelles.

I. *Calculs élémentaires* (1-51). Parmi les questions traitées, signalons les problèmes dits de Josèphe et de Caligula, et l'arithmétique sur les doigts.

II. *Le calcul rapide* (53-108). Multiplications accélérées, divisions particulières, problèmes de rouges et noires.

III. *Les progressions arithmétiques* (109-147). La traversée de 3, 4, 5 ménages.

IV. *Les progressions géométriques* (149-186). L'arénaire d'Archimède. Arithmétique binaire. Numération ternaire. Le baguenaudier. La tour d'Hanoï.

Notes (187-260). I. Discours de distribution des prix au Lycée St-Louis, le 4 août 1885; II. Sur les traversées (par M. G. Tarry); III. Les jeux scientifiques de Lucas; IV. Fragments destinés à une continuation éventuelle de l'ouvrage sur les *Récréations mathématiques*.

Le nouvel ouvrage est édité dans le même format que celles-ci et avec la même élégance typographique, par les soins de MM. Gauthier-Villars et fils, à Paris. Il aura sa place dans l'enseignement des premières notions des mathématiques, en fournissant aux maîtres élémentaires les dispositions matérielles nécessaires pour aider à la pratique du calcul mental, ingénieusement transformé en une sorte d'amusement scientifique. (H. B.)

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (1895)

Mathématiques élémentaires.

On donne un triangle T = ABC et on considère le triangle T′ qui a pour sommets les projections orthogonales A′, B′, C′ d'un point M sur les côtés du triangle T.

1. Démontrer que, si le point M décrit une droite Δ dans le plan du triangle T, les côtés de T′ envelopperont trois paraboles P, P_1, P_2.

Ces paraboles sont inscrites dans un même angle; on construira leurs foyers et leurs directrices.

Quelle position doit occuper la droite Δ pour que ces trois paraboles soient tangentes en un même point?

2. Comment faut-il choisir la droite Δ pour que les directrices des trois paraboles P, P_1, P_2 concourent en un même point H à distance finie?

La droite Δ se déplaçant de manière à satisfaire à cette condition, trouver le lieu du point H?

3. Démontrer que, si l'on fait tourner la droite Δ autour d'un point fixe K, la directrice de la parabole P passe elle-même par un point fixe I.

Trouver l'enveloppe de la droite K I lorsque l'un des points K ou I décrit une droite donnée.

4. Au point K correspondent trois points : I, I_1, I_2 relatifs aux directrices des paraboles P, P_1, P_2.

On demande quelle position doit occuper le point K pour que les trois points I, I_1, I_2 soient en ligne droite, et on propose de démontrer

que, si le point K se déplace de manière à satisfaire à cette condition, la droite $I I_1 I_2$ tourne autour d'un point fixe.

Nous allons donner quelques indications rapides sur la solution de cette question (le lecteur est prié de faire les figures).

1. La droite Δ coupe les côtés de T aux points A_1, B_1, C_1, et la circonférence circonscrite à T aux points Q, Q'. D'après notre article *Sur un groupe de trois paraboles* (*M.*, p. 60) et une note de M. Droz-Farny (*M.*, p. 226), le côté B'C' de T' enveloppe une parabole P ayant pour foyer le pied F de la hauteur AF du triangle AB_1C_1, pour directrice d la droite joignant les pieds des deux autres hauteurs de ce triangle. On trouve de même les foyers F_1, F_2 et les directrices d_1, d_2 des paraboles P_1, P_2, enveloppes des côtés C'A', A'B' du triangle T'.

Lorsque M coïncide avec Q ou Q', le triangle T' se réduit à une droite; donc les droites de Simson q, q' des points Q, Q' par rapport à T sont des tangentes communes aux trois paraboles.

Faisons coïncider Q' avec Q; Δ touchera la circonférence ABC au point Q, et les trois paraboles P, P_1, P_2 toucheront q au point de contact de cette droite avec son enveloppe lorsque Q parcourt la circonférence (hypocycloïde à trois rebroussements).

2. La directrice d'une parabole quelconque π qui touche les droites q, q' (supposées de nouveau distinctes) et α son foyer φ sur la droite Δ, enveloppe une parabole ψ; car elle passe par les symétriques g, g' de φ par rapport à q, q', et ces points marquent deux ponctuelles semblables sur les symétriques de Δ par rapport à q, q'. On voit facilement que ψ se change en un faisceau de droites lorsque q et q' sont rectangulaires.

Cette conclusion est évidente : le point d'intersection Q, de deux tangentes rectangulaires appartient à la directrice de chacune des paraboles π.

D'après cela, si Δ passe par le centre O du cercle ABC, q et q' sont rectangulaires et leur point d'intersection H appartient aux directrices d, d_1, d_2 des trois paraboles P, P_1, P_2.

Soit h l'orthocentre de T; on sait que q et q' passent respectivement par les milieux N, N' des droites hQ et hQ'. Les points N, N' appartiennent au cercle des neuf points de T et sont même les extrémités d'un diamètre; donc le lieu de H est ce même cercle.

3. Si Δ tourne autour d'un point fixe K dont les projections sur les côtés de T sont α, β, γ, la parabole P a trois tangentes fixes qui sont AB, AC et $\beta\gamma$; la directrice d de P passe alors constamment par l'orthocentre I du triangle $A\beta\gamma$.

Faisons parcourir à K une droite k. La figure $K\beta I\gamma$ étant un parallélogramme, les droites $K\gamma$, $K\beta$, KI, $\beta\gamma$ rencontrent la droite de l'infini en quatre points harmoniques γ_1, β_1, i_1, α_1; les deux premiers étant fixes, les deux autres déterminent une involution. Mais la droite $\beta\gamma$ enveloppe une parabole et marque sur la droite de l'infini et sur AC des ponctuelles projectives; il en résulte que la droite Ki_1 joint les points correspondants de deux ponctuelles projectives et, par suite, enveloppe une parabole tangente à k.

Par un raisonnement analogue on établit que la droite KI enveloppe encore une parabole lorsque I se déplace sur une droite.

4. Lorsque K est sur la circonférence ABC, les points α, β, γ sont en ligne droite et les orthocentres I, I_1, I_2, h des quatre triangles $A\beta\gamma$, $B\gamma\alpha$, $C\alpha\beta$, ABC sont en ligne droite. (J. N.)

NOTE SUR UN ARTICLE DE MATHESIS;

par M. Droz-Farny, professeur à Porrentruy (Suisse).

I. Dans le numéro de mars 1895 de *Mathesis*, on trouve un intéressant article de M. J. Neuberg sur quelques coniques du plan d'un triangle ABC.

Dans la deuxième partie, l'auteur considère un groupe de paraboles remarquables du plan d'un triangle, paraboles que le problème d'agrégation des sciences mathématiques (1895) en France vient de remettre en lumière. Il généralise plusieurs de leurs propriétés étudiées par M. R. Tucker dans un mémoire des *Proceedings of the Edinburgh Math. Soc.*, 1894.

Voici comment, depuis plusieurs années, j'expose, dans mon cours, la théorie de ces paraboles.

Soient P un point quelconque variable du côté BC d'un triangle ABC, P_1 et P_2 ses projections sur CA et AB. Il s'agit d'étudier la courbe enveloppée par la droite P_1P_2. Il est d'abord facile de constater que les côtés CA et AB, ainsi que les hauteurs BB′ et CC′, sont des tangentes à la courbe. Pour déterminer sa nature, on peut procéder comme il suit : Le quadrilatère PP_1AP_2 est inscriptible; AP étant un diamètre, la circonférence circonscrite passe par le pied A′ de la hauteur sur BC. On sait que les pieds α, β, γ des perpendiculaires abaissées de A′ sur les côtés P_1P_2, P_1A et P_2A du triangle P_1AP_2 sont en ligne droite. Or β et γ sont des points fixes et par conséquent, la droite variable P_1P_2 se meut de manière que le sommet α de l'angle droit $P_1\alpha A'$ reste constamment sur une droite fixe $\beta\gamma$ et que le côté $A'\alpha$ passe par un point fixe A′.

P_1P_2 enveloppe donc une parabole de foyer A′ et ayant $\beta\gamma$ comme tangente au sommet.

Des propriétés connues de la droite de Simson on déduit aisément celles de la parabole.

II. Soient P un point quelconque du plan d'un triangle ABC et P_1, P_2, P_3 ses projections sur les trois côtés BC, AC, AB. D'après un

théorème dû à M. Sollertinsky, si la droite P_2P_3 est divisée en parties égales par PP_1, le point P appartient à la symédiane de l'angle A. On peut déduire de ce théorème plusieurs corollaires bien connus :

1° Le point de Lemoine est le centre de gravité de son triangle podaire.

2° Si du point D où la symédiane de l'angle A coupe la circonférence circonscrite, on abaisse les perpendiculaires DD_1, DD_2, DD_3 sur les côtés du triangle, le point D_1 est le milieu de la droite D_2D_3.

D'après une remarque de M. W. Tesch (*Mathesis*, t. II, 1882, p. 151), ce corollaire serait dû à M. J. Van Haarst.

Supposons donc une transversale variable $D_1D_2D_3$ (D_1 sur le côté BC) coupant les côtés du triangle de manière qu'on ait $D_2D_1 = D_1D_3$. Cette droite enveloppera une parabole tangente aux côtés du triangle.

On sait en effet que si une transversale variable rencontre quatre droites, côtés d'un quadrilatère, suivant quatre points déterminant un rapport anharmonique constant, cette transversale enveloppera une conique tangente aux côtés du quadrilatère. Il suffit, pour avoir le théorème énoncé, de supposer un des côtés du quadrilatère à l'infini et de prendre (— 1) comme rapport anharmonique.

D'après le théorème de M. Van Haarst, cette parabole a pour foyer le point D où la symédiane de l'angle A rencontre la circonférence circonscrite. Sa directrice est la perpendiculaire abaissée de l'orthocentre du triangle sur la médiane issue du sommet A.

\- - -

NOTES MATHÉMATIQUES.

14. *Note additionnelle à la question 635* [*M.*, (2) V, p. 202].

I. Voici une démonstration analytique très simple d'un théorème de M. Lemoine (J. M. S., 1889, p. 35) ainsi énoncé :

Soient ABC, A'B'C' *deux triangles quelconques. Le lieu des points* O *et le lieu des points* O' *tels que* AO, BO, CO *soient respectivement parallèles à* A'O', B'O', C'O', *sont deux coniques homothétiques.*

Le triangle ABC étant pris pour triangle de référence, désignons par $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$, $(\alpha''', \beta''', \gamma''')$, (X, Y, Z), (x, y, z) les coordonnées des points A', B', C', O, O'. Comme les coordonnées normales x, y d'un point ne diffèrent des coordonnées cartésiennes de ce point par rapport aux axes coordonnés CB, CA que par le facteur sin C, le paral-

lélisme des droites CO, C'O' s'exprime par l'égalité des coefficients angulaires

$$\frac{Y}{X}=\frac{y-\beta'''}{x-\alpha'''}.$$

On a de même,

$$\frac{Z}{Y}=\frac{z-\gamma'}{y-\beta'},\quad \frac{X}{Z}=\frac{x-\alpha''}{z-\gamma''};$$

d'où, par multiplication,

$$(x-\alpha'')(y-\beta''')(z-\gamma')=(x-\alpha''')(y-\beta')(z-\gamma'').$$

Telle est l'équation du lieu (O'); elle est du second degré en x, y, z. Comme elle est vérifiée par $y=\beta'$, $z=\gamma'$, etc., la courbe passe par A', B', C'. La solution $y=\beta'''$, $z=\gamma''$ indique que le lieu passe par l'intersection des parallèles à CA, BA menées respectivement par C', B', etc. (A.C.)

II. On peut rattacher au théorème rappelé ci-dessus la question 258 [M. (1) V, p. 268; (1) VI, p. 6], savoir :

Trouver dans le plan d'un triangle ABC *le lieu d'un point* M *tel, que les perpendiculaires menées par* A, B, C *respectivement sur les droites* MB, MC, MA *se coupent en un même point* M'. *Quel est le lieu du point* M' *?*

En effet, après avoir fait tourner le triangle ABC d'un angle droit dans son plan, désignons par B', C', A' les nouvelles positions des points A, B, C; les droites MB, MC, MA seront parallèles aux droites M'B', M'C', M'A'. (J.N.)

×**15**. *Remarque relative à la question* ×928 (*Mathesis*, 1895, p. 146) L'énoncé et la solution de cette question paraissent compliqués à plaisir: il suffisait de projeter C en H sur AB et H en I sur BC. Alors,

$$\overline{AD}^3=\overline{BC}^3=\overline{AB}^2\times BI.$$

Il est aisé de généraliser la question. Projetant I en H' sur AB, H' en I' sur BC, I' en H'' sur AB, H'' en I'' sur BC, etc., on voit sans peine que

$$\overline{BC}^3=\overline{AB}^3\times BH',$$
$$\overline{BC}^5=\overline{AB}^4\times BI',$$

ou en général

$$\overline{BC}^{2n}=\overline{AB}^{2n-1}\times BH_{n-1},$$
$$\overline{BC}^{2n+1}=\overline{AB}^{2n}\times BI_{n-1}.$$

On peut déduire de là un moyen graphique :

1° d'élever un nombre donné a à une puissance entière, par une succession de triangles rectangles.

2° d'extraire approximativement la racine d'indice entier d'un nombre donné en employant la courbe auxiliaire dite *radicale*

$$\rho = \cos^n \omega. \qquad \text{(Barbarin.)}$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 681.

(Voir *Mathesis*, (1) X, p. 95).

Soient A', B', C' *les points de rencontre de la circonférence circonscrite à* ABC *avec les médianes* (ou les hauteurs) *de* ABC. *Les droites joignant le point de Tarry* N *aux sommets de* ABC *rencontrent les côtés correspondants de* A'B'C' *sur une droite qui passe par le barycentre* G (ou l'orthocentre) *et par le point de Lemoine* K *de* ABC. (E. Cesaro).

Solution par M. Anderson (Galway). 1° Les coordonnées barycentriques de N étant

$$\frac{1}{b^4 + c^4 - a^2(b^2 + c^2)}, \dots,$$

l'équation de la droite AN est

$$[a^4 + b^4 - c^2(a^2 + b^2)]\, z - [a^4 + c^4 - b^2(a^2 + c^2)]\, y = 0.$$

Celle de B'C' étant

$$a^2 x - (c^2 + a^2)\, y - (b^2 + a^2)\, z = 0,$$

on trouve aisément pour l'équation de la droite joignant le barycentre G au point de rencontre A'' des droites AN, B'C' :

$$(b^2 - a^2)\, x + (c^2 - a^2)\, y + (a^2 - b^2)\, z = 0.$$

On voit aisément que GA'' passe par K et par les points d'intersection des droites BN, CN avec C'A', A'B'.

2° Dans le second cas, l'équation de B'C' est

$$a^2 x\,(b^2 + c^2 - a^2)^2 - y\,(a^2 + c^2 - b^2)\,[b^2(a^2 + c^2) - (a^2 - c^2)^2] - z\,(a^2 + b^2 - c^2)\,[c^2(a^2 + b^2) - (a^2 - b^2)^2] = 0.$$

Celle de la droite joignant H au point de rencontre des droites AN, B'C' est

$$(b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)^2\, x + (c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)^2\, y + (a^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)^2\, z = 0.$$

Elle est vérifiée par les coordonnées de K, et de sa forme symétrique on conclut que la droite passe aussi par les points de rencontre de BN, CN avec C'A', A'B'.

M. Déprez démontre la question 681 par l'analyse et en généralise une partie comme il suit :

On considère un triangle quelconque ABC, *une conique circonscrite* Σ *et un point quelconque* P. *Soient* A', B', C' *les points où les droites* AP, BP, CP *rencontrent une seconde fois la courbe, et soient* A'', B'', C'' *les points où les droites joignant* A, B, C *à un point quelconque* N *de* Σ *coupent respectivement les droites* B'C', C'A', A'B'. *Les points* A'', B'', C'', P *sont en ligne droite.*

Voici une démonstration synthétique de ce théorème. Les couples NA et NA', NB et NB', NC et NC' appartiennent à une involution et trois rayons aboutissent aux sommets du triangle A'B'C'; donc les autres rayons NA', NB', NC' rencontrent les côtés B'C', C'A', A'B' en des points A'', B'', C'' qui sont sur une même droite *n*. Lorsque N parcourt Σ, les droites AN, BN, CN se correspondent dans des faisceaux projectifs; par suite les points A'', B'', C'' engendrent des ponctuelles projectives, et même perspectives puisque A', par exemple, est son propre homologue lorsque N coïncide avec A'. La droite *n* passe donc par un point fixe; trois positions de *n* sont AA', BB', CC' qui correspondent à N placé en A', B', C', donc *n* passe par P.

Réciproquement *si deux triangles* ABC, A'B'C' *sont inscrits à une même conique* Σ *et ont un centre d'homologie* P, *toute droite menée par* P *rencontre les côtés de* A'B'C' *en trois points* A'', B'', C'', *tels que les droites* AA'', BB'', CC'' *concourent en un point* N *de* Σ.

La droite *n* et le point N se correspondent dans un faisceau de centre P et dans une ponctuelle du second ordre qui sont projectifs.

La démonstration de M. Déprez est entièrement analytique. Comment démontre-t-on entièrement par la géométrie projective le théorème de M. Cesàro?

(J. N.)

Question 890(*).

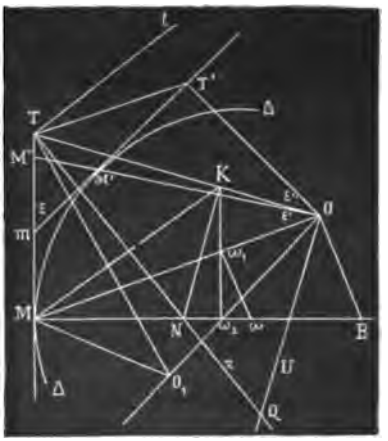
(Voir *Mathesis*, (2), III, p. 264.)

On donne une courbe plane Δ. *En un point quelconque* M *de* Δ *on mène la tangente* MT. O *étant un point fixe, on construit l'angle* MOT *égal à un angle donné. Trouver par des considérations cinématiques ou infinitési-*

(*) Nous avons proposé la même question sous le n° 11992 dans l'*Educational Times*; ce journal en a publié une solution analytique, due à M. Woodall (N° de novembre 1893, p. 485). La même figure sert pour les trois solutions données ci-après. (J. N.)

males la tangente en T *à la courbe décrite par ce point, lorsque* M *parcourt* Δ. (J. Neuberg.)

Solution par M. G. de Longchamps, *professeur au Lycée St-Louis à Paris.* Soient M, M′ deux points infiniment voisins sur Δ ; MT, M′T′, les tangentes correspondantes ; OT, OT′, les droites obtenues en faisant tourner dans le même sens, et du même angle α, les droites OM, OM′. Posons $MOM' = \varepsilon' = TOT'$, et désignons par ε l'angle de contingence $Tm T'$ correspondant à l'arc infiniment petit MM′. Les rapports



$$\frac{MM'}{\sin\varepsilon}, \quad \frac{MM'}{\sin\varepsilon'}$$

ont, respectivement, pour limite le rayon $M\omega = a$ du cercle de courbure de Δ en M, et le diamètre $MB = b$ d'un cercle passant par O et tangent en M à la courbe Δ (B est à l'intersection de la normale Mω avec la perpendiculaire élevée en O sur MO). On a donc

$$\lim \frac{\sin\varepsilon'}{\sin\varepsilon} = \frac{a}{b}. \tag{1}$$

Considérons maintenant les circonférences TT′O, TT′m ; en désignant par u, v leurs diamètres, on a

$$\frac{TT'}{\sin\varepsilon'} = u, \quad \frac{TT'}{\sin\varepsilon} = v,$$

et par suite

$$\frac{\sin\varepsilon'}{\sin\varepsilon} = \frac{v}{u}. \tag{2}$$

Des égalités (1), (2), on tire

$$\frac{a}{b} = \frac{\lim v}{\lim u}. \tag{3}$$

De la relation (3) on déduit facilement la construction de la normale à la courbe (T). Soit Tz cette normale ; elle coupe les perpendiculaires

élevées aux extrémités des droites TM, TO aux points N, Q : TN et TQ seront les limites des diamètres u, v des circonférences TT'O, TT'm. La proportion (3) devient dès lors

$$\frac{M\omega}{MB} = \frac{TN}{TQ}. \qquad (4)$$

On est donc ramené au problème classique : Par un point T, mener une droite Az rencontrant deux droites fixes Mω, OU en des points N, Q tels que le rapport TN : TQ soit donné.

Pour ramener le rapport Mω : MB sur la droite TO, nous menons $\omega\omega_1$ parallèle à BO, $\omega_1 K$ parallèle à MT ; la proportion (4) se change en celle-ci :

$$\frac{TK}{TO} = \frac{TN}{TQ}.$$

On voit qu'il reste à mener KN parallèle à OU, c'est-à-dire perpendiculaire à TO.

Toute la construction revient à tracer les lignes $\omega\omega_1$, $\omega_1 K$, KN respectivement perpendiculaires à MO, Mω, TO.

Solution par M. Meurice. Pour simplifier les constructions, nous faisons tourner toutes les vitesses que nous aurons à considérer, d'un angle droit autour de leurs points d'application.

Soit ω le centre de courbure de Δ au point M. Représentons par Mω la vitesse de M sur sa trajectoire. Si l'on considère le mouvement de M comme résultant d'une rotation de la droite OM autour de O, combinée avec un glissement de M sur OM, la vitesse de circulation de M sera la projection $M\omega_1$ de Mω sur MO.

Supposons de même que le mouvement de T sur sa trajectoire résulte d'une rotation de la droite OT autour de O, combinée avec un déplacement de T sur OT. L'angle MOT étant constant, les droites OM, OT ont même vitesse angulaire ; donc les vitesses de circulation des points M, T sont proportionnelles aux longueurs OM, OT. Par suite, si l'on mène $\omega_1 K$ parallèle à MT, TK représentera la vitesse de circulation de T. Enfin, le mouvement élémentaire de T étant décomposé en une rotation de MT autour de M, combinée avec un glissement de T sur MT, les vitesses de circulation de T autour de M et de M autour de ω correspondent à des vitesses angulaires égales ; donc la première est représentée par TM.

La règle du quadrilatère des vitesses montre que les perpendiculaires en K sur TK et en M sur TM se coupent à l'extrémité N de la vitesse de T; donc TN est la normale à la courbe (T).

Solution par M. C. Servais. La construction est basée sur les propriétés suivantes des coniques :

Si PM *et* PM′ *sont les tangentes menées de* P *à une conique ayant pour foyers* F *et* F′, *les deux angles* MPM′, FPF′ *ont même bissectrice.*

La portion d'une tangente mobile, comprise entre PM *et* PM′, *est vue du foyer* F *sous un angle constant, égal à l'angle* MFP.

Soient M′ et T′ deux points analogues à M et T, M″ le point d'intersection des droites OM′ et MT. La seconde propriété montre qu'il existe une conique inscrite dans le triangle M″TT′ et ayant pour foyer le point O, le point de contact du côté MT étant le point M. A la limite, cette conique a un contact du second ordre avec la courbe Δ au point M. De ces considérations résulte la construction suivante :

On projette le centre de courbure ω de la courbe Δ sur la droite MO au point ω_1; ce point est lui même projeté en ω_2 sur Mω. $O\omega_2$ est l'axe focal de la conique ci-dessus. Le second foyer O_1 s'obtient aisément. La tangente cherchée T*t* fait avec TO le même angle que la droite TO_1 fait avec MT.

M. Absolonne a donné une solution analogue à celle de M. Meurice.

Questions 913 et 914.

(Voir *Mathesis*. (2), IV, p. 56.)

913. *Etant donnée une parabole, si on décrit un cercle qui passe par le foyer et dont le centre est sur la directrice : 1° les deux courbes se coupent en quatre points, qui forment sur chacune d'elles, un groupe équianharmonique; 2° la polaire réciproque de la parabole par rapport au cercle est aussi la polaire réciproque du cercle par rapport à la parabole.* (Retali.)

914. *Chaque cercle passant par le centre d'une hyperbole équilatère et ayant son centre sur elle, coupe cette courbe en quatre points qui forment, sur les deux courbes, un groupe équianharmonique. La polaire réciproque de l'hyperbole par rapport au cercle est aussi la polaire réciproque du cercle par rapport à l'hyperbole.* (Retali.)

Solution par M. Cl. Servais. Les coordonnées x, y d'un point de la parabole

$$y^2 = 2px$$

sont données en fonction d'un paramètre θ par les relations

$$y = 2p\theta, \quad x = 2p\theta^2;$$

le cercle a pour équation

$$y^2 - 2\alpha y + x^2 + px - \frac{3p^2}{4} = 0,$$

α étant l'ordonnée du centre, et les paramètres des points communs au cercle et à la parabole, seront donnés par l'équation

$$4p^2\theta^2 - 4p\alpha\theta + 4p^2\theta^4 + 2p^2\theta^2 - \frac{3p^2}{4} = 0. \qquad (1)$$

Le rapport anharmonique de ces points sur la parabole, est égal à celui de leurs projections sur l'axe des y, faites du point à l'infini de la parabole. L'ordonnée d'une de ces projections est

$$y = 2p\theta$$

θ étant une racine de l'équation (1). Les projections sont donc les points racines de l'équation

$$\frac{y^4}{4p^2} + \frac{3y^2}{2} - 2xy - \frac{3p^2}{4} = 0.$$

L'invariant quadratique I du premier membre étant identiquement nul, les quatre points forment un groupe équianharmonique.

Le rapport anharmonique des quatre points d'intersection sur le cercle, est égal à celui de leurs projections sur l'axe des y, faites du foyer de la parabole. Une projetante a pour équation

$$y = \frac{2p\theta}{2p\theta^2 - \frac{1}{2}p}\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

et l'ordonnée d'une des projections est

$$y = -\frac{2p\theta}{4\theta^2 - 1}, \qquad (2)$$

θ étant une racine de l'équation (1). Ces projections sont donc les points-racines de l'équation :

$$y^4(64\alpha^2 + 16p^2) - 96p^3\alpha y^3 - 24p^4y^2 + 8p^4\alpha y - 3p^6 = 0,$$

que l'on obtient en éliminant θ entre les équations (1) et (2). L'invariant quadratique I du premier membre étant nul, ces points forment un groupe équianharmonique. Le 1° de la question 913 est ainsi établi.

Soient A et B les points de contact des tangentes menées du centre C du cercle à la parabole, D et E leurs projections sur la directrice; les droites AD, BE sont tangentes au cercle. La polaire réciproque de la parabole par rapport au cercle, est une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux droites CA et CB. Les asymptotes étant les polaires des points A et B par rapport au cercle, seront les droites FD et FE, F étant le foyer de la parabole considérée. Cette hyperbole sera tangente au point C à la directrice, car le point C est le pôle de la tangente à l'infini de la parabole. Cette hyperbole est ainsi bien déterminée.

Cherchons la polaire réciproque du cercle par rapport à la parabole. Les pôles des tangentes AD et BE au cercle sont à l'infini respectivement sur les droites CA et CB; car AD et BE sont des diamètres de la parabole. La polaire réciproque du cercle est donc une hyperbole équilatère; les asymptotes seront les polaires des points D et E par rapport à la parabole, c'est-à-dire les droites FE et FD. Cette hyperbole passe d'ailleurs par le point C, qui est le pôle de la tangente AB au cercle. Cette hyperbole est donc celle trouvée plus haut.

La polaire réciproque du cercle par rapport à cette hyperbole équilatère est tangente aux droites CA et CB, qui sont les polaires des points E et D, par rapport à l'hyperbole. De ce que l'axe de la parabole et la droite AB sont deux diamètres conjugués de l'hyperbole (car ils forment avec les asymptotes un groupe harmonique) on déduit que les points A et B sont les pôles par rapport à l'hyperbole, des droites BE et AD; et que le pôle de la droite AB est à l'infini sur une perpendiculaire à ED. La polaire réciproque est donc la parabole donnée.

Le cercle, la parabole et l'hyperbole équilatère sont donc trois courbes, telles que deux d'entre elles sont polaires réciproques, par rapport à la troisième. Les 2° des questions 913 et 914 sont donc démontrés.

Les tangentes communes au cercle et à la parabole sont les polaires par rapport à l'hyperbole des points communs à ces deux courbes : elles forment donc sur chacune de ces courbes un groupe équianharmonique. Les polaires réciproques du cercle et de la parabole par rapport au cercle sont le cercle et l'hyperbole équilatère. Les points communs à ces

deux courbes sont donc les pôles par rapport au cercle des tangentes communes au cercle et à la parabole ; ces points forment donc un groupe équianharmonique (1° de 914). Le cercle et l'hyperbole équilatère étant polaires réciproques par rapport à la parabole, leurs tangentes communes forment sur ces deux courbes un groupe équianharmonique. La parabole et l'hyperbole équilatère jouissent de la même propriété. Donc :

Une hyperbole équilatère ayant pour centre le foyer d'une parabole et tangente à la directrice, rencontre cette courbe en quatre points, formant sur l'hyperbole et sur la parabole un groupe équianharmonique. La polaire réciproque de l'hyperbole par rapport à la parabole, est aussi la polaire réciproque de la parabole par rapport à l'hyperbole.

NOTE. M. BUISSERET a donné des mêmes questions une solution fondée sur les invariants simultanés du cercle et de la parabole (ou de l'hyperbole).

Question 922.

(Voir *Mathesis*, (2), t. IV, p. 80).

Étant données deux cissoïdes droites ayant même point de rebroussements et leurs axes perpendiculaires, si les rayons des cercles directeurs des deux cissoïdes ont un produit constant, le lieu du point d'intersection des deux cissoïdes est une lemniscate de Bernoulli. (BARISIEN.)

Solution par M. DÉPREZ. Prenons pour axes de coordonnées les axes des deux cissoïdes et désignons les diamètres des cercles directeurs des deux cercles par α, β.

Les équations des cissoïdes sont

$$\rho = \alpha \frac{\sin^2 \omega}{\cos \omega}, \quad \rho = \beta \frac{\cos^2 \omega}{\sin \omega}.$$

On a d'ailleurs la relation $\alpha\beta = 2K^2$.

Le lieu du point où les cissoïdes se coupent a pour équation

$$\rho^3 = K^2 \sin 2\omega.$$

Ce lieu est donc une lemniscate de Bernoulli tangente aux axes coordonnés et dont le centre est à l'origine.

REMARQUE. Soient A, B les points diamétralement opposés à l'origine sur les cercles directeurs des deux cissoïdes, P le point commun

aux deux courbes, G le pied de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur AB.

1° Le point P se trouve sur la droite AB. 2° On a la relation

$$\frac{BG}{GA} = \left(\frac{BP}{PA}\right)^2.$$

Solution analogue par MM. Brocard et Verdeyen.

Solution par MM. A. Droz Farny, Hacken, Cristescu, J. Jonesco *et* Vandersteegen. En représentant par a et a' les rayons des cercles générateurs, les équations des cissoïdes seront

$$(x^2+y^2)x = 2ay^2, \quad (x^2+y^2)y = 2a'x^2.$$

On obtiendra le lieu cherché en éliminant entre ces équations et la relation $aa' = r^2$ les variables a et a'.

On obtient ainsi

$$(x^2+y^2)^2 = 4r^2xy.$$

Faisons tourner autour de l'origine, les axes de 45°; l'équation par rapport aux nouveaux axes sera

$$(x^2+y^2)^2 + 2r^2(y^2-x^2) = 0.$$

On reconnaît l'équation de la lemniscate.

Solution par M. H. Mandart. Transformons les deux courbes par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant le point de rebroussement commun des deux courbes.

Si a et a' sont les rayons des cercles directeurs, les deux courbes se transformeront en deux paraboles ayant mêmes axes, et même sommet au pôle. Les équations de ces paraboles sont

$$y^2 = \frac{a}{2}x \quad \text{et} \quad x^2 = \frac{a'}{2}y;$$

on en déduit pour le lieu de leur point d'intersection

$$aa' = \frac{4x^2y^2}{xy} = 4xy = \text{constante}.$$

Le lieu de ce point est donc une hyperbole équilatère ayant le pôle pour centre.

Or, cette dernière courbe a pour inverse la lemniscate de Bernoulli; donc, etc.

MM. Retali et Gillet ont résolu la même question.

×Question 941.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 128.)

Dans tout triangle ABC

$$abc + (a-b)(b-c)(c-a) = 4Rr(a\cos C + b\cos A + c\cos B),$$
$$abc - (a-b)(b-c)(c-a) = 4Rr(a\cos B + b\cos C + c\cos A).$$

(MANDART.)

Solution par M. LEMOINE. Les seconds membres peuvent s'écrire respectivement

$$\frac{abc}{p}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2b} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right),$$
$$\frac{abc}{p}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2a} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2b} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right);$$

puis

$$\frac{abc}{2p}\left(a+b+c+\frac{a^2-c^2}{b} + \frac{b^2-a^2}{c} + \frac{c^2-b^2}{a}\right),$$
$$\frac{abc}{2p}\left(a+b+c+\frac{b^2-c^2}{a} + \frac{c^2-a^2}{b} + \frac{a^2-b^2}{c}\right);$$

et enfin

$$abc \pm \frac{1}{2pabc}[(a^2-c^2)ac + (b^2-a^2)ab + (c^2-b^2)bc].$$

La quantité entre crochets se ramène à

$$(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a);$$

donc, etc.

Si l'on applique la transformation continue en A, les formules de M. Mandart donnent

$$abc + (a+b)(b-c)(c+a) = 4Rr_a(a\cos C + b\cos A - c\cos B),$$
$$abc - (a+b)(b-c)(c+a) = 4Rr_a(a\cos B - b\cos C + c\cos A),$$

relations qu'il n'eût pas été commode de prévoir, semble-t-il.

Solution analogue par MM. POORT (Groningue), J. JONESCO, DELAHAYE, DROZ-FARNY et STRYMEERSCH. MM. DÉPREZ et CRISTESCU démontrent la relation donnée en remplaçant a, b, c par $2R\sin A$, $2R\sin B$, $2R\sin C$.

Solution par M. Barisien. En ajoutant et retranchant les formules proposées, on trouve

$$abc = 2Rr\,[(a+b)\cos C + (b+c)\cos A + (c+a)\cos B], \quad (1)$$
$$(a-b)(b-c)(c-a) = 2Rr[(a-b)\cos C + (b-c)\cos A + (c-a)\cos B]. \quad (2)$$

Pour démontrer la relation (1), nous ajoutons les égalités

$$a\cos C + c\cos A = b, \quad b\cos C + c\cos B = a, \quad b\cos A + a\cos B = c;$$

ce qui donne

$$\Sigma(a+b)\cos C = a+b+c = 2p = \frac{2S}{r} = \frac{abc}{2Rr}.$$

Nous établissons l'équation (2) en substituant les valeurs

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{2a(b^2+c^2-a^2)}{4SR} = \frac{2a(b^2+c^2-a^2)}{8prR}; \text{ etc.;}$$

le second membre de (2) devient

$$\frac{1}{2p}\Sigma c(a-b)(a^2+b^2-c^2), \text{ ou } \frac{1}{2p}(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

QUESTIONS D'EXAMEN.

698. Couper un triangle ABC et la circonférence circonscrite par une transversale parallèle au côté BC, telle que les segments interceptés par l'angle BAC et par la circonférence soient dans un rapport donné.

A résoudre par le calcul.

699. D'un point D de l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle ABC on abaisse les perpendiculaires DE, DF sur les côtés AB, AC de l'angle droit. Démontrer que

$$DC \cdot DB = EA \cdot EB + FA \cdot FC.$$

Corollaire. Si les droites DE, DF et la perpendiculaire en D sur CB rencontrent les circonférences décrites sur AB, AC, BC comme diamètres respectivement en I, H, G, on a

$$\overline{DG}^2 = \overline{EI}^2 + \overline{FH}^2. \qquad \text{(Maurice Würth.)}$$

700. Chercher parmi les triangles rectangles dont les côtés sont mesurés par des nombres entiers, ceux dans lesquels le double de la surface et le triple du périmètre sont mesurés par le même nombre.

Les côtés d'un triangle rectangle *rationnel* étant exprimés par x^2+y^2, x^2-y^2, $2xy$, le problème donne

$$2xy(x^2-y^2)=3(x^2+y^2+x^2-y^2+2xy)$$

ou $y(x-y)=3$; d'où $y=1$, $x-y=3$, ou $y=3$, $x-y=1$, et les côtés du triangle cherché sont

25, 24, 7 ou 17, 8, 15.

701. Dans un triangle ABC, on mène les hauteurs AA′, BB′, CC′, et l'on joint deux à deux les points A′, B′, C′. On abaisse les perpendiculaires BD, CE sur B′C′. Démontrer que

$$DC'=B'E,\quad DE=A'B'+A'C'.\quad (\textit{Journal de Vuibert})$$

Chercher les expressions trigonométriques de DC′, B′E,.., ou observer que D, E sont les points de contact de B′C′ avec deux cercles exinscrits au triangle A′B′C′ et ayant leurs centres en B, C.

QUESTIONS PROPOSÉES.

×**1039.** Construire un pseudocarré, connaissant un côté et les deux angles adjacents. (J. NEUBERG.)

1040. D'un point quelconque M d'une normale fixe à une parabole (P), on abaisse les deux autres normales. 1° La droite Δ qui joint les pieds de ces deux normales est parallèle à une direction fixe; 2° le lieu de la projection du point M sur la droite Δ est une ligne droite.

(E. N. BARISIEN.)

×**1041.** Démontrer que l'équation

$$2x=\frac{(x-a)(x-b)}{x-c}+\frac{(x-b)(x-c)}{x-a}+\frac{(x-c)(x-a)}{x-b}$$

a pour racines

$$\tfrac{1}{2}[a+b+c\pm\sqrt{a^2-(b-c)^2}\pm\sqrt{b^2-(a-c)^2}\pm\sqrt{c^2-(a-b)^2}],$$

les trois radicaux ayant le signe +, ou deux d'entre eux le signe — et le troisième le signe +. (J. NEUBERG.)

1042. Quand deux paraboles sont inscrites dans un triangle, par les six points de contact on peut faire passer une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes des deux paraboles. (CHASLES.)

Rectification. Question 1015, lire 8^2 au lieu de $4\ 8^2$.

PROPRIÉTÉS DES CERCLES DE CHASLES;

par M. E. N. BARISIEN.

(Suite et fin, voir *Mathesis*, (2), V, pp. 129 et 156.)

47. Appelons V et V′ les cercles qui ont pour centres les points N et N′, et qui passent par M.

Deux des tangentes communes à E et V sont parallèles à ON; deux des tangentes communes à E et V′ sont parallèles à ON′.

48. Le cercle V rencontre l'ellipse E en deux points imaginaires conjugués P et Q; la droite réelle PQ enveloppe l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2.$$

Le cercle V′ coupe E en deux points P′ et Q′; la droite P′Q′ enveloppe l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2.$$

49. La tangente en M à E rencontre les droites PQ et P′Q′ sur les courbes

$$\frac{a^4}{x^2}+\frac{b^4}{y^2}=(a\mp b)^2.$$

50. L'enveloppe des cercles V ou V′ se compose de l'ellipse E et d'une courbe unicursale ayant pour équations paramétriques

$$x=3a\cos\varphi-2(a\mp b)\cos^3\varphi,\quad y=3b\sin\varphi\pm 2(a\mp b)\sin^3\varphi,$$

et pour aire

$$U=3\pi(a\pm b)^2\mp 3\pi ab.$$

Cette aire est donc égale à trois fois celle du cercle Σ ou Σ′, diminuée ou augmentée de trois fois l'aire de E.

51. Les droites MP′ et MQ′ ont pour coefficient angulaire $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$; les droites imaginaires MP et MQ, $\pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$.

Les questions 50 et 51 m'avaient été proposées par M. E. Lemoine.

52. Le point de rencontre des droites PQ et ON, et celui des droites P′Q′ et ON′ décrivent les quartiques

$$(ay^2\mp bx^2)^2=(x^2+y^2)\frac{a^2b^2(a\pm b)^2}{(a\mp b)^2}.$$

La seconde courbe a pour aire

$$U = \frac{\pi \sqrt{ab}(a-b)^2}{2(a+b)}.$$

53. Le lieu du point de rencontre de la droite ON' avec les droites MP' et MQ' se compose des deux quartiques

$$(y\sqrt{a} \mp x\sqrt{b})^2 (x^2+y^2) = ab(y\sqrt{b} \pm x\sqrt{a})^2.$$

54. Les centres de gravité des triangles MPQ et MP'Q' décrivent les ellipses

$$\frac{x^2}{a^2(3a \pm b)^2} + \frac{y^2}{b^2(3b \pm a)^2} = \frac{1}{9(a \mp b)^2}.$$

Les droites d'Euler de ces triangles sont respectivement normales aux mêmes ellipses.

55. Les orthocentres des mêmes triangles décrivent les ellipses

$$\frac{x}{(a^2+2b^2 \pm ab)^2} + \frac{y}{(2a^2+b^2 \pm ab)^2} = \frac{1}{(a \mp b)^2}.$$

56. Les centres de gravité des triangles OPQ et OP'Q' se meuvent sur les ellipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{4}{9}\left(\frac{a \pm b}{a \mp b}\right)^2.$$

57. Les centres de gravité des triangles NPQ et N'P'Q' parcourent les ellipses

$$\frac{x^2}{(3a \mp b)^2} + \frac{y^2}{(3b \mp a)^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{a \pm b}{a \mp b}\right)^2.$$

58. Appelons Δ la droite qui joint les projections de N sur les axes de E, et Δ' celle qui unit les projections de N'.

Δ rencontre le cercle V au point M et en un second point qui est celui où V touche son enveloppe. Δ' rencontre le cercle V' au point M et au point de contact de V' avec son enveloppe.

59. La droite Δ rencontre E en M et en un second point p ; Δ' rencontre E en M et en un second point q. Le cercle circonscrit au triangle Mpq touche en M l'ellipse E et son centre coïncide avec la projection de O sur la normale MN.

60. La différence des puissances de O par rapport aux cercles V et

V′ est égale à $4ab$. La somme des mêmes puissances est égale à $\lambda - (a^2 + b^2)$, λ étant la puissance de O par rapport au cercle de centre M et de rayon MN.

61. Les polaires de O par rapport aux cercles V et V′, la perpendiculaire en M à OM, et la parallèle à la tangente en M menée par le symétrique de O par rapport à cette tangente concourent en un même point.

62. La polaire de O par rapport au cercle de centre M et de rayon MN passe par le centre de courbure γ relatif au point M.

Cette polaire rencontre la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en M au point i; si l'on prolonge γi de $\gamma i' = 3\gamma i$, la polaire touche son enveloppe au point i'.

63. Le cercle V passe par les points f et f', projections des foyers F et F′ sur la tangente menée en M′ au cercle principal.

64. La polaire de O par rapport au cercle V (ou V′) touche son enveloppe en un point de la parallèle à ON menée par N′ (ou de la parallèle à ON′ menée par N).

65. Les polaires de O par rapport aux cercles V et V′ enveloppent des courbes unicursales ayant pour aire

$$U = 2\pi ab \mp \frac{\pi}{8}(a \mp b)^2 \pm \frac{\pi a^2 b^2}{(a \pm b)^2}.$$

66. La polaire de O par rapport au cercle de centre M et de rayon MN enveloppe une courbe unicursale dont l'aire est égale à quatre fois celle de la développée de E.

67. Les polaires de O par rapport aux cercles V et V′ rencontrent l'ellipse E en quatre points situés sur une même circonférence. Le centre de cette circonférence décrit une courbe unicursale ayant pour aire

$$U = \pi ab - 2\pi (a - b)^2.$$

68. On considère le cercle de centre M et de rayon MN, et le cercle analogue correspondant à l'extrémité m du diamètre Om conjugué à OM.

La somme des puissances des foyers F et F′ par rapport à ces deux cercles est constante et égale à $4c^2$.

69. Le lieu des points de contact du cercle V avec les tangentes parallèles à ON (tangentes qui sont communes à V et E) est une courbe

du 8e ordre, composée de deux ovales dont les aires U_1 et U_2 ont pour expression commune

$$U_1 = U_2 = \pi (a+b)^2 + \frac{\pi}{2}(a^2+b^2).$$

Le lieu des points de contact du cercle V′ avec les tangentes parallèles à ON′ (droites qui touchent également E) est une courbe du 8e ordre, composée de deux ovales dont les aires U_3 et U_4 ont pour expression commune

$$U_3 = U_4 = \pi (a-b)^2 + \frac{\pi}{2}(a^2+b^2).$$

On en conclut que la somme des aires des quatre ovales est égale à 12 fois l'aire de la podaire du centre de l'ellipse.

---

70. Si on considère une ellipse E et deux tangentes parallèles, il existe six cercles tangents à la fois à E et aux deux tangentes. Si φ est l'inclinaison des tangentes sur le grand axe, les coordonnées des centres de ces cercles sont

$$(1)\ \begin{cases} x = \pm (a+b)\cos\varphi, \\ y = \pm (a+b)\sin\varphi; \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x = \pm (a-b)\cos\varphi, \\ y = \pm (a-b)\sin\varphi, \end{cases}$$

$$(3)\ \begin{cases} x = \pm \dfrac{c^2 \sin\varphi \cos^2\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}, \\ y = \pm \dfrac{c^2 \sin^2\varphi \cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}. \end{cases}$$

Lorsque les tangentes parallèles varient, le lieu des centres (1) est le cercle Σ; celui des centres (2), le cercle Σ'; celui des centres (3), la sextique

$$(a^2y^2 + b^2x^2)(x^2+y^2) = c^4x^2y^2; \qquad (4)$$

qui est aussi la podaire de O par rapport à la développée de E. L'aire de cette podaire est égale à $\frac{\pi}{2}(a-b)^2$.

Les cercles (3), que nous désignerons par (K), touchent E en un point P et touchent la tangente menée à E au point P′ diamétralement opposé à P.

71. Un cercle (K) rencontre E en deux autres points Q, Q'. Le lieu des projections de O sur la droite QQ' est la courbe du 8e degré

$$(x^2+y^2)^4=(x^2-y^2)^2(a^2x^2+b^2y^2),$$

dont l'aire est la moitié de celle de la podaire de O par rapport à E.

72. Le milieu de la corde QQ' décrit la sextique

$$(b^2x^2+a^2y^2)(b^4x^2+a^4y^2)^2=a^2b^2(b^4x^2-a^4y^2)^2.$$

73. La droite QQ' rencontre la tangente menée en P à l'ellipse sur la courbe

$$x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)^2=a^2y^{\frac{2}{3}}+b^2x^{\frac{2}{3}};$$

elle rencontre la tangente menée en P' à l'ellipse sur la courbe

$$(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2,$$

c'est-à-dire sur la podaire du centre de E.

74. Le lieu du pôle de la corde QQ' par rapport à l'ellipse E est la sextique

$$(b^2x^2+a^2y^2)(b^4x^2-a^4y^2)^2=a^2b^2(b^4x^2+a^2y^2)^2.$$

75. Les droites PQ et PQ' enveloppent les hypocycloïdes

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=(a\pm b)^{\frac{2}{3}}.$$

Les questions 72-75 nous ont été proposées par M. Lemoine.

76. Les mêmes droites PQ, PQ' rencontrent la ligne des centres de (E) et de (K) sur les deux sextiques

$$(b^2x^2+a^2y^2)(bx^2\pm ay^2)^2=(a\mp b)^2a^2b^2x^2y^2.$$

La droite QQ' rencontre cette ligne des centres sur la courbe

$$4x^2y^2(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2(b^2x^2+a^2y^2).$$

77. Du centre du cercle (K) on abaisse sur l'ellipse E les trois normales autres que EP. Le centre de gravité du triangle formé par les pieds de ces normales, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre décrivent les courbes

$$9(b^2x^2+a^2y^2)(a^4y^2+b^4x^2)^2=a^2b^2(a^4y^2-b^4x^2)^2,$$

$$(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}})^2(a^2x^{\frac{2}{3}}+b^2y^{\frac{2}{3}})=\tfrac{1}{4}c^4,$$

$$(b^2y^2+a^2x^2)(x^2+y^2)^2=(a^2y^2-b^2x^2)^2.$$

Les deux dernières ont respectivement pour aire

$$\frac{3\pi(a-b)^2}{8}, \quad \frac{\pi}{2}(a^2+b^2) - 2\pi(a-b)^2 + \frac{\pi c^4}{ab} - \frac{2\pi a^2 b^2}{(a+b)^2}.$$

---

78. Les points N et N′ sont les foyers d'une ellipse ε tangente au petit axe en O, et les foyers d'une hyperbole η tangente au grand axe en O.

Le grand axe de ε est égal à $2a$; le petit axe, égal à la projection de FF′ sur ON. L'axe transverse de η est égal à $2b$.

79. Le lieu des sommets de l'axe focal de ε et de η se compose de deux courbes parallèles à l'ellipse E, l'une à la distance a, l'autre à la distance b.

Les sommets du petit axe de ε se meuvent sur la sextique

$$a^2y^2(x^2+y^2-b^2)^2 + b^2x^2(x^2+y^2+b^2-2a^2)^2 = 4c^4x^2y^2.$$

80. Le cercle secondaire de ε enveloppe la quartique

$$(x^2+y^2+b^2)^2 = 4a^2x^2 + 4b^2y^2.$$

81. La directrice de ε correspondant au foyer N ou N′ enveloppe l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2(a \pm b)^2.$$

82. La directrice de η correspondant au foyer N ou N′ enveloppe l'ellipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = b^2(a \pm b)^2.$$

83. Le pied d'une directrice de ε décrit une courbe ayant pour aire

$$\pi ab + \frac{\pi a}{b}(a^2+b^2) \pm \frac{\pi a^2}{2b^2}(a^2+b^2).$$

84. Le pied d'une directrice de η décrit une courbe ayant pour aire

$$\pi ab + \pi\frac{b}{a}(a^2+b^2) \pm \frac{\pi b^2}{2a^2}(a^2+b^2).$$

85. La puissance de O par rapport au cercle secondaire de ε est égale à b^2.

---

86. La parabole W qui touche NF en F et NF′ en F′, a son foyer en M; son axe coïncide avec la droite Δ' (p. 242, n° 58).

La parabole W′ qui touche N′F en F et N′F′ en F′, a son foyer en M; son axe coïncide avec Δ.

Les paraboles W et W′ se coupent en deux points autres que F, F′ ; ces points qui sont imaginaires, sont situés sur la droite $x\cos\varphi = a$.

87. Les paramètres des paraboles W et W′ sont proportionnels à $(a - b)$ et $(a + b)$.

88. Les directrices de ces courbes ont pour enveloppe le cercle principal de E.

89. Les sommets de W et W′ se meuvent sur deux courbes unicursales ayant pour aire

$$\pi b^2 + \frac{3\pi(a \mp b)(5a + 11b)}{32}.$$

Ces lieux coïncident avec les enveloppes des tangentes au sommet de chacune des paraboles W et W′.

90. Le pied de la directrice de W ou W′ décrit une courbe unicursale ayant pour aire

$$\pi a^2 + \frac{\pi}{8}(a \mp b)^2.$$

91. Le point de rebroussement de la développée de W ou W′ décrit une courbe unicursale dont l'aire a pour expression

$$\pi b^2 - \frac{3\pi}{8}(a \mp b)^2.$$

---

92. Soient OM, Om deux demi-diamètres conjugués de l'ellipse E. On prend sur la normale en M deux points N et N′, et sur la normale en m deux points n et n', tels que

$$MN = MN' = Om, \quad mn = mn' = OM.$$

1° La somme des carrés des six normales abaissées des points N et n sur l'ellipse E, autres que NM et nm, est constante et a pour expression

$$3(3a^2 + 3b^2 + 4ab).$$

2° La somme des carrés des six normales issues de N′ et n', autres que N′M et $n'm'$, a pour expression

$$3(3a^2 + 3b^2 - 4ab).$$

3° La somme des carrés des seize normales abaissées des quatre points N, N′, n, n' sur E a pour expression

$$20(a^2 + b^2).$$

93. Les droites Nn et $N'n'$ sont également inclinées sur les axes de E. Les droites Nn' et $N'n$ sont perpendiculaires entre elles, et on a

$$Nn' = N'n = Mm\sqrt{2}.$$

94. Les deux droites Nn', $N'n$ et la parallèle à Mm par O concourent au même point.

95. $$\overline{Nn}^2 + \overline{N'n'}^2 = 4(a^2 + b^2) = \overline{NN'}^2 + \overline{nn'}^2.$$

96. Soient K et K' les milieux de Nn et $N'n'$. Les droites OK et OK' sont également inclinées sur les axes de E, et on a

$$\overline{OK}^2 + \overline{OK'}^2 = a^2 + b^2.$$

97. Les droites Nn et $N'n'$ se coupent sur la Kreuzcurve

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 2;$$

les droites Nn' et $N'n$, sur la sextique

$$(x^2 + y^2)^2 (b^2x^2 + a^2y^2) = 2c^4x^2y^2,$$

dont l'aire égale celle du cercle Σ'.

98. Chacune des droites Nn' et $N'n$ enveloppe une courbe fermée dont l'aire est égale à celle de la développée de E.

99. Le lieu du point d'intersection des droites Nn et Mm ou des droites $N'n'$ et Mm est la Kreuzcurve

$$\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} = 2(a \mp b)^2.$$

100. Des points N et n on mène les tangentes NP, NP', np et np' à l'ellipse. La somme des carrés des aires des quadrilatères OPNP' et $Opnp'$, lorsque M se déplace sur E, est constante et égale à

$$a^4 + b^4 + 2ab(a^2 + b^2).$$

Les notations employées maintenant sont spéciales aux propriétés qui vont suivre.

101. Il existe une infinité de triangles (T) qui sont inscrits dans le cercle Σ et circonscrits à l'ellipse E. Les hauteurs d'un tel triangle sont normales à l'ellipse E (voir question 937, *Mathesis* (2), IV, p. 127).

De même, il existe une infinité de triangles inscrits dans le cercle Σ' et circonscrits à E. Mais ces triangles sont imaginaires.

102. Le centre de gravité de (T) décrit une courbe dont l'aire est le tiers de celle du cercle Σ'.

L'orthocentre du triangle (T) décrit une courbe dont l'aire est égale à trois fois celle du cercle Σ'.

103. Le lieu des sommets des triangles circonscrits à l'ellipse E et dont les hauteurs sont normales à l'ellipse est le cercle Σ. (LEMOINE.)

(Le lieu des sommets des triangles circonscrits à E et dont les hauteurs sont normales à E aux points de contact des côtés opposés est une sextique.)

104. Le triangle (T) d'aire maxima ou minima a un de ses côtés parallèle à un axe de E.

105. La somme des carrés des côtés du triangle (T) est constante et a pour valeur $4(2a^2 + 2b^2 + 5ab)$.

106. Soient α, β, γ les angles du triangle (T); on a

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2 + b^2 + ab}{(a+b)^2},$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{2a^2 + 2b^2 + 5ab}{(a+b)^2}.$$

107. $$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{ab}{2(a+b)^2}.$$ (E. LEMOINE.)

108. La somme des carrés des distances de O aux trois côtés du triangle (T) est constante et a pour valeur $a^2 + ab + b^2$.

109. Soient α, β, γ les sommets de (T); P, Q, R les points de contact des côtés de (T) avec l'ellipse E; p, q, r les points où les hauteurs de (T) rencontrent normalement l'ellipse E.

1° Les triangles PQR, pqr ont leurs cotés égaux et parallèles; 2° $\beta\gamma \cdot \alpha p = 2(\text{aire quadrilatère OQAR})$; 3° $\dfrac{\text{aire } pqr}{\text{aire PQR}} = \dfrac{ab}{(a+b)^2}$.

110. Soit Z le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{ab}{a+b}$.

D'un point quelconque M de l'ellipse E, on mène deux tangentes au cercle Z qui rencontrent E en deux autres points p et q. La tangente à E, parallèle à la tangente en M, rencontre le cercle Σ en β et γ. De β et γ on mène les secondes tangentes à E qui se rencontrent en α.

1° Le point α est sur le cercle Σ; 2° la droite $\beta\gamma$ est tangente au cercle Z; 3° La droite αM est normale à E.

Voici deux questions qu'il serait intéressant de résoudre, et que nous n'avons pu mener à bonne fin; la seconde m'a été proposée par M. Lemoine.

1. Le cercle V, de centre N et de rayon NM a avec l'ellipse deux tangentes communes.

Trouver la courbe lieu du point de rencontre de ces tangentes avec la tangente en M, ou au moins trouver le degré de cette courbe et déterminer son aire.

2. Le cercle (K) qui touche E en un point P et qui touche la tangente menée à E au point P′ diamétralement opposé à P, rencontre l'ellipse en deux autres points Q et Q′.

Trouver : 1° l'enveloppe du cercle (K) ; 2° l'enveloppe de la droite QQ′, ou tout au moins son degré et son aire; 3° le lieu du point de rencontre des tangentes en P et P′ avec les autres tangentes communes au cercle (K) et à l'ellipse E.

CONDITIONS POUR QU'UN SYSTÈME DE TROIS AXES SOIT TRIRECTANGLE;

par M. F. Daugr, professeur à l'Université de Gand.

(Voir *Mathesis*, 1894, IV, p. 85-87.)

Les formules qui servent à passer d'un système d'axes rectilignes à un autre dans l'espace étant

$$(1)\quad X = lx + l'y + l''z,\quad Y = mx + m'y + m''z,\quad Z = nx + n'y + n''z,$$

les coefficients de projection l, m, n, l', ..., n'' sont liés par les six équations de condition (*)

$$(2)\quad \begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 + 2Amn + 2Bnl + 2Clm = 1, \\ l'^2 + m'^2 + n'^2 + 2Am'n' + 2Bn'l' + 2Cl'm' = 1, \\ l''^2 + m''^2 + n''^2 + 2Am''n'' + 2Bn''l'' + Cl''m'' = 1, \\ l'l'' + m'm'' + n'n'' + A(m'n'' + n'm'') + B(n'l'' + l'n'') + C(l'm'' + m'l'') = a, \\ l''l + m''m + n''n + A(m''n + n''m) + B(n''l + l''n) + C(l''m + m''l) = b, \\ ll' + mm' + nn' + A(mn' + nm') + B(nl' + ln') + C(lm' + ml') = c, \end{cases}$$

(*) Voir : *Mathesis*, avril 1894.

dans lesquelles on a posé

$$A = \cos YOZ, \quad B = \cos ZOX, \quad C = \cos XOY,$$
$$a = \cos yOz, \quad b = \cos zOx, \quad c = \cos xOy.$$

Quand les deux systèmes d'axes sont rectangulaires, ces six cosinus sont nuls et on obtient les conditions suivantes, que donnent tous les traités, en partant de l'hypothèse où l, m, n,..., n'' sont des cosinus directeurs :

$$(3)\begin{cases} l^2+m^2+n^2=1, \quad l'^2+m'^2+n'^2=1, \quad l''^2+m''^2+n''^2=1, \\ l'l''+m'm''+n'n''=0, \; l''l+m''m+n''n=0, \; ll'+mm'+nn'=0. \end{cases}$$

L'auteur d'une lettre signée V^ve F. Prime a fait remarquer à M. le professeur Mansion que par notre manière d'établir les relations (3) nous démontrons bien qu'elles sont nécessaires pour que les deux systèmes soient trirectangles, mais non qu'elles sont suffisantes, démonstration que M. Appell a faite dans le cas où l, m,..., n'' sont des cosinus directeurs (*). Il en est effectivement ainsi ; car en ayant égard aux conditions (3) on tire des équations (2)

$$Amn + Bnl + Clm = 0, \quad Am'n' + Bn'l' + Cl'm' = 0,$$
$$Am''n'' + Bn''l'' + Cl''m'' = 0;$$

et pour pouvoir affirmer que les axes OX, OY, OZ sont rectangulaires, c'est-à-dire qu'on a nécessairement $A = B = C = 0$, il faudrait prouver que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} mn & nl & lm \\ m'n' & n'l' & l'm' \\ m''n'' & n''l'' & l''m'' \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

Nous ferons observer que la démonstration dont il s'agit n'était pas le but de notre précédente notice, qui n'avait pour objet que d'établir les conditions nécessaires et suffisantes pour que les axes Ox, Oy, Oz soient rectangulaires, les axes OX, OY, OZ étant quelconques ; or, dans ce cas, A, B, C ayant des valeurs données, il faut et il suffit que l'on fasse $a = b = c = 0$.

Mais nous donnons dans ce qui suit une solution complète de la

(*) Voir : *Nouvelles Annales de Mathématiques*, février 1894, pp. 41-43.

question; nous démontrons : 1° que, loin d'être différent de zéro, le déterminant Δ est toujours nul, et qu'en conséquence il existe une infinité de systèmes d'axes obliques pour lesquels les équations (3) sont vérifiées; 2° que les directions de ces axes obliques se confondent avec celles des systèmes de trois diamètres conjugués égaux d'un même ellipsoïde; et 3° que quand on substitue aux coefficients de projection $l, m, n, l', \ldots, n''$ les cosinus des angles que les axes Ox, Oy, Oz font respectivement avec OX, OY, OZ, cosinus que nous représenterons par $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \ldots, \gamma''$, on obtient les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux systèmes soient trirectangles.

Posons, en faisant usage des notations habituelles,

$$d = \begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} L & M & N \\ L' & M' & N' \\ L'' & M'' & N'' \end{vmatrix},$$

D désignant le déterminant du système adjoint. On verra immédiatement qu'à cause des relations (3) on a $d^2 = 1$, d'où $d = \pm 1$.

On peut maintenant résoudre de deux manières les équations (1) par rapport à x, y, z. Si on les multiplie respectivement par l, m, n; puis par l', m', n'; enfin par l'', m'', n'' et que l'on additionne chaque fois les trois équations résultantes en ayant égard aux équations (3), on trouve

$$x = lX + mY + nZ, \quad y = l'X + m'Y + n'Z, \quad z = l''X + m''Y + n''Z.$$

Opérons ensuite de la même manière au moyen de L, M, N; L', M', N'; L'', M'', N''; il vient, à cause de la condition $d = \pm 1$,

$$\pm x = LX + MY + NZ, \quad \pm y = L'X + M'Y + N'Z,$$
$$\pm z = L''X + M''Y + N''Z.$$

De là on conclut les égalités

$$\pm l = L = m'n'' - n'm'', \quad \pm l' = L' = m''n - n''m, \quad \ldots,$$
$$\pm n'' = N'' = lm' - ml'.$$

Le développement du déterminant Δ peut donc se mettre sous la forme

$$-\Delta = mnl'l''L + nlm'm''M + lmn'n''N = \pm lmn(l'l'' + m'm'' + n'n'') = 0.$$

Il résulte de là que les équations

$$Amn + Bnl + Clm = 0, \quad Am'n' + Bn'l' + Cl'm' = 0,$$
$$Am''n'' + Bn''l'' + Cl''m'' = 0$$

sont vérifiées par une infinité de systèmes de valeurs des cosinus A, B, C et que l'on a, en désignant par ρ une indéterminée

$$\frac{A}{ll'l''} = \frac{B}{mm'm''} = \frac{C}{nn'n''} = \rho.$$

En substituant ces valeurs de A, B, C dans les trois dernières équations (2) on trouve aussi, après quelques réductions,

$$\frac{a}{lmn} = \frac{b}{l'm'n'} = \frac{c}{l''m''n''} = \rho.$$

On voit donc que les équations (3) peuvent toujours être vérifiées d'une infinité de manières pour deux systèmes d'axes obliques. Examinons maintenant comment ces axes doivent être choisis.

Soient p, q, r les demi-axes de symétrie d'un ellipsoïde. On sait que cette surface a une infinité de systèmes de trois diamètres conjugués égaux et que le carré de la moitié de chacun de ces diamètres est

$$P^2 = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{3}.$$

Si on prend à volonté trois de ces diamètres conjugués pour les axes OX, OY, OZ, l'équation de la surface devient

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = P^2. \tag{4}$$

Prenons trois autres diamètres conjugués égaux pour les axes Ox, Oy, Oz; nous représenterons ainsi la surface par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = P^2. \tag{5}$$

Donc, si dans l'équation (4) on fait la substitution (1), on doit trouver l'équation (5), ce qui exige que les relations (3) soient vérifiées; et, réciproquement, quand ces relations existent, l'équation (5) est la transformée de (4), et les axes Ox, Oy, Oz sont trois diamètres conjugués égaux d'un ellipsoïde représenté par (4), et qui peut être rapporté à trois axes quelconques OX, OY, OZ. On a donc le théorème suivant :

Les équations (3) *expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que deux systèmes d'axes rectilignes soient dirigés suivant deux systèmes de diamètres conjugués égaux d'un même ellipsoïde.*

Il résulte encore de là que quand l'ellipsoïde est une sphère, les deux systèmes d'axes sont trirectangles; mais l'équation (4) représente une sphère dès que le système OX, OY, OZ est rectangulaire; or, la condi-

tion nécessaire et suffisante pour que OX soit perpendiculaire au plan YOZ est $l = \alpha$; de même, $m = \beta$ est la condition nécessaire et suffisante pour que OY soit perpendiculaire à ZOX ; dès lors le système OX, OY, OZ est trirectangle et l'on a aussi $n = \gamma$, $l' = \alpha'$, $m' = \beta'$, .. , $n'' = \gamma''$; les équations (3) deviennent ainsi

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \quad \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1,$$
$$\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, \quad \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0,$$

et expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux systèmes d'axes soient trirectangles.

On démontrera encore sans peine que les équations (3) entraînent comme conséquences les suivantes, aussi bien quand il s'agit de deux systèmes d'axes obliques, que quand ce sont deux systèmes d'axes rectangulaires :

$$l^2 + l'^2 + l''^2 = 1, \quad m^2 + m'^2 + m''^2 = 1, \quad n^2 + n'^2 + n''^2 = 1,$$
$$mn + m'n' + m''n'' = 0, \quad nl + n'l' + n''l'' = 0, \quad lm + l'm' + l''m'' = 0.$$

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

Bulletin de Mathématiques élémentaires, publié sous la direction de B. Niewenglowski, docteur ès Sciences, inspecteur de l'Académie. Rédacteur en chef : L. Gérard, docteur ès Sciences, professeur au lycée Ampère (à Lyon). Paris, Société d'éditions scientifiques, 4, rue Antoine-Dubois. Prix : 5 francs pour la France, 6 francs pour l'Etranger. (Deux numéros de 16 pages in-8° par mois, du 1er octobre au 15 juillet.)

Le nouveau Bulletin s'adresse à ceux qu'intéressent les éléments des sciences mathématiques et physiques, et particulièrement aux professeurs et aux élèves de l'enseignement secondaire (classique ou moderne), de l'enseignement primaire supérieure, de l'enseignement secondaire des jeunes filles.

Euclidis Opera omnia. Vol. VII. **Euclidis optica.** Opticorum recensio Theonis, Catoptrica cum scoliis antiquis edidit Heiberg. Lipsiae, in aedibus Teubneri, 1895 (Un vol. in-12 de LV-362 p.). Prix : 5 marcs.

Sommaire. Préface et prolégomènes (pp. I-LV). — Optique d'Euclide avec une ancienne traduction latine, l'une et l'autre publiées pour la première fois, et des scolies en grec seulement (pp. 1-141). — Recension de l'optique due à Théon, texte grec et latin et scolies en grec seulement (pp. 143-284). — Catoptrique, attribuée à tort à Euclide probablement, en grec et en latin, avec des scolies en grec seulement (pp. 285-362).

Le nom de l'éditeur, M. Heiberg, à qui l'on doit la publication de nouvelles éditions gréco-latines d'Archimède, d'Apollonius et des *Éléments* d'Euclide, suffit pour garantir la valeur du présent volume, au point de vue de la critique du texte.

Logica matematica di C. Burali-Forti, Professore nella R. Accademia Militare di Torino. Milano, Hoepli, 1894 (Cartonné, VI-158 p. in-12). Prix : fr. 1-50.

Étude des formes de raisonnement propres aux sciences déductives et en particulier aux sciences mathématiques et des symboles qui peuvent servir à en exprimer les lois. Voir, dans *Mathesis*, 1890, X, pp. 73-74, un exemple de l'emploi de ces symboles.

Die Theorie der Parallellinien von Euclid bis auf Gauss, eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuclidischen Geometrie, in Gemeinschaft mit F. Engel herausgegeben von P. Stäckel. Mit 145 Figuren im Text und der Nachbildung eines Briefes von Gauss. Leipzig, Teubner, 1895 (X-325 pp., gr. in-8). Prix : 9 marcs.

Excellent ouvrage où sont analysés ou publiés in extenso ou par fragments les écrits d'Euclide, Wallis, Saccheri, Lambert, Gauss, Taurinus sur la théorie des parallèles, avec beaucoup d'indications sur les travaux d'autres auteurs. Il résulte de ces documents que, sans cesser de croire à la valeur absolue et exclusive de la géométrie euclidienne, Saccheri, Lambert, Legendre et Taurinus ont établi, avant Lobatchefsky et Bolyai, les fondements de la géométrie non euclidienne. Gauss et Schweikart, au contraire, avaient reconnu indépendamment l'un de l'autre, la valeur scientifique de la géométrie non euclidienne.

En 1896, *Mathesis* publiera, en supplément, une analyse détaillée de cet ouvrage.

(P. M.)

Erd- und Himmelsgloben, ihre **Geschichte und Konstruction.** Nach dem Italienischen Mattes Fiorinis frei bearbeitet von Siegmund Günther. Mit 9 Textfiguren. Leipzig, Teubner, 1895 (V-137 p. gr. in-8°). Prix : 4 marcs.

1-2. Globes anciens ; 3. Arabes ; 4. du moyen-âge ; 5. de la Renaissance ; 6-10. du 16e siècle ; 11-13. du 17e ; 14-15. du 18e ; 16. du 19e ; 17. Globes lunaires.

Traité d'algèbre élémentaire à l'usage de l'enseignement moyen par E. Colart, professeur de mathématiques supérieures à l'Athénée royal de Huy. Ouvrage couronné par l'Académie royale de Belgique (Prix De Keyn). Bruxelles, A. Castaigne, 1894 (323 pp. in-8°). Prix : 3 fr. 75.

Sommaire. Préliminaires. — Calcul algébrique. — Équations du premier et du second degré (maxima et minima élémentaires). — Progressions et logarithmes.

« Cet ouvrage, dit le rapport du jury, est écrit dans un style simple et clair. Les définitions et les règles sont formulées avec netteté. Les démonstrations sont à la fois rigoureuses et concises et les théories sont appliquées à de nombreux exemples bien gradués et présentant un certain intérêt. Sans prétendre que ce traité soit absolument irréprochable, le jury a jugé qu'il réalise un progrès considérable ».

Traité de Mécanique générale comprenant les leçons professées à l'École Polytechnique, par H. Resal, inspecteur général des Mines, membre de l'Institut. Deuxième édition. Paris, Gauthier-Villars et Fils. Tomes I et II, 1895 (in-8° de XIX-303 p. avec 47 fig. dans le texte, XI-165 p. avec 41 fig. dans le texte). Prix : fr. 6-50 et 3 fr.

Le tome I de cette nouvelle édition de la Mecnique rationnelle de M. Resal contient la Cinématique, les théorèmes généraux de la Mécanique, la théorie de l'équilibre et du mouvement des corps solides ; le tome II, celles du mouvement des solides eu égard aux frottements, de l'équilibre intérieur et de l'élasticité, puis l'Hydrostatique, l'Hydrodynamique et l'Hydraulique. Ces deux volumes, qui correspondent au programme de Mécanique de l'École Polytechnique, diffèrent tellement de ceux de la première édition qu'ils constituent presque un nouvel Ouvrage.

Parmi les innovations qui ont été faites on peut citer les suivantes :

Nouvelle théorie du roulement des corps. — Application de la méthode de la variation des constantes arbitraires à quelques problèmes du mouvement plan d'un point matériel. — Généralisation de la théorie géométrique des brachistochrones. — Nouvelles considérations sur le mouvement d'un point matériel sur une surface. — Équations de Lagrange et leur extension au mouvement relatif. — Stabilité de l'équilibre de l'axe de la toupie gyroscopique. — Mouvement de la Terre, autour de son centre de gravité. — Nouvelle théorie des chocs. — Diverses questions relatives au mouvement d'un corps sur un autre, eu égard au frottement. — Théorie complète des dilatations et des glissements dans un corps élastique. — Méthode rapide pour réduire à deux le nombre des coefficients qui entrent dans les équations générales de l'élasticité.

L'hydrostatique, l'hydrodynamique et l'hydraulique ont été l'objet d'améliorations et d'adjonctions importantes.

Cours complémentaire de Mécanique rationnelle. *Leçons sur l'intégration des équations différentielles de la Mécanique et applications* par Painlevé, Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Paris. Paris, Hermann, 1895 (Autographie de 299 p. in-4°). Prix : 14 fr.

Cet ouvrage considérable, dit l'éditeur, qui a pas coûté moins de quatre ans de travail à son auteur, est le complément de tous les traités de Mécanique rationnelle publiés jusqu'à ce jour. Il contient tout ce qu'il y a d'essentiel dans les *Vorlesungen über Dynamik* de Jacobi avec les développements que les progrès de la science ont introduits. Il renferme également, ce qui est précieux, de nombreux exercices complètement résolus, et où la solution est poussée jusqu'au bout, ce qui est rare. Les géomètres et les étudiants liront avec plaisir le premier ouvrage didactique du jeune géomètre dont les beaux travaux ont été déjà couronnés plusieurs fois par l'Académie des sciences.

Sommaire : 1. Préliminaires. 2. Principes généraux de la mécanique. 3. Mouvement d'un solide qui a un point fixe. 4-5. Équations générales du mouvement

6-11. Équations de d'Alembert et de Lagrange. Applications des équations de Lagrange. 12-17. Équations canoniques; théorie et applications de la théorie du dernier multiplicateur. Méthodes d'intégration.

Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de Géométrie analytique à l'usage des candidats à l'École spéciale Militaire de Saint-Cyr, par A. TOURNOIS, ancien élève de l'École normale supérieure. Paris, Société d'éditions scientifiques (208 pages in-8°, 84 fig. dans le texte). Prix : fr. 4-50.

Cet ouvrage fait partie du *Cours de Sciences* publié sous la direction de M. B. Niewenglowski.

Les Leçons complémentaires d'Algèbre comprennent des développements sur les limites, la continuité, les dérivées et la variation des fonctions, avec un grand nombre d'exercices et de questions proposées. L'auteur s'est appliqué à donner des définitions précises, et des démonstrations rigoureuses sans tomber dans une prolixité fatigante; ainsi, il n'entre pas dans des détails sur les incommensurables. La représentation graphique apporte une grande clarté dans l'étude de la variation d'une fonction.

Les notions de géométrie analytique contiennent la théorie de la ligne droite, du cercle et des coniques en coordonnées rectangulaires; un bon choix d'exercices et de questions proposées termine chaque chapitre.

Le livre de M. Tournois peut être consulté avec fruit par les élèves qui se préparent à nos écoles spéciales. (J. N.)

Leçons sur la résolution Algébrique des équations, par H. VOGT, professeur adjoint à la Faculté de Sciences de Nancy, avec une Préface de M. Jules Tannery. Paris, Nony, 1895 (VIII-201 pages in-8°). Prix : 5 fr.

Table des matières. I. Des groupes de substitutions. II. Des sous-groupes. — Groupes simples et composés. III. Des fonctions rationnelles de plusieurs variables indépendantes. IV. Relations algébriques entre les fonctions rationnelles de plusieurs variables. V. Des fonctions cycliques et métacycliques de plusieurs variables. VI. Domaine de rationalité. — Réductibilité des fonctions entières. VII. Des fonctions rationnelles des racines d'une équation. — Résolvantes. — Groupe d'une équation algébrique. VIII. Des équations du deuxième, du troisième et du quatrième degré. — Recherches de Lagrange. IX. De la résolution algébrique des équations. X. Des équations abéliennes. XI. Des équations de la division du cercle. XII. Des équations résolubles irréductibles de degré premier. XIII. Du groupe d'une équation. — Note d'Arithmétique.

Voici en quels termes M. Jules Tannery justifie la publication des Leçons de M. Vogt : « Sans parler des mémoires originaux, auxquels il faudra toujours recourir, mais qu'il vaut mieux étudier après avoir acquis des vues d'ensemble sur l'état actuel de la science, il est certain que le Traité d'algèbre supérieure de J. A. Serret rendra, pendant longtemps encore de grands services; mais, depuis

le temps où il a paru, bien des recherches importantes ont été faites, dont les résultats et l'esprit n'ont pu pénétrer dans un livre qui les avait précédées; le Traité des substitutions de M. Jordan est une œuvre magistrale, qui s'adresse plutôt à ceux qui veulent approfondir la science qu'à ceux qui veulent s'initier. La Théorie des substitutions de M. Netto, le Manuel d'algèbre de M. Weber, dont le premier volume vient de paraître, sont d'excellentes livres, mais qui ne sont pas écrits en français. Le livre de M. Vogt vient ainsi prendre une place qui était vide, et qu'on sentait vide. »

Question 937.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 127.)

Soit un triangle ABC, *et soient* A_1, B_1, C_1 *les symétriques de l'orthocentre* H *par rapport aux milieux des hauteurs;* A', B', C' *les symétriques des pieds* H_a, H_b, H_c *des hauteurs par rapport aux milieux* M_a, M_b, M_c *des côtés* BC, CA, AB.

1° *Il y a une ellipse qui passe par les six points* A_1, B_1, C_1, A', B', C'. 2° *Elle est normale aux hauteurs en* A_1, B_1, C_1. 3° *Elle est tangente aux côtés en* A', B', C'. 4° *Elle a pour centre le centre* O *du cercle circonscrit.* 5° *La somme des carrés de ses demi-axes égale le rayon* R *du cercle circonscrit.* 6° *Elle a pour équation en coordonnées normales :*

$$\Sigma a \sqrt{\frac{\varpi}{\cos A}} = 0.$$

7° *Si le cercle* ABC *et l'ellipse sont fixés, il y a une infinité de triangles* ABC. (E. Lemoine.)

Solution par M. Droz-Farny. On démontre facilement que les droites AA', BB', CC' se coupent en un même point Q; donc il existe une conique ε qui touche les côtés de ABC en A', B', C'.

Le centre de cette courbe, d'après un cas particulier du théorème de Newton sur le lieu des centres des coniques ayant quatre tangentes communes, est à l'intersection des droites joignant M_a, M_b, M_c, aux milieux N_a, N_b, N_c des droites AA', BB', CC'; ces droites étant parallèles aux hauteurs AH_a, BH_b, CH_c, le centre de ε coïncide avec le centre O du cercle ABC. Comme

$$OM_a = \tfrac{1}{2} AH = \tfrac{1}{2} A_1H_a,$$

la droite A'O passe par A_1 et A'O = OA_1; donc ε passe par A_1, B_1, C_1. De plus, les tangentes en A_1, B_1, C_1 sont parallèles aux tangentes

menées en A', B', C'; autrement dit, ε est normale à AH_a, BH_b, CH_c en A_1, B_1, C_1.

Menons par O et par A_1 des parallèles à BC; la première rencontre ε en S, et la seconde coupe AC en P. On voit facilement que les segments A'C, A_1P déterminés par la tangente AC sur les tangentes parallèles A_1P, A'C sont toujours de même sens; donc ε est une ellipse. Ensuite, d'après un théorème connu,

$$\overline{OS}^2 = A'C.A_1P;$$

mais si l'on mène par H une parallèle à AC qui rencontre BC en D, l'égalité $AA_1 = HH_a$ entraîne $A_1P = H_aD_1$, d'où

$$\overline{OS}^2 = A'C.A_1P = BH_a.H_aD = \overline{HH_a}^2.$$

Donc les demi-diamètres de ε parallèles aux côtés de ABC sont égaux aux segments HH_a, HH_b, HH_c des hauteurs correspondantes.

Nous connaissons maintenant deux demi-diamètres conjugués, OA' et OS. Pour appliquer la construction de Chasles, nous élevons en A' sur BC deux perpendiculaires, A'N et A'N', égales à HH_a; alors, si a et b désignent les longueurs des demi-axes de ε et que O et N se trouvent de part et d'autre de BC, on a

$$a + b = ON, \quad a - b = ON',$$

et les axes de ε sont dirigés suivant les bissectrices de l'angle NON'.

Comme $BH_a = A'C$, $A'N = HH_a$, on voit facilement que N appartient à la circonférence ABC; donc $a + b = R$.

Les équations AA', BB', CC' étant

$$\frac{y}{z} = \frac{c^2 \cos B}{b^2 \cos C}, \quad \frac{y}{x} = \frac{a^2 \cos B}{b^2 \cos A}, \quad \frac{x}{y} = \frac{b^2 \cos A}{a^2 \cos B},$$

l'équation de la conique qui touche les côtés de ABC en A', B', C' est

$$\Sigma a \sqrt{\frac{x}{\cos A}} = 0.$$

Enfin, si entre le rayon d'une circonférence et les axes d'une ellipse de même centre, on a la relation $R = a + b$, on peut inscrire à la circonférence une infinité de triangles qui soient en même temps circonscrits à l'ellipse, et celle-ci est normale aux hauteurs de chacun des triangles. Cette proposition est presque évidente par ce qui précède; on l'établit par un calcul facile en prenant pour axes coordonnés les axes de

l'ellipse et en considérant d'abord un triangle isoscèle dont les sommets ont pour coordonnées

$$(a+b, 0) \quad \text{et} \quad (-a, \pm\sqrt{(a+b)^2 - a^2});$$

le théorème de Poncelet l'étend ensuite à un triangle de forme quelconque.

Remarque I. Les triangles ABC inscrits à une même circonférence et circonscrits à une même ellipse, jouissent des propriétés suivantes :

1° La somme $\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 + \overline{AB}^2$ est constante; l'orthocentre, le centre de gravité et le centre du cercle des neuf points décrivent des circonférences concentriques à l'ellipse. (Steiner).

2° Le produit des distances du centre O à l'un des côtés de ABC et à la droite joignant les milieux des deux autres est constant. (Faure).

3° Le produit des diamètres de l'ellipse parallèles aux côtés de ABC est constant.

Remarque II. La question 952 est un simple corollaire de la question 937. Car si F et F′ sont les foyers de ε, les droites AO et AH, qui sont isogonales par rapport à l'angle BAC, le sont aussi par rapport à l'angle FAF′, et AH est normale à ε.

Nous avons reçu d'autres solutions, également remarquables, de MM. Fairon (Seraing), Déprez (Charleroi), Spijker (Amsterdam) et Bastin (Liége); nous regrettons que le défaut d'espace nous empêche de les reproduire.

M. Déprez signale les propriétés suivantes : Le diamètre de ε dirigé suivant la droite OA est égal à AH; si Q est le symétrique de A par rapport à A_1, les axes de ε sont dirigés suivant les bissectrices de l'angle AOQ.

M. Spijker énonce d'autres propositions qui présentent un grand intérêt : 1° Les cercles décrits sur les axes de ε comme diamètres touchent le cercle des neuf points de ABC(*); les longueurs de ces axes sont $\frac{1}{2}(R + OH)$ et $\frac{1}{2}(R - OH)$. 2° Les axes de ε sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole de Jerabek et aux axes des deux coniques, l'une inscrite et l'autre circonscrite à ABC et ayant pour centre le point de Lemoine. 3° L'ellipse ε coupe l'ellipse inscrite à ABC et ayant pour centre le point de Lemoine, au centre de l'hyperbole de Jerabek. 4° Les cercles décrits sur les axes de ε comme diamètres touchent le cercle des neuf points aux points de rencontre de la droite HO avec les asymptotes de l'hyperbole de Jerabek. 5° L'ellipse ε est l'enveloppe des transversales réciproques de celles qui passent par H. Pour les démonstrations de quelques-unes de ces propriétés, M. Spijker renvoie à son article de *Mathesis*; sur un groupe de coniques (p. 105-111).

(*) Voir Casey, *Analytical Geometry*, 2e éd., p. 542.

×Question 950.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 152).

On sait que, si dans un triangle ABC *la longueur de la bissectrice intérieure de l'angle* B *comprise entre le sommet* B *et le côté opposé est égale à la longueur de la bissectrice intérieure de l'angle* C *comprise entre le sommet* C *et le côté opposé, on sait, dis-je, que le triangle* ABC *est isoscèle.*

Le théorème n'est plus toujours vrai pour les bissectrices extérieures, on demande de démontrer géométriquement que a, b, c, R, r_a *étant respectivement les trois côtés de* ABC, *le rayon du cercle circonscrit, et le rayon du cercle exinscrit tangent au côté* BC, *si l'on a* $4Rr_a = a^2 + bc$, *les longueurs des bissectrices extérieures des angles* B *et* C *sont égales.* (Alauda.)

Solution par M. Soons. Soit D l'extrémité de la bissectrice de l'angle C, E celle de la bissectrice de l'angle B. Des égalités

$$\frac{DB}{a} = \frac{DA}{b} = \frac{a}{b-a}, \quad ab = DA \cdot DB - CD^2,$$

on tire

$$\overline{CD}^2 = \frac{ab(p-a)(p-b)}{(b-a)^2};$$

de même

$$\overline{BE}^2 = \frac{ac(p-a)(p-c)}{(c-a)^2}.$$

Si CD = BE, on a, successivement,

$$\frac{b(p-b)}{(b-a)^2} = \frac{c(p-c)}{(c-a)^2}, \quad b(p-b)(c-a)^2 = c(p-c)(b-a)^2,$$

$$b(a+c-b)(c-a)^2 = c(a+b-c)(b-a)^2,$$

$$bc^3 - abc^2 + 2ab^2c - a^2b^2 + a^3b = b^3c - acb^2 + 2abc^2 - a^2c^2 + a^3c;$$

en mettant tous les termes au premier membre et divisant par $b - c$, qu'on suppose différent de zéro, on trouve

$$a^3 - a^2(b+c) + 3abc - bc(b+c) = 0. \qquad (1)$$

D'autre part, supposons

$$4Rr_a = a^2 + bc.$$

En multipliant cette égalité par $p - a$ et remarquant que

$$(p-a)r_a = T, \quad 4RT = abc,$$

nous aurons successivement

$$abc = (p-a)(a^2+bc), \quad 2abc = (b+c-a)(a^2+bc),$$
$$2abc = (b+c)(a^2+bc) - a(a^2+bc),$$
$$2abc = (b+c)a^2 + (b+c)bc - a^3 - abc,$$
$$a^3 - a^2(b+c) + 3abc - (b+c)bc = 0,$$

c'est-à-dire l'égalité (1).

Cette solution est-elle géométrique? Quoi qu'il en soit, elle intéressera nos jeunes lecteurs.

Si a est plus petit que b et c, les points D, E tombent sur les prolongements de AB, AC au-delà de BC; les triangles ACD, ABE, qui ont CD = BE, même angle en A et même bissectrice AI_a, sont égaux, d'où AB = AC.

Si a est plus grand que b et c, les points D, E tombent sur les prolongements de BA, CA, au-delà de A; les triangles ACD, ABE sont encore égaux comme ayant CD = BE, des angles égaux en A et même bissectrice extérieure AI_a; d'où AB = AC.

Mais si $b > a > c$, D est sur le prolongement de AB au-delà de B, E sur le prolongement de CA au-delà de A! Les triangles ADC, ABE ont maintenant BE = CD, des angles supplémentaires en A, et AI_a est une bissectrice intérieure du triangle ADC, et une bissectrice extérieure de ABE. Le triangle ABC n'est plus isocèle.

En supposant $b > c$, on trouve que le premier membre de (1) prend une valeur positive pour $a = b$, des valeurs négatives pour $a = c$ ou $a = b - c$; donc avec deux côtés quelconques b, c on peut construire au moins un triangle tel que les bissectrices extérieures BE, CD soient égales.

Un tel triangle est aussi caractérisé par les égalités

$$\frac{a^2}{4} = R\left(r_a - \frac{1}{2}h_a\right),$$
$$\sin B \sin\frac{C-A}{2} = \sin C \sin\frac{A-B}{2},$$
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\operatorname{tg}\frac{B-C}{4} = \operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{3}{4}A\right),$$
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ - \frac{A}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

(J. N.).

×QUESTIONS D'EXAMEN.

703. L'équation

$$\begin{vmatrix} a^2 - x & ab & ac \\ ba & b^2 - x & bc \\ ca & cb & c^2 - x \end{vmatrix} = 0$$

a deux racines nulles et une racine égale à $a^2 + b^2 + c^2$. (TUCKER.)

704. Par les sommets d'un triangle ABC on mène trois parallèles AA_1, BB_1, CC_1 terminées aux côtés opposés. Démontrer que les points A_2, B_2, C_2 qui divisent AA_1, BB_1, CC_1 dans le rapport 1 : 2 sont en ligne droite. (H. VAN AUBEL.)

Les droites AB_1, BA_2 interceptent sur C_1C un segment $C_1C' = \frac{1}{3}C_1C$. Dans le trapèze BB_2A_1A, la parallèle aux bases menée par C' est divisée en ce point en deux parties égales. La figure suppose C_1 entre A et B.

705. Si on projette les foyers F et F' d'une ellipse (E) sur une tangente quelconque à l'ellipse, respectivement en P et P', et si on considère les cercles ayant pour diamètres PP' et FF'; l'axe radical de ces deux cercles est à une distance δ de la tangente, et la tangente à une distance Δ du centre de (E). On a la relation

$$\Delta\delta = \text{constante}. \qquad \text{(E. N. BARISIEN.)}$$

Si l'axe radical rencontre la ligne des centres OO' en R, on a

$\overline{RO}^2 - \overline{OF}^2 = \overline{RO'}^2 - \overline{O'P}^2$, ou $\overline{RO}^2 - \overline{RO'}^2 = OF^2 - \overline{O'P}^2 = \frac{1}{4}(FP - F'P')^2$, ..

706. L'enveloppe des droites B'C' divisant l'aire d'un triangle ABC en deux parties équivalentes se compose de trois hyperboles équilatères. (E. N. BARISIEN.)

Corollaire d'un théorème connu, l'aire AB'C' étant constante.

707. Les cercles qui ont pour diamètres les cordes focales d'une parabole ont même puissance par rapport au sommet de la parabole. (E. N. BARISIEN.)

L équation d'un tel cercle pour une corde de coefficient angulaire m est

$$x^2 + y^2 - \frac{2py}{m} - \frac{p(m^2+2)}{m^2}x - \frac{3p^2}{4} = 0.$$

Pour la puissance de l'origine des coordonnées par rapport au cercle qui a pour diamètre la distance des points (x_1, y_1), (x_2, y_2), on a cette valeur remarquable : $x_1x_2 + y_1y_2$.

708. Soient A, B, C, D les pieds des quatre normales abaissées d'un point P sur une ellipse de centre O.

Montrer que la somme des coefficients angulaires des quatre droites OA, OB, OC, OD, multipliée par la somme des coefficients angulaires des quatre diamètres perpendiculaires aux précédents est égal à — 4. (E. N. BARISIEN.)

Les coordonnées des points A, B, C, D vérifient les équations

$$c^2xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0, \quad b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

et, par suite, l'équation homogène

$$a^2b^2c^2x^2y^2 = (a^2\alpha y - b^2\beta x)^2\,(a^2y^2 + b^2x^2);$$

de celle-ci on tire

$$\Sigma\frac{y}{x} = \frac{2b^2\beta}{a^2\alpha}, \quad \Sigma\frac{x}{y} = \frac{2a^2\alpha}{b^2\beta}, \quad \text{etc.}$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1042. Chercher le lieu du foyer d'une parabole passant par un point fixe A d'une circonférence donnée et par les extrémités B, C d'un diamètre variable de cette circonférence, et le lieu du point de rencontre de l'axe de la parabole avec la droite BC. (E. N. BARISIEN.)

1044. Soit M un point quelconque de la circonférence circonscrite à un triangle équilatéral ABC. Projetons M en A_1, B_1, C_1 sur BC, CA, AB; la droite MA_1 rencontre CA en A_2, AB en A_3; la droite MB_1 rencontre AB en B_2, BC en B_3; enfin MC_1 rencontre BC en C_2, CA en C_3. Cela posé, démontrer 1° que les points A_2, B_2, C_2 sont en ligne droite, de même que A_3, B_3, C_3; 2° que les droites $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ forment un triangle équilatéral. Trouver les lieux des sommets de ce triangle. (A. C.)

Cette proposition résulte de notre note *Sur le point de Tarry* (*M.*, VI, pp. 5-7). On demande ici une démonstration élémentaire. (J. N.)

1045. Si tg α, tg β, tg γ sont les racines de l'équation

$$A_0x^3 + 3A_1x^2 + 3A_2x + A_3 = 0,$$

chercher l'équation ayant pour racines

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta), \quad \operatorname{tg}(\beta+\gamma), \quad \operatorname{tg}(\gamma+\alpha). \quad \text{(J. NEUBERG.)}$$

1046. Résoudre, en nombres entiers, les équations

$$1° \qquad x^4 + y^4 + z^4 = u^2;$$
$$2° \qquad x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = u^2.$$

Des identités, donnant une infinité de solutions de ces équations ont été signalées dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, t. I, p. 167. (E. FAUQUEMBERGUE.)

1041. Rectification. Dans cette question, on doit supposer que a, b, c sont les côtés d'un triangle. — Dans le cas général, le choix des signes présente des difficultés. C'est M. De Tilly qui a appelé l'attention sur la lacune que présente l'énoncé primitif. (J. N.)

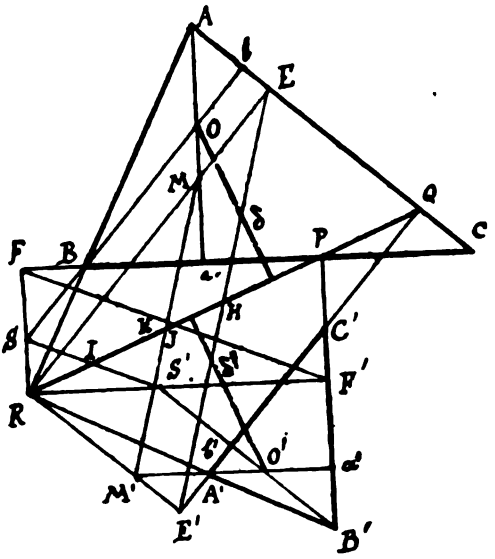
DÉMONSTRATIONS GÉOMÉTRIQUES D'UN THÉORÈME

de M. SONDAT;

I. *Démonstration* de M. E. HAERENS, Ingénieur au corps des Ponts et Chaussées, détaché à l'École du Génie civil de Gand. Dans la question 592 de l'*Intermédiaire des mathématiciens* (1895, t. II, p. 202), M. P. Sondat demande une démonstration géométrique du théorème suivant :

« Si deux triangles homologiques ABC, A'B'C' ont leurs côtés perpendiculaires, l'axe d'homologie divise en deux parties égales la distance des deux orthocentres. »

Soient P, Q, R les points où l'axe d'homologie coupe respectivement les côtés des deux triangles et O, O' les deux orthocentres. La question revient évidemment à démontrer que les orthocentres sont à égale distance de la transversale PQR.



Du point R abaissons les perpendiculaires RE, RE' sur les côtés AC, A'C' des triangles; elles seront respectivement parallèles aux hauteurs correspondantes Bb, B'b'. De même, abaissons sur les côtés BC, B'C' les perpendiculaires RF, RF' lesquelles seront respectivement parallèles aux hauteurs correspondantes Aa, A'a'. Désignons par M, S les points de rencontre des hauteurs Aa, Bb avec les perpendiculaires RE, RF et par M', S' les points correspondants dans le second triangle.

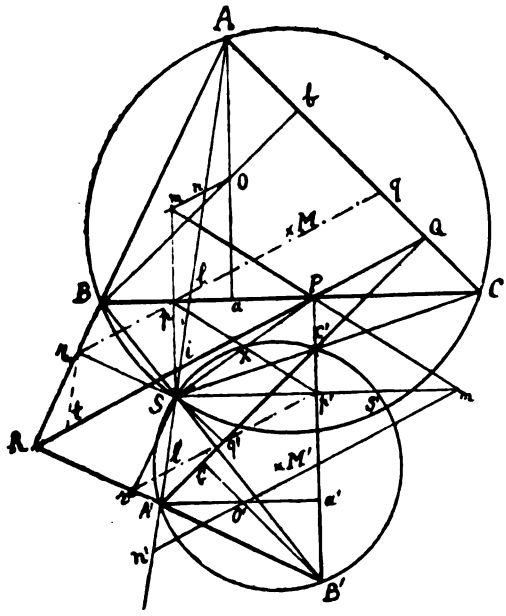
Les triangles RAM, RA'M' sont semblables comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires et il en est de même, et pour la même raison, des triangles AME, A'M'E'; on aura donc la relation

$$\frac{RM}{RM'} = \frac{AM}{A'M'} = \frac{ME}{M'E'}.$$

Conséquemment, les droites EE′, MM′ sont parallèles entre elles. On en conclut que la diagonale RQ du rectangle REQE′, coupant la seconde diagonale EE′ en deux parties égales, coupera également la droite MM′ en deux parties égales. Donc les points M et M′ sont à égale distance de la transversale PQR (Nous ne traçons pas ces distances afin de ne pas surcharger la figure).

On démontre d'une manière toute semblable que les deux points S et S′ sont à égale distance de la transversale PQR (Il suffit de considérer les deux groupes de triangles semblables RSB, RS′B′ et RBF, RB′F′, et le rectangle RFPF′).

Or, la distance du point O à la transversale PQR est égale à la somme des distances des deux points M et S à la même transversale ; en effet, la figure RSOM est un parallélogramme. De même, la distance du point O′ à la droite PQR est égale à la somme des distances des points M′, S′ à la même droite ; en effet, la figure RS′O′M′ est aussi un parallélogramme. Donc, les deux sommes sont égales puisque les termes qui les composent sont respectivement égaux. C.Q.F.D.



II. *Démonstration par* M. Meurice. Une transversale quelconque coupe les côtés du triangle ABC aux points P, Q, R. Les perpendiculaires élevées en ces points sur les côtés correspondants forment un triangle A′B′C′. Il faut démontrer que la droite QR passe au milieu de la distance des orthocentres O, O′ des triangles ABC, A′B′C′.

Les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point S. Si la transversale QR se déplace parallèlement à elle-même, les points

A', B', C' décrivent des droites passant respectivement par A, B, C; donc le triangle A'B'C' reste inscrit à trois droites fixes SA, SB, SC. Les perpendiculaires Sp, Sq, Sr abaissées de S sur BC, CA, AB sont les directions des côtés d'un triangle A'B'C' qui se réduit au point S; on en conclut que leurs pieds p, q, r sont en ligne droite et que S appartient à la circonférence ABC. A cause du rôle symétrique des deux triangles ABC, A'B'C', S est aussi sur la circonférence circonscrite au triangle A'B'C' et ses projections p', q', r' sur B'C', C'A', A'B sont sur une droite parallèle à QR(*).

D'après un théorème connu les droites qr, $q'r'$ passent respectivement au milieu de SO et de SO'. Donc, si on prolonge Sp de $pm = Sp$ et Sp' de $p'm' = Sp'$, les droites Om et $O'm'$ sont parallèles à qr et QR. Soit X le centre du rectangle $SpPp'$. Comme p, X, p' sont les milieux des droites Sm, SP, Sm' et X celui de pp', les points m, P, m' sont en ligne droite et $mP = Pm'$. Ainsi QR passe au milieu de mm', et par suite au milieu de OO'.

TRIANGLES ORTHOHOMOLOGIQUES;

par M. J. Neuberg.

Deux triangles homologiques, ABC et A'B'C', dont les côtés correspondants sont perpendiculaires, peuvent être dits *orthohomologiques*. Nous en avons énoncé quelques propriétés dans la question 450 de *Mathesis;* la proposition de M. Sondat (voir l'article précédent) ayant ramené l'attention des géomètres sur ces triangles, il n'est peut-être pas inutile de rappeler ce que ce journal a donné, il y a une dizaine d'années. Les explications se rapportent à la figure de la page 266.

Le centre d'homologie S *des triangles* ABC, A'B'C' *appartient aux circonférences circonscrites, et ses droites de Simson relatives aux deux triangles sont parallèles à l'axe d'homologie.* La démonstration de ce théorème a été exposée ci-dessus par M. Meurice.

Les circonférences circonscrites à deux triangles orthohomologiques sont orthogonales. En effet, les rayons homologues MA, M'A' étant

---

(*) Ces propriétés ont été signalées par M. Neuberg (*Mathesis* (1), t. V, p. 167 et t. VI, p. 116).

perpendiculaires, les angles MAS, M'A'S sont complémentaires, et il en est de même des angles MSA, M'SA', égaux aux premiers.

Le second point d'intersection S' *des circonférences* ABC, A'B'C' *est le centre de similitude des deux triangles.* Cette propriété, nouvelle, résulte de ce que les triangles S'AA', S'BB', S'CC' sont semblables.

Si le triangle A'B'C' *se déplace en restant de grandeur constante, ses sommets décrivent des circonférences, et l'axe d'homologie enveloppe une hypocycloïde à trois rebroussements.* Car le rayon SM' restant constant, la distance des centres MM' est invariable; par suite le point M' décrit une circonférence ayant pour centre M. Les droites M'A', M'B', M'C' étant constantes en grandeur et en direction, et M' décrivant une circonférence, leurs secondes extrémités décrivent des circonférences égales à celle parcourue par M' et ayant pour centres les extrémités de trois droites MA'', MB'', MC'', égales et parallèles à M'A', M'B', M'C'. Les triangles rectangles AMA'', BMB'', CMC'' étant égaux à MSM', les circonférences (A'), (B'), (C') passent respectivement par A, B, C. Si AB, AC rencontrent la circonférence (A') en B_1, C_1, la droite QR est la droite de Simson de A' relative au triangle AB_1C_1; donc elle enveloppe une hypocycloïde de Steiner.

Pour terminer, nous rapportons une démonstration que nous avions trouvée du théorème de M. Sondat avant d'avoir connaissance de celles de MM. Haerens et Meurice. Les droites de Simson de S rencontrent AS en l et l', les parallèles à ces droites par les orthocentres O, O' coupent AS en n et n'; comme qr passe au milieu de SO, et $q'r'$ au milieu de SO', on a

$$Sl = ln, \quad Sl' = l'n'.$$

D'autre part, si l'on mène rt parallèle à AS et rencontrant RQ en t, on forme deux triangles égaux et parallèles, Rrt et $r'Sl$; car $Rr = r'S$. Il en résulte $Sl' = rt = il$, et $il' = lS$, i étant le point d'intersection de SA avec RQ; par conséquent,

$$ni = nl + li = lS + Sl' = il' + l'n' = in',$$

ce qui démontre la proposition.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Méthodologie mathématique par F. Dauge, Ingénieur en chef honoraire des ponts et chaussées, professeur ordinaire à la Faculté des Sciences de l'Université de Gand, Inspecteur des études à l'École préparatoire du Génie civil et des Arts et Manufactures annexée à cette Université. Deuxième édition, revue et augmentée. Gand, Hoste; Paris, Gauthier-Villars, 1896 (*) (X — 525 p.; 12 planches). Prix : 12 francs.

Nous avons donné dans le tome III de *Mathesis* (pp. 149-156) une analyse détaillée de la première édition du remarquable *Cours de Méthodologie* de M. Dauge. L'auteur a introduit, dans la seconde édition que nous annonçons aujourd'hui, un certain nombre d'additions et bon nombre d'améliorations de détail, qui augmentent la valeur du livre. Nous allons les faire connaître, en donnant en même temps un sommaire des matières contenues dans l'ouvrage.

I. *Introduction* (25 pages). 1. Objet du cours. 2. Préceptes généraux relatifs à la pratique de l'enseignement. 3. De la méthode en général : analyse et synthèse.

Nous signalons surtout aux jeunes professeurs les excellents conseils contenus dans le § 2.

II. *Arithmétique* (77 p.). 1. Objet. 2. Numération. 3. Opérations. 4-5. Fractions ordinaires, décimales; multiplication et division abrégées. 6. Systèmes de numération. 7. Divisibilité des nombres. 8. Fractions décimales périodiques. 9. Racines carrées des nombres. Nombres irrationnels.

L'auteur a modifié ou plutôt complété très heureusement la définition de la grandeur (n° 30); dans le paragraphe consacré à la soustraction, il a introduit la méthode autrichienne (n° 37, 3°), qui, comme on le sait, est usitée dans le petit commerce; enfin, il a fait connaître le principe de la théorie abstraite des incommensurables due à Dedekind (n° 96).

Au n° 44, dans la recherche du premier chiffre d'un quotient d'un nombre de plusieurs chiffres 985246, par exemple, par un autre 2653, de plusieurs chiffres, l'auteur prouve d'abord qu'en divisant 9852 par 2653, le quotient obtenu 3, ne sera pas plus petit que le chiffre des centaines du quotient; ensuite, de deux manières différentes, qu'il ne sera pas trop grand. L'une d'elles est la suivante : Puisque 9852 égale au moins 3 fois 2653, 985200 et 985246 égalent au moins 300 fois 2653. Voici l'autre : « Car le supposer trop grand, ce serait supposer que la division de 9852 centaines par 2653 donnerait plus de centaines que celle du nombre proposé par 2653, ce qui est absurde, le nombre proposé étant au moins égal à 9852 centaines. » Selon nous, ce raisonnement n'est pas clair pour les commençants; et il n'est rigoureux que parce qu'on y intercale inconsciemment l'autre, après les mots *car le supposer trop grand*. Ce second raisonnement revient à ce qui suit :

$$\text{Partie entière de } \frac{9852}{2653} = \text{n. de centaines de } \frac{985200}{2653} \gtrless \text{n. de centaines de } \frac{985246}{2653}.$$

Sous cette forme, on voit qu'il est identique au premier.

(*) Malgré ce millésime, le livre a paru en octobre 1895.

III. *Algèbre* (58 pages). 1. Objet de l'algèbre. 2. Opérations fondamentales 3. Équations du premier degré à une inconnue. Interprétation des solutions négatives. 4. Considérations générales sur la théorie des quantités négatives et objections que l'on y a opposées. 5. Équations du second degré. Règles du calcul des imaginaires. 6. Problèmes d'un degré supérieur au premier. Multiplicité et altération des solutions. Solutions imaginaires. 7. De l'emploi des imaginaires dans les démonstrations algébriques.

Ce chapitre n'a pas été sensiblement modifié. Toutes les questions relatives aux quantités ou aux solutions négatives sont traitées avec grand soin dans ce chapitre.

IV. *Géométrie* (86 pages). 1. Objet de la géométrie. Définitions et axiomes. 2. Des premières propositions de la géométrie. 3. Théorie des parallèles. Géométrie imaginaire (metagéométrie)(*). 4. Mesure des angles. Passage du commensurable à l'incommensurable. 5. Mesure des surfaces planes et théorie des lignes proportionnelles. 6. Mesure du cercle et de la circonférence. 7. Mesure des solides 8. Du plus court chemin sur la sphère. 9. Surface et volume des trois corps ronds.

Ce chapitre a reçu, outre des améliorations de détail, de notables additions relatives aux principes de la géométrie : n° 141. Sur la notion de distance, comme base de la géométrie. 142. Homogénéité et invariabilité des figures. 143. Sur la définition de la ligne droite. 169. Géométrie doublement abstraite ou riemannienne. 170-171. Analyse des dernières recherches de M. De Tilly sur la géométrie générale, en partant de l'idée de distance. 172. Critique du principe fondamental de ces recherches. 173-175. Critique de tout système de géométrie non euclidienne.

Nous ne partageons nullement la manière de voir exposée dans les n^os^ 172 à 175. Selon nous, toutes les critiques dirigées contre la géométrie non euclidienne peuvent être retournées contre la géométrie euclidienne. M. De Tilly fonde la géométrie générale sur la notion de distance. On peut faire à ce mode d'exposition l'objection suivante : cette notion première est empruntée à l'expérience qui, *à elle seule*, ne donne pas à cette notion une précision suffisante pour permettre de la traduire en nombre. On peut répondre : M. Dauge fonde la géométrie sur la notion de ligne droite et de plan : il emprunte aussi ces notions premières à l'expérience; mais celle-ci, à elle seule, ne donne pas non plus à ces notions la précision nécessaire pour qu'on puisse établir la théorie des parallèles sans postulat. On ne parvient pas même, avec cette notion de la ligne droite, à prouver qu'il soit possible de concevoir un plan, contenant une infinité de lignes droites dans tous les sens. On ne peut savoir non plus si le 5^e^ postulat d'Euclide est

---

(*) M. Dauge nous fait observer que la note du n° 168, p. 197, à partir des mots : « *De là cette notion* etc., » doit, pour être exacte, être complétée par la définition suivante des points correspondant : Soient sur deux surfaces S et S' deux points O et O', deux lignes géodésiques fixes OA et OA' et deux lignes géodésiques OB et OB' faisant des angles égaux avec OA et OA' respectivement; puis sur les lignes OB et O'B', prenons les points B et B' tels que l'arc OB soit égal à O'B' ; les points B et B' seront dits correspondants.

compatible avec la notion de la ligne droite; il est impossible à un euclidien de réfuter celui qui soutient que la géométrie lobatchefskienne est la seule d'accord avec la notion de droite admise par M. Dauge comme point de départ (p. 210) : *ligne déterminée complètement, sans aucune restriction, quand on donne deux de ses points.* Le géomètre lobatchefskien donne, d'ailleurs, sur certaines surfaces, une interprétation lobatchefskienne de la géométrie plane euclidienne, comme le géomètre euclidien donne une interprétation euclidienne de la géométrie plane lobatchefskienne sur les pseudosphères de Beltrami. De plus, il peut objecter aux partisans de la géométrie euclidienne, qu'il est tout aussi difficile pour lui, de se représenter la stéréométrie euclidienne, qu'il est difficile à un géomètre euclidien de se représenter la stéréométrie lobatchefskienne (*).

L'objection tirée de la géométrie physique peut être retournée de même contre la géométrie euclidienne : Nos sensations, sont d'accord aussi bien avec une géométrie non euclidienne de paramètre très grand qu'avec la géométrie euclidienne.

Dans les §§ 6, 8 et 9 relatifs à la mesure de la longueur de la circonférence, de l'aire du cercle, de celle des trois corps ronds et du volume de ces corps, M. Dauge a introduit diverses améliorations de détail qui, ce nous semble, les rendent inattaquables, si l'on admet, comme il le fait, que les notions de longueur, d'aire et de volume sont des idées premières, même pour les lignes courbes, les surfaces courbes et les volumes qu'elles limitent. Nous préférons le mode d'exposition où l'on définit ces notions au moyen des limites, comme l'a proposé Catalan dont les idées ont été heureusement complétées récemment par M. Peano(**).

V. *Analyse infinitésimale et principales méthodes qui peuvent y suppléer* (40 pages). 1. Idée fondamentale commune à ces méthodes. 2. Exhaustion ; limites; infiniment petits et évanouissants. 3. Equations imparfaites et théorie de la compensation des erreurs. 4. Méthode de Duhamel. 5. Méthode des indivisibles. 6. Méthode des fluxions. 7. Théorie des fonctions analytiques.

Ce chapitre n'a pas reçu d'additions notables; mais çà et là des améliorations de détail.

(*) Dans la critique spéciale de la géométrie riemannienne, n° 175, M. Dauge fait observer que *le plan riemannien est une sphère euclidienne*, par un grand cercle de laquelle on peut en faire passer une infinité d'autres, ce qui semble absurde. Mais cette absurdité disparaît, si l'on prend cette phrase : *le plan riemannien est une sphère euclidienne*, dans le sens qu'y attachent les géomètres partisans de la géométrie non euclidienne. Cela signifie simplement que les propriétés des figures tracées *sur* le plan riemannien sont analogues aux propriétés des figures tracées *sur* la sphère euclidienne, pourvu que l'on remplace les droites du plan riemannien par des grands cercles de la sphère euclidienne. Mais, dans l'espace à trois dimensions, un plan riemannien n'a pas les mêmes propriétés qu'une sphère euclidienne. Ainsi il n'a pas un centre unique comme celle-ci.

(**) Le raisonnement de la page 229-230 sur un polygone à échelons inscrit à une courbe ne nous convainc pas. La limite d'un pareil polygone inscrit dans un autre polygone ne donne pas la longueur de celui-ci. Or, il est clair que la définition de la longueur d'une ligne doit s'appliquer à la fois aux polygones et aux courbes.

VI. *Géométrie analytique* (198 pages). 1-2. Coordonnées rectilignes, polaires, tangentielles, trilinéaires (ponctuelles, tangentielles). 3. Rapports anharmoniques et harmoniques; involution. 4. Pôles et polaires; figures polaires réciproques. 5. Théorèmes divers sur les coniques. Théorèmes de Newton et de Carnot sur les courbes géométriques. 6-7. Coordonnées dans l'espace (rectilignes, polaires, tangentielles, tétraédriques). 8. Principe de dualité et d'homographie.

Ce chapitre est celui qui a subi le plus de modifications et d'additions. Le premier et le sixième paragraphe sont presque entièrement nouveaux; ils contiennent les principales propositions relatives à la représentation des lieux géométriques dans le plan et dans l'espace; les définitions des coordonnées rectilignes, polaires, tangentielles; les formules de transformation de ces coordonnées, et leurs principales applications à la droite et au plan. On y trouve aussi sous une forme très condensée la théorie du centre des coniques et des quadriques; des diamètres et des plans diamétraux; la résolution de certains problèmes relatifs aux tangentes et aux plans tangents.

Dans le § 2 et le § 7, les coordonnées trilinéaires et tétraédriques sont définies comme elles l'ont été par Clebsch. C'est au moyen de ces coordonnées qu'ont été faites presque toutes les démonstrations des §§ suivants :

Dans le § 8 se trouve la démonstration du principe de dualité considéré avec le caractère général qui lui a été donné par Chasles et appelé par Clebsch *affinité dualistique*. Dans le n° 422, on trouve dans quelles conditions l'affinité dualistique se transforme en réciprocité polaire.

VII. *Compléments d'arithmétique et d'algèbre* (51 pages). 1. Théorie des congruences. 2. Sur le nombre des entiers qui peuvent rendre un polynôme exactement divisible par un entier donné. 3. Théorèmes de Wilson, de Fermat et d'Euler. 4. Sur le nombre des entiers premiers et inférieurs à un nombre donné. 5. Démonstration tirées de la considération de l'ordre. 6. Des congruences binômes. 7. Des équations binômes; inscription des polygones réguliers dans le cercle.

Ce chapitre n'a guère reçu d'additions dans la nouvelle édition.

En terminant cette analyse sommaire du livre de M. Dauge, nous le recommandons vivement aux professeurs de l'enseignement moyen. Nous le recommandons surtout à ceux qui ont l'intention d'écrire un manuel ou un traité sur quelqu'une des branches des mathématiques élémentaires. Il paraît chaque année en Belgique, en France, en Allemagne et ailleurs sans doute, tant de mauvais livres intitulés : *Arithmétique*, *Algèbre*, *Géométrie*, etc., dont les auteurs ne se doutent pas des difficultés qui se rencontrent dans le domaine des éléments! La théorie des quantités négatives, la théorie des quantités imaginaires, la méthode des limites, les premiers principes de la géométrie, etc. sont exposés dans ces écrits éphémères avec la tranquillité de l'ignorance. On peut espérer que la nouvelle édition de la méthodologie de M. Dauge, plus encore que l'édition autographiée de 1883, contribuera à diminuer le nombre de ces manuels sans valeur et hâtera dans notre pays la publication de bons livres sur toutes les branches des mathématiques élémentaires. (P. M.)

NOTES MATHÉMATIQUES.

16. *Solution géométrique d'une question de concours de première scientifique en 1895*; par M. Déprez. *En un point* M *d'une parabole on mène la normale qui rencontre en* N *l'axe de la courbe*; *de* N *comme centre avec* NM *pour rayon, on décrit une circonférence à laquelle on mène les tangentes passant par le foyer de la parabole. Trouver le lieu géométrique des points de contact quand le point* M *se déplace sur la parabole.*

Soient : T le point de contact d'une tangente menée du foyer F à la circonférence; P le point où la tangente en M coupe l'axe de la parabole ; M′ et T′ les projections des points M et T sur cet axe. On a

$$\overline{NM}^2 = NM'.NP = p.2NF, \quad \overline{NT}^2 = NF.NT';$$

comme NM = NT, ces égalités entraînent NT′ = 2*p*. Ensuite

$$\overline{TT'}^2 = NT'.\ T'F = 2p.\ FT', \text{ ou } y^2 = 2px,$$

en prenant F pour origine des condonnées. Le point T décrit donc une parabole égale à la parabole proposée.

17. *Weierstrass.* Le doyen des géomètres allemands contemporains, Charles Weierstrass, a 80 ans depuis le 31 octobre 1895. L'état précaire de sa santé l'a obligé depuis plus de dix ans à renoncer à son enseignement à l'Université de Berlin, mais il n'a pas renoncé au travail intellectuel, car il a entrepris, avec la colloboration d'un groupe de ses élèves, la publication d'une édition, en huit volumes in 4°, de ses œuvres mathématiques. Voici quelques détails sur les dates principales de la vie de l'illustre géomètre. M. Weierstrass est né à Ostenfelde en Westphalie. Il fit ses études moyennes au gymnase de Paderborn ; il étudia le droit à l'Université de Bonn de 1834 à 1838, les mathématiques et la physique à celle de Munster, de 1838 à 1840. De 1842 à 1848, il fut professeur de mathématiques et de physique au progymnase de Deutchkrone, puis au Gymnase de Braunsberg Les travaux remarquables sur les fonctions abéliennes qu'il publia dans un programme de ce gymnase révélèrent un maître. En 1856, il fut nommé membre de l'Académie des sciences de Berlin et professeur extraordinaire à l'Université; en 1864, professeur ordinaire. M. Weierstrass est membre des principales Académies de l'Europe. Ses élèves et ses admirateurs ont fêté son 70° anniversaire en 1885, et il y a deux mois, son 80° anniversaire.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

Question 938.

(Voir *Mathesis* (2), IV, p. 127).

Trouver une conique telle que les polaires des sommets d'un quadrilatère donné, forment un quadrilatère égal à un second quadrilatère donné. (Jubl).

Solution par M. Cl. Servais. Soient A, B, C, D, les sommets du premier quadrilatère, a', b', c', d' les côtés du troisième. Les deux systèmes plans peuvent être rapportés réciproquement l'un à l'autre et d'une seule manière si aux éléments A, B, C, D de l'un, on fait correspondre les éléments a', b', c', d', de l'autre. Déterminons dans les deux systèmes, les points O et O' dont les droites correspondantes sont à l'infini, et déplaçons le second système, de façon à faire coïncider les points O et O'. Aux droites l, m, n,..... du premier système, passant par le point O, correspondent les points à l'infini L', M', N',... du second, et les deux faisceaux (l m n...) et O (L', M', N',...) sont projectifs. Par une rotation convenable du second faiseau on peut rendre ces deux faisceaux involutifs; les deux systèmes réciproques forment alors un système polaire, et le lieu des éléments incidents est la conique cherchée.

On traite de même le problème suivant :

Trouver une quadrique telle que les plans polaires des sommets d'un pentagone gauche donné, forment un pentaèdre égal à un pentaèdre donné.

×Question 951.

(Voir *Mathesis*, (2), IV, p. 152.)

Soient dans un même plan, OX, OY, OZ *trois droites issues d'un même point. On prend sur* OX, *deux points fixes* A *et* B, *et sur* OY *un point variable* C. *Les droites* CA *et* CB *rencontrent* OZ *aux points* A', B'. *Démontrer que* $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OB'} = const.$(*) (J. N.)

(*) Le lecteur est prié de faire la figure, en traçant pour plus de facilité OZ entre OX et OY. — Les solutions étant très variées, nous avons dû grouper ensemble celles qui emploient les mêmes moyens. (J. N.)

Solution par M. A. L. Menons CP parallèle à OZ et coupant OX en P, CQ parallèle à OX et rencontrant OZ en Q.

On a

$$\frac{OP}{OA}=\frac{A'C}{A'A},\quad \frac{OQ}{OA'}=\frac{CA}{A'A},$$

d'où

$$\frac{OP}{OA}+\frac{OQ}{OA'}=1.$$

Pareillement

$$\frac{OP}{OB}+\frac{OQ}{OB'}=1,$$

et par soustraction

$$OP\left(\frac{1}{OA}-\frac{1}{OB}\right)+OQ\left(\frac{1}{OA'}-\frac{1}{OB'}\right)=0,$$

ou

$$\frac{1}{OA'}-\frac{1}{OB'}=\frac{OP}{OA}\left(\frac{1}{OB}-\frac{1}{OA}\right)=const.$$

En transformant par inversion relativement au pôle O, on a le théorème suivant, qui pourrait du reste s'établir directement :

Soient dans un même plan trois droites OX, OY, OZ. *On prend sur* OX *deux points fixes*, A *et* B; *sur* OY, *un point variable* C. *Les circonférences* OAC, OBC *coupent* OZ *en* A'B'. *Le segment* A'B' *est constant* (*).

Solution par MM. Jean Jonesco, Camus, Bovy (Liége), Strymeersch, Poort (Groningue), François (La Haye). En exprimant que le triangle COA est égal à la somme des triangles COA' et A'OA, on trouve

$$OA.OC\sin YOX = OA.OA'\sin ZOX + OA'.OC\sin YOZ,$$

ou

$$\frac{\sin YOX}{OA'}=\frac{\sin ZOX}{OC}+\frac{\sin YOZ}{OA}.$$

(*) Les triangles CAB, CA'B' sont équiangles, d'où AB : A'B' = CA : CA'. Le triangle CAA' est toujours semblable à lui-même, car les angles CAA', ACA' sont égaux à YOZ, XOZ; donc le rapport CA : CA' est constant. (J. N.)

Par analogie

$$\frac{\sin YOX}{OB'} = \frac{\sin ZOX}{OC} + \frac{\sin YOZ}{OB};$$

d'où, par soustraction,

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OB'} = \left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OB}\right)\frac{\sin YOZ}{\sin YOX} = \text{const.}$$ C. Q. F. D.

Les équations des droites CA, CB rapportées aux axes OX, OZ sont

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{a'} = 1, \quad \frac{x}{b} + \frac{z}{b'} = 1;$$

les coordonnées de C vérifient ces équations et celle qu'on en déduit par soustraction :

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)x + \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}\right)z = 0.$$

Le rapport $x : z$ reste constant lorsque C parcourt OY ; donc...

Solution par M. Verdeyen. Si l'on prend OZ pour une polaire, et qu'on désigne par (a, α), (b, α), (m, β) les coordonnées des points A, B, C, les équations des droites CA, CB sont

$$\frac{1}{\rho}\sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{a}\sin(\beta - \omega) + \frac{1}{m}\sin(\omega - \alpha) = 0,$$

$$\frac{1}{\rho}\sin(\alpha - \beta) + \frac{1}{b}\sin(\beta - \omega) + \frac{1}{m}\sin(\omega - \alpha) = 0.$$

En exprimant qu'elles sont vérifiées par les coordonnées (a', o), (b', o) des points A', B' et en soustrayant l'une de l'autre les égalités ainsi obtenues, on trouve

$$\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{b'}\right)\sin(\alpha - \beta) + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\sin\beta = 0,$$

ce qui démontre le théorème.

Solution par MM. Servais, Bastin. Les ponctuelles décrites par les points A' et B' sont projectives et ont pour point double unique le point O. Donc (Chasles, G. S., p. 105) :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OB'} = \text{const.}$$

REMARQUE. M. Servais observe que l'on démontre de même le théorème suivant :

Soient A *et* B *deux points fixes d'une conique*, C *un point variable de cette courbe. Les droites* CA *et* CB *rencontrent la tangente menée en un point fixe* O *de la courbe, en deux points* A′, B′ *tels que* $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OB'} = \text{const.}$

Solution par M. J. JONESCO. On a

$$A'OA = COA - COA', \text{ ou } \frac{A'OA}{COA.\,COA'}, = \frac{1}{COA'} - \frac{1}{COA}.$$

La première fraction peut s'écrire

$$\frac{OA.OA' \sin YOX}{OA.OC \sin ZOX \times OA'.OC \sin ZOY};$$

donc elle ne change pas lorsque la sécante tourne autour de C(*) et l'on a

$$\frac{1}{COA'} - \frac{1}{COA} = \frac{1}{COB'} - \frac{1}{COB},$$

ou

$$\frac{1}{COA'} - \frac{1}{COB'} = \frac{1}{COA} - \frac{1}{COB}.$$

Remplaçons COA′ par $\frac{1}{2}$ OC.OA′ sin ZOY, etc.

Autres solutions par MM. BARISIEN, PETRESCU, SERVAIS, CRISTESCU, DROZ-FARNY, COUTURIER et DÉPREZ; la plupart font intervenir les deux relations que donnent les triangles OAA′, OBB′ coupés par les transversales BB′, AA′.

×Question 982.

(Voir *Mathesis*, (2) IV, p. 240).

a, b, c étant des nombres réels, démontrer que les racines de l'équation

$$\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x+b} + \frac{1}{x+c} = \frac{3}{x}$$

sont toujours réelles. (J. N.)

Solution par MM. E. BARBETTE, MANDART, E. COLART, J. JONESCO,

---

(*) De là un théorème dont M. Mannheim s'est servi dans plusieurs recherches. Il faut tenir compte des signes des aires COA′, COA. (J. N.)

KLOMPERS, A. BOUTIN, FRANÇOIS (la Haye), DROZ-FARNY, CRISTESCU, BASTIN. L'équation proposée se ramène à

$$(a+b+c)x^2 - 2(ab+bc+ca)x + 3abc = 0.$$

La réalité des racines exige

(1) $$(ab+bc+ca)^2 - 3abc(a+b+c) > 0.$$

Le premier membre de cette inégalité peut prendre la forme

$$a^2b^2 + b^2c^2 + ca^2 - 2abc(a+b+c)$$

ou

$$\tfrac{1}{2}[a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2];$$

donc etc.

On peut aussi considérer le polynôme (1) comme un trinôme du second degré en a :

$$a^2(b^2 - bc + c^2) - bc(b+c)a + b^2c^2;$$

ce trinôme ayant des racines imaginaires et un premier terme positif, a toujours le signe plus, donc....

Solution par M. POORT. Supposons $a > b > c$, et écrivons l'équation sous la forme.

$$f(x) = x(x+b)(x+c) + x(x+a)(x+c) +$$
$$x(x+a)(x+b) - 3(x+a)(x+b)(x+c) = 0.$$

$f(x)$ est une fonction du second degré, qui pour $x = -a, -b, -c$ prend les valeurs :

$$f(-a) = -a(-a+b)(-a+c) < 0,$$
$$f(-b) = -b(-b+a)(-b+c) > 0,$$
$$f(-c) = -c(-c+a)(-c+b) < 0;$$

donc l'équation $f(x) = 0$ a une racine comprise entre $-a$ et $-b$, une autre entre $-b$ et $-c$.

M. MANDART observe que l'équation proposée peut s'écrire

$$\left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x+b} - \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x+c} - \frac{1}{x}\right) = 0,$$

ou

$$\frac{a}{x+a} + \frac{b}{x+b} + \frac{c}{x+c} = 0;$$

sous cette forme elle a été discutée dans *Mathesis*, (1), I, p. 61.

QUESTIONS D'EXAMEN.

708. Deux cercles sont tangents extérieurement. Soient x, y leurs rayons, et a, b les longueurs de deux tangentes rectangulaires comprises entre leur point d'intersection et le point de contact. Démontrer la relation

$$2(ay + bx) = a^2 + b^2.$$

709. Le produit des distances des deux foyers d'une ellipse à une normale, divisé par le carré de l'ordonnée du point d'incidence de la normale est une constante. (E. N. Barisien.)

Soit φ l'angle d'anomalie excentrique du pied M (x, y) de la normale; les distances δ et δ' des foyers à cette normale ont pour expression

$$\delta = \frac{ac\sin\varphi - c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}, \quad \delta' = \frac{ac\sin\varphi + c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}.$$

On en déduit

$$\delta\delta' = c^2\sin^2\varphi = \frac{c^2y^2}{b^2}.$$

La démonstration géométrique ne présente pas de difficulté : Si l'on fait

$$MF = \rho, \quad MF' = \rho', \quad FMF' = \alpha,$$

on a

$$\delta = \rho\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \delta' = \rho'\sin\frac{\alpha}{2}, \quad 2cy = \rho\rho'\sin\alpha$$

$$4c^2 = \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\alpha = (\rho + \rho')^2 - 4\rho\rho'\cos^2\frac{\alpha}{2}, \text{ etc.}$$

710. Dans l'hyperbole équilatère, deux cordes focales perpendiculaires ont des longueurs égales. (E. N. Barisien.)

En effet, il existe un rapport constant entre la longueur d'une corde focale et le carré du diamètre parallèle à la corde.

711. Sur les côtés AB, AC de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC on construit extérieurement les carrés ABDE, ACGH. Les droites CD, BG se coupent en un point I et rencontrent AB, AC respectivement aux deux points K, L. Démontrer que le triangle BIC est équivalent au quadrilatère AKIL. (Brierley).

On sait que AK = AL; ensuite

aire DBC = $\frac{1}{2}$ ABDE = DBK + AKE = DBK + ABL, d'où BKC = ABL, etc.

712. On donne deux droites Ox, Oy et un point P. Une circonférence

quelconque passant par les points O et P rencontre Ox en A, Oy en B. Démontrer géométriquement que la droite AB enveloppe une parabole.

Les projections K, M, N de P sur AB, OX, Oy étant en ligne droite, AB est tangente à une parabole ayant pour foyer P, pour tangente au sommet MN.

(Démonstration communiquée par M. MANDART).

713. Soient, en un point M d'une parabole de sommet S et de foyer F : R le rayon de courbure, n la longueur de la corde normale, c la longueur de la corde commune à la parabole et au cercle osculateur. Démontrer les relations

$$\frac{c^2 n R}{\overline{MF}^4} = 32, \quad \frac{c^4 n^2}{\overline{MF}^5 . SF} = 65536. \qquad (X.)$$

A déduire des égalités

$$R^2 = \frac{(2x+p)^5}{p}, \quad n^2 = \frac{p(2x+p)^5}{x^3}, \quad c^2 = 32x(2x+p), \quad MF = \frac{2x+p}{2}.$$

QUESTIONS PROPOSÉES,

1047. Le lieu des projections du foyer d'une parabole sur ses normales est une parabole (théorème connu). Le lieu des projections du foyer d'une parabole sur les normales à sa développée est une cubique.

(E. N. BARISIEN.)

1048. Trouver une construction simple pour déterminer deux points correspondants de la *transformation* définie par l'équation générale du second degré,

$$Au^2 + 2Bzu + Cz^2 + 2Du + 2Ez + F = 0$$

entre deux variables complexes u et z.

***1049.** Résoudre et discuter le système

$$\sin y \cos z = \sin a,$$
$$\sin z \cos x = \sin b,$$
$$\sin x \cos y = \sin c. \qquad (J. N.)$$

***1050.** Calculer, en fonction des côtés, le rapport des segments déterminés sur un côté d'un pseudocarré par la perpendiculaire abaissée du milieu du côté opposé. (E. COLART.)

Rectification. Page 249, ligne 2 en remontant, lire pq au lieu de $\alpha\beta$.

TABLE DES MATIÈRES(*).

ARITHMÉTIQUE; ANALYSE INDÉTERMINÉE.

Pages.

×Sur un théorème d'arithmétique; par MM. Nauticus et M. Meurice . . 37, 64
×Questions d'arithmologie, par M. de Rocquigny 57
×Un problème d'arithmétique 140
×Question 916; solution par MM. Brocard, etc 23
×Question 958; solution par MM. Fauquembergue, etc. 76
×Question 924; solution par M. Fauquembergue 101
×Question 925; solution par M. Fauquembergue 125
×Question 927; solution par M. Fauquembergue 125
×Question CCCXII; solution par M. Fauquembergue 126
Question CCCXIII; solution par M. Fauquembergue. 175
Question CCXIII; solution par M. Fauquembergue 213

ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE.

Sur l'équation bicarrée; par M. Hermite 11
Questions de maximum et de minimum; par un abonné 33
Sur la sommation des puissances semblables des n premiers nombres triangulaires; par M. Barbette 111
Sur l'inégalité $x - \sin x < \frac{1}{6} x^3$ 117
Sur deux séries trigonométriques; par M. Barbette 135
Sur les valeurs principales des radicaux; par M. De Tilly 177, 217
Question 831; solution par MM. Cristescu et J. Jonesco. 19
×Question 835; solution par M. Fauquembergue 91
×Question 933; solution par MM. Fauquembergue et Cristescu 150
×Question 811; solution par M. Fauquembergue 165
×Question 816; solution par M. Fauquembergue 207
×Question 936; solution par MM Fauquembergue, etc. 211
×Question 941; solution par MM. Lemoine, etc. 238
×Question 982; solution par MM. E. Barbette, Mandart, etc. 277
×Question 982; solution par MM. Barbette, etc. 277

×GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE, MÉTAGÉOMÉTRIE.

Solution d'un problème de géométrie 12
Questions de maximum et de minimum, par un abonné. 33

(*) Pour les rectifications, voir pp. 56, 128, 176, 240, 280. Les articles marqués d'une croix n'exigent, pour être compris, que la connaissance des mathématiques élémentaires.

Pages.
Sur les premiers principes de la métagéométrie, etc.; par M. Mansion . . 63
Note sur le triangle; d'après D Juan y Duran Loriga 85
Quadrature approchée du cercle 87
Sur la transformation continue; par M. Liénard 115
Sur la géométrie de la sphère 139, 158, 195
Sur les centres isogones; par M. Mandart 153
Théorèmes de géométrie élémentaire; par M. Jonesco 157
Théorèmes sur des parallélogrammes 195
Démonstrations géométriques d'un théorème de M. Sondat; par MM. Haerens, Meurice 265
Triangles orthohomologiques; par M. J. Neuberg 267
Question 917; solution par MM. Poort, etc. 52
Question 921; solution par MM. Lemoine, etc. 53
Question 884; solution par M. Quint. 70
Question 891; solution d'après M. Absolonne 93
Question 893; solution par MM. Déprez, François, etc. 95
Question 920; solution par M. François 100
Question 878; solution par MM. Absolonne, etc. 118
Question 879; solution par MM. Absolonne, etc. 123
Question 928; solution par MM. Vanderstegen, etc. 146
Question 929; solution par MM. Droz-Farny, etc. 172
Question 677; solution par M. Déprez 203
Question 799; solution par M. Cristescu 206
Question 681; solution par MM. Anderson et Déprez. 229
Question 950; solution par M. Soons 261
Question 951; solutions par MM. Jonesco, etc.. 274

COURBES ET SURFACES DU SECOND DEGRÉ; GÉOMÉTRIE PROJECTIVE.

Sur l'axe d'homologie du triangle fondamental et du triangle de Brocard; par M G. Tarry 5
Sur une certaine enveloppe; par M. Desaint 8
Sur un théorème de Poncelet; par M. Neuberg 13
Résumé des propriétés concernant les triangles d'aire maximum inscrits dans une ellipse donnée; par MM. Barisien, etc. 42, 81
Sur quelques coniques du plan d'un triangle, par MM. Neuberg, etc. 60, 117, 226
Sur un groupe de coniques, par M. Spijker. 105, 176
Propriétés des cercles de Chasles; par M. Barisien 129, 158, 241
Podaires de parabole 196
Théorèmes sur les coniques 197
Concours d'agrégation; math. élém. Solution par M. Neuberg. 224
Condition pour qu'un système de trois axes soit trirectangle; par M. Dauge. 250
Concours de première scientifique; solution par M. Déprez. 273
Question 902; solution par MM. Déprez et Polak 21

Pages.
Question 903; solution par MM. Bastin, etc. 22
Question 919; solution par M. Cl. Servais 24
Question 923; solution par MM. Brocard, ... 28
Question 885; solution par MM. Brocard, etc. 47
Question 931; solution par MM. Hacken, Droz, etc. 74
Question CXXII et CXXIII; solution par M. Neuberg 101, 102
Question 930; solution par MM. Gillet, etc. 147
Question 907; solution par MM. Servais et Barisien 167
Question 911; solution par MM. Servais, etc. 167
Question 912; solution par MM. Servais, etc. 169
Question 934; solution par MM Lemoine, etc. 173
Question 635; solution par M. Neuberg 198, 227
Question 943; solution par MM. Gillet, etc. 212
Question 913 et 914; solution par M. Servais 233
Question 937; solution par MM. Droz-Farny, etc. 258
Question 938; solution par M. Servais 274

COURBES ET SURFACES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Centre de courbure des podaires, par M. d'Ocagne 87
Sur les centres de gravité, par M. Desaint 88
Sur les courbes algébriques, par M. Gob 183
Sur un cas remarquable des transformations centrales, par M. de Longchamps. 186
Sur une transformation centrale, par M. Meurice. 191
Question 894; solution par MM. Vladimirescu, etc. 20
Question 885; solution par MM. Brocard, etc. 47
Question 898; solution par MM. Vladimirescu, etc. 72
Question 904; solution par M. Retali. 98
Question 848; solution par MM Meurice et Servais 143
Question 918; solution par MM. Déprez, etc. 170
Question 890; solution par MM. De Longchamps, etc. 230
Question 922; solution par MM. Déprez, etc. 236

CALCUL DIFFÉRENTIEL, CALCUL INTÉGRAL, THÉORIE DES SÉRIES.

Sur divers points d'analyse; par M. E. Cesáro. 155
Question 894; solution par MM. Vladimirescu, etc. 20
Question 906; solution par MM. Cristescu, etc. 50
Question 872; solution par MM. Brocard et Collette 209

BIBLIOGRAPHIE; BIOGRAPHIE.

Arthur Cayley (P. M.) 84
Weierstrass 273
Lasala y martinez. Teoria de las cantidades imaginarias 15
E. Gelin. Recueil de tables numériques. 17
Carboni. Geometria descrittiva elementare 18

Pages.

De Seguier. Formes quadratiques et multiplication complexe, d'après Kronecker 18
E. Cesaro. Introduzione alla teoria matematica della Elasticita 18
Vivanti. Il concetto d'infinitesimo... (P. M.) 18
C. Bergmans. Compléments d'arithmétique et d'Algèbre 18
Annuaire du bureau des longitudes 19
Brisse. Cours de géométrie descriptive 45
Giraud. Algèbre 46
Schlesinger. Handbuch der linearen Differentialgleichungen 46
Antomari et Laisant. Questions de Mécanique (H. B.) 47
Castellano. Lezioni di Mecanica razionale 68
Garbieri. Trattato di Aritmetica razionale (E. Gelin) 68
Ch. Henry. Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques 70
Demoulin. Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle, etc. . . 89
B. Niewenglowski. Cours de géométrie analytique (J. N.) 89
Balbin. Tratado de esteréometria genetica (J. N.) 112
Gérard. Trigonométrie. (J. N.) 113
Maupin. Questions d'Algèbre (J. N.) 113
Breithof. Traité de perspective linéaire (J. N.) 114
Breithof. Guide pratique du dessinateur (J. N.) 114
Gundelfinger-Dingeldey. Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte (J. N.). 141
Holzmuller. Methodisches Lehrbuch der Elementar-Mathematik . . . 142
Versluys. Deelbaarheid en repeteerende breuken (J. N.) 163
Papelier. Leçons sur les coordonnées tangentielles (J. N.). 164
Bioche. Eléments de géométrie (J. N.) 164
Crevets. Essai sur le postulat d'Euclide (P. M.) 193
H. Laurent Traité d'Algèbre, Compléments. 193
Collette. Exercices de calcul différentiel. 193
Antomari. Cours de Mécanique 194
E. Verhelst. 2400 nouvelles questions mathématiques 195
Ed. Lucas. L'arithmétique amusante (H. B.). 223
Gérard. Bulletin de Mathématiques élémentaires 254
Heiberg. Euclidis opera omnia, t. VII. 254
Burali-Forti. Logica matematica 255
Stäkel. Die Theorie der Parallellinien (P. M.) 255
S. Gunther. Erd- und Himmelsgloben 255
Colart. Traité d'Algèbre élémentaire 255
Resal. Traité de Mécanique générale 256
Painlevé. Cours complémentaire de Mécanique rationnelle. 256
Tournois. Leçons complémentaires d'Algèbre et notions de géométrie analytique 257
Vogt. Leçons sur la résolution algébrique des équations 257
Dauge. Cours de méthologie mathématique (P. M.) 269

QUESTIONS D'EXAMEN.

Pages.
Questions. 666-669, 670-675, 676-681, 682-685, 686-688, 689-691, 692-693, 694-697, 698-701, 703-707 et 709, 702, 708, 710-712,
pp. 30, 55, 79, 103, 127, 151, 176, 214, 239, 263, 279
École polytechnique de Paris; concours de 1895 133
Agrégation des sciences mathématiques (1895). Mathématiques élémentaires, solution par M. Neuberg 224

VARIA.

Vocabulaires mathématiques (P. M.) 86
Sur une citation de Laplace (J. M.) 156
Curieuse coïncidence (J. M.) 157
Mathématiques et mathématiciens (P. M) 184

SUPPLÉMENTS (76 pages).

POULAIN. Le Stang-Planimètre (10 pages).

CH. HERMITE. Sur les nombres de Bernoulli (5 pages).

P. MANSION. Essai d'exposition élémentaire des principes fondamentaux de la géométrie non euclidienne de Riemann (14 pages).

POULAIN Quelques propriétés angulaires des cercles (11 pages).

P. MANSION. Notice sur les recherches de M. De Tilly en métagéométrie (12 p.)

J. NEUBERG. Compte rendu de la *Synopsis der höheren Mathematik*, par M. Hagen (8 pages).

D'OCAGNE. Courbure du contour apparent d'une surface (2 pages).

P. MANSION. Sur l'enseignement élémentaire de l'Algèbre en 1676 (5 pages).

DE LA VALLÉE-POUSSIN. Sur la géométrie non euclidienne. Rapport sur ce travail par M. De Tilly (9 pages).

QUESTIONS(*).

	POSÉE (1) I ou (2) I	RÉSOL (2) V
95 . .	206 (28)	NR
	(1) III ou (2) I	
252 . .	143 (28)	NR
267 . .	175 (28)	NR
	(1) IV ou (2) I	
×333 . .	119 (29)	NR
353 .	159	
×357 . .	159	
383 . .	231 (29)	NR
387, 2e p.	231 (29)	NR

	POSÉE (1) V ou (2) I	RÉSOL (2) V
411 . .	23 (29)	NR
415 . .	46 . .	NR
	(1) VI ou (2) I	
505, 2e p.	23 (30)	NR
×513 . .	71 (30)	NR
	(1) VII ou (2) I	
594 . .	264 (31)	NR
597 . .	280	
598 . .	280 (31)	NR

	(1) VIII ou (2) I	(2) V
×635 .	279 (31)	198, 227
	(1) X	
×677 . .	72 . .	203
×681 .	95 . .	229
699 . .	279	
	(2) II	
767 . .	128	
778 . .	176 . .	NR
782 . .	215 . .	NR
×783 . .	216	

(*) La rédaction de *Mathesis* a en portefeuille de bonnes solutions des questions suivantes sauf celles qui sont marquées des lettres NR (non résolues); elle engage ses collaborateurs à porter de préférence leurs efforts sur celles-ci.

	(2) II	(2) V
784	216	
785	216	NR
×789	240	
×799	281	206
	(2) III	
×803	31	
×811	55	165
×814	56	NR
815	56	NR
×816	56	207
825	80	NR
831	103	19
×835	104	91
848	152	143
857	176	
872	215	209
876	216	NR
×878	216	118
×879	216	123
881	240	23
882	240	
884	240	70
885	240	47
×886	240	
×889	264	
890	264	230
×891	264	93
892	264, 280	
×893	264	95
894	264	20
898	280	72
	(2) IV	
901	31	
902	31	21
903	32	22
904	32	98
905	32	NR
906	32	50
907	32	167
×909	55	
910	55	
911	55	167
912	56	169
913	56	233
914	56	233
×916	56	23
917	56	52
918	56	170
919	79	24
×920	79	100
×921	79	53, 101
922	80	236
923	80	28
924	80, 227	101
×925	80	125
×927	80	125
×928	103	146, 228
×929	103	172

	POSÉE (2) IV	RÉSOL (2) V
930	104	147
931	104	74
932	104	NR
×933	104	150
934	104	173
935	104	
×936	104	211
937	127	258
938	127	274
939	127	NR
940	127	
×941	128	238
942	128	
943	128	212
×944	128	
945	128	
946	151	
947	151	
×948	151	
×949	151	
×950	152	261
×951	152	274
952	152	
953	152	
954	152	
955	175	
956	175	
957	175	
×958	175	76
×959	175	
×960	176	
×961	176	
962	176	
×963	176	
964	214	
965	215	
966	215	
967	215	
×968	215	
×969	215	
970	216	
971	216	
972	216	
×973	216	
974	239	
975	239	
976	239	
977	239	
978	239	NR
979	240	NR
×980	240	
×981	240	
×982	240	277
983	263	
984	263	
985	263	
×986	263	

	POSÉE (2) IV	RÉSOL (2) V
×987	264	
988	264	
×989	264	
990	264	
991	264	
992	279	
993	279	
994	279	
×995	280	
×996	280	
×997	280	
998	280	
999	280	
1000	280	
	(2) V	
×1001	31	
×1002	32	NR
1003	32	
×1004	32	
1005	32	
1006	56	
1007	56	
×1008	56	
1009	56	
1010	80	
1011	80	
×1012	80	
1013	80	NR
1014	104	
×1015	164 et 240	
×1016	104	
×1017	104	
×1018	104	
×1019	128	
×1020	128	
1021	128	
1022	128	
×1023	152	
1024	152	
1025	152	
1026	152	
×1027	176	
1028	176	
×1029	176	
1030	176	NR
×1031	215	
1032	215	
1033	215	
×1034	216	
1035	216	NR
1036	216	
1037	216	
×1038	216	NR
×1039	240	
1040	240	
×1041	240 et 264	NR
1042	240	

	POSÉE (2) V	RÉSOL (2) V
1043	264	NR
×1044	264	NR
1045	264	NR
1046	264	NR
1047	280	NR
1048	280	NR
1049	280	NR
1050	280	NR

QUESTIONS DE LA N. C. M.

Nos	Résol. (2) V
122	101
123	102
213	213
312	126
313	175

TABLE DES NOMS.

Absolonne, 20, 93, 119, 123, 233.
Alauda, 261.
Alembert (d'), 158, 257.
Anderson, 229.
Antomari, 47, 194.
Apell, 251.
Apollonius, 83, 255.
Archimède, 223, 255.
Balbin, 112.
Ball (Rouse), 56.
Barbarin, 229.
Barbette, 24, 111, 135, 278.
Barisien, 22, 24, 28, 30, 32, 42, 48, 55, 56, 72, 74, 80, 96, 98, 115, 124, 128, 129, 147, 152, 158, 167, 174, 212, 216, 236, 239, 240, 241, 263, 264, 277, 279, 280.
Barniville, 50.
Bastin, 22, 149, 260, 276, 278.
Bellens, 115.
Beltrami, 271.
Bergmans, 18.
Bernoulli, 266.
Bertrand (J), 181.
Besso, 91, 207.
Berzélius, 195.
Biddle, 146.
Bioche, 164.
Bolyai, 255.
Bouquet, 131.
Bouquet de la Grye, 19.
Boutin, 126., 278.
Bovy, 275.
Bozoky (de), 24.
Breithof, 114.
Brierley, 279.
Briot, 131.
Brioschi, 85.
Brisse, 45.
Brocard, 5, 6, 23, 47, 48, 82, 83, 126, 203, 210, 212, 224, 237.
Buisseret, 30, 236.
Burali-Forti, 255.
C. (A), 32, 118, 128, 228, 264.
Camus, 275.
Carboni, 18.
Carnot, 272.
Carvallo, 47.
Casey, 260.
Castellano, 68.
Catalan, 19, 88, 101, 165, 271.
Cauchy, 18, 63.
Cazamian, 176, 216.
Cayley, 84.
Cesáro (E), 6, 18, 88, 155, 209, 229.
Chasles, 5, 24, 129, 158, 240, 241, 272, 276.
Clebsch, 272.
Colart, 255, 277, 280.
Collette, 119, 193, 210.
Comberousse (de), 12.
Couturier, 30, 277.
Cremona, 198.
Crevets, 193.
Cristescu, 19, 29, 48, 50, 79, 81, 101, 126, 151, 176, 206, 212, 236, 238, 277, 278.
Dandelin, 197, 198.
Dauge, 250, 269.
Dedekind, 269.
Delahaye, 96, 115, 123, 238.
Delannoy, 223.
Demoulin, 89.
Déprez, 21, 24, 30, 48, 52, 54, 75, 80, 81, 95, 100, 101, 115, 126, 147, 149, 152, 167, 168, 170, 171, 173, 174, 203, 206, 212, 215, 230, 236, 238, 260, 273, 277.
Desaint, 8, 88, 128, 167.
De Tilly, 177, 217, 264.
Dingeldey, 141.
Droz-Farny, 22, 24, 30, 45, 48, 52, 54, 74, 100, 115, 123, 126, 149, 167, 168, 170, 172, 173, 176, 212, 226, 237, 238, 258, 277, 278.
Duhamel, 271.
Emelinckx, 104.
Emmerich, 203.
Eneström, 184.
Engel, 255.
Euclide, 185, 193, 254, 255.
Fairon, 79, 173, 174, 260.
Falisse, 177.
Fauquembergue, 76, 91, 101, 125, 126, 151, 165, 175, 195, 207, 211, 213, 264.
Faure, 260
Fermat, 76, 126, 272.
Fibonnacci, 166.
Fouché, 117.
François, 54, 95, 100, 126, 212, 275, 278.
Franel, 102.
Gariberi, 68.
Garnier, 139, 197.
Gauss, 185, 186, 255.
Gelin, 17, 70.
Genty, 32.
Gerard, 113, 254.
Gillet, 30, 48, 52, 73, 147, 212, 237.
Giraud, 46.
Gob, 183.
Graindorge, 177.
Gravière (de la), 185.
Greenstreet, 30.
Greiner, 21.
Gundelfinger, 141.
Gunther, 255.
Haas (Mlle de), 119.

Hacken, 20, 74, 96, 172, 212, 237.
Haerens, 265.
Hankel, 89.
Heiberg, 255.
Heinze, 112.
Hermite, 11, 86.
Holzmuller, 142.
Husquin de Rhéville, 87.
J. (F), 32.
Jacobi, 84, 255.
Janssen, 19.
Jerabek, 260.
Jonesco (B.), 157.
Jonesco (J.) 19, 24, 28, 50, 52, 54, 75, 80, 100, 101, 104, 126, 128, 147, 174, 198, 212, 237, 238, 275, 277, 278.
Jonquières (de), 28.
Jordan, 258.
Juel, 274.
Kepler, 18.
Kiepert, 6, 83.
Klompers, 278.
Kœhler, 81.
Kovalevsky, 185.
Kronecker, 18.
Lagrange, 256.
Laguerre, 115.
Laisant, 38, 47, 64, 113, 123, 186, 223, 276.
Lambert, 255.
Land (De), 216.
Laplace, 156.
Lasala, 15.
Laurent (H.), 193.
Lebon, 127.
Legendre, 84, 255, 271.
Lemoine, 6, 54, 75, 82, 96, 104, 115, 129, 132, 162, 173, 176, 198, 203, 214, 216, 223, 227, 229, 238, 241, 249, 258.
Liénard, 115.
Lobatchefsky, 225.
Longchamps (de), 26, 186, 193, 231.
Loriga, 86.
Lucas (Ed), 66, 115, 126, 175, 213, 223.
Lucke, 113.
Mackenzie, 125.
Mandart, 24, 30, 48, 56, 101, 115, 123, 125, 153, 172, 237, 238, 277, 278, 279.
Mannheim, 277.
Mansion, 18, 64, 85, 87, 193, 194, 195, 251, 255.
Massau, 68, 87, 89, 157.
Maupin, 113.
Meurice, 37, 64, 143, 173, 191, 232, 266.
Meyer, 195.
Miller, 128, 172.
Mister, 33.
Mittag-Leffler, 185.
Montanari, 104.
Muller, 86.
Nauticus, 37, 115.
Netto, 258.
Neuberg, 6, 11, 13, 17, 52, 60, 72, 91, 93, 101, 102, 104, 105, 108, 113, 114, 115, 119, 122, 142, 148, 164, 165, 193, 215, 226, 228, 230, 240, 257, 262, 264, 267, 274, 279
Newton, 272.
Niewenglowski, 89, 254.
Nijland, 95.
Noël, 141.
Ocagne (d'), 87.
Painlevé, 256
Peano, 271.
Petit-Bois, 20.
Petrescu, 151, 212, 277.
Poincaré, 19.
Poncelet, 13.
Poort, 50, 52, 171, 238, 275, 278.
Postula, 87.
Prime (Vte), 104, 251.
Puiseux, 218,
Quetelet 138, 158, 196, 210.
Quint, 71, 121, 124.
Realis, 152.
Rebière, 184.
Resal, 256.
Retali, 32, 52, 98, 167, 169, 233, 237.
Riemann, 63, 271.
Rocquigny (de), 23, 56, 57, 150, 171, 211.
Rouché, 12, 29.
Rouse Ball, 56.
Saccheri, 255.
Salmon, 28.
Sanjana, 152.
Schlesinger, 46.
Schmitz, 196.
Schoute, 105.
Schweikart, 255.
Seguier (de), 18.
Serret, 257.
Servais, 24, 75, 80, 145, 149, 167, 169, 234, 274, 276, 277.
Simson, 6, 83, 226.
Sollertinsky, 227.
Sondat, 265, 267.
Soons, 199, 261.
Spijker, 105, 260.
Stäckel, 255.
Steiner, 5, 6, 7, 42, 82, 83, 199, 216, 260.
Strymeersch, 126, 238, 275.
Tandel (Ch.), 195.
Tannery, 257.
Tarry, 5, 82, 216, 224, 229.
Taurinus, 255.
Terquem, 28.
Tesch, 227.
Théon, 254.
Thomas, 76.
Timmermans, 197.
Tisserand, 18.
Tournois, 257.
Transon, 131.
Tucker, 61, 62, 216, 226, 262.
Tzitzéica, 54, 81.
V. (P.J.), 54.
Van Aubel (H.), 97, 122, 263.
Vanderstegen, 126, 146, 212, 237.
Van Haarst, 227.
Verdeyen, 30, 237, 276.
Verhelst (F.), 54.
Versluys, 163.
Vivanti, 18.
Vladimirescu, 20, 72.
Vogt, 257.
Vries (J. De), 96.
Vuibert, 95, 240.
Wallis, 255.
Wasteels, 158.
Watson, 127.
Weber, 257.
Weierstrass, 273.
Weil, 10, 11.
Wilson, 272.
Woodal, 230.
Wurth (M.), 239.

LE STANG-PLANIMÈTRE

PAR

A. POULAIN S. J.

Sous-directeur aux Internats de l'Université catholique d'Angers

---

(Extrait du *Cosmos* du 15 décembre 1894)

PARIS
MAISON DE LA BONNE PRESSE
8, RUE FRANÇOIS Ier, 8
—
1895

LE STANG-PLANIMÈTRE

1. — Les ingénieurs ont parfois à mesurer les aires de certaines courbes, soit pour éviter des intégrations qui résistent à l'analyse, soit parce que la fonction à intégrer n'est connue que par le tracé d'un diagramme.

Plusieurs instruments, tels que ceux d'Oppikofer (1827), Ernst, Beuvière, Amsler, etc., ont été inventés pour résoudre ce problème. Le plus simple de tous (non comme théorie, mais au point de vue pratique), est celui de M. Prytz, capitaine d'état-major de l'armée danoise. Il l'appelle *stang-planimètre* ou *planimètre-hachette*.

C'est une tige d'acier, recourbée à ses deux extrémités (fig. 1). L'une de celles-ci est formée d'une pointe qu'on promène à volonté sur le dessin. L'autre se termine par une petite hache qui entaille légèrement le papier, pour ne pas glisser à droite ou à gauche de la tige. Un crayon serait dévié par les moindres rugosités de la feuille ou par la déclivité de la table, surtout quand il marche à reculons. La distance entre la pointe P et le point d'appui H de la hachette est exactement de $0^m,25$. Je la représenterai par p.

Pour se servir de l'instrument, il y a deux règles différentes. Chacune suppose qu'on marque un point O à l'intérieur de la courbe. Mais l'une de ces règles (celle qui fut découverte tout d'abord) permet de prendre O comme on veut, dans la région centrale. L'autre, plus précise, suppose que O est le centre de gravité dont la position, du reste, est estimée à simple vue.

2. — Supposons d'abord la *première méthode*, qui laisse plus de liberté. Menons une droite OA jusqu'à la périphérie (fig. 2). Regar-

dons la surface S comme un secteur de 300° et faisons parcourir son contour à la pointe jusqu'à ce qu'elle revienne en O. La bachette avait d'abord une position quelconque OB; par exemple, elle était perpendiculaire à OA, ce qui permettait d'y appuyer la main gauche. Elle décrit une courbe M et le stang revient en OD, déterminant un arc de cercle BD avec la position initiale. Soit a l'arc BD.

Nous supposons dans tout ce qui va suivre que la courbe est de petite dimension et que les rayons issus de O ne dépassent pas $\frac{P}{4}$.

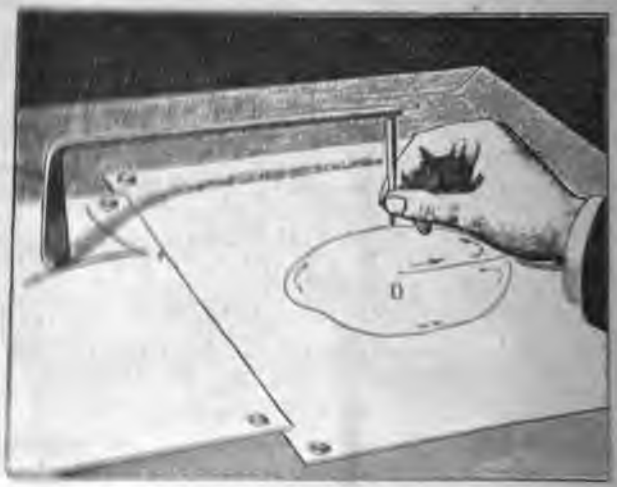


Fig. 1. — **Le Planimètre-bachette.**

c'est-à-dire 6 centimètres. L'expérience montre qu'alors l'arc a ne dépasse pas 11°. La courbe M a la forme de M qu'indique la figure 2. Elle traverse l'arc BD de manière à déterminer au-dessus une surface K, et, au-dessous, des surfaces K', K'' diverses.

Il y a quinze ans (en 1828), un jour que M. Peaucellier promenait sa canne sur une table, l'idée lui vint d'étudier les conditions qui assurent entre ces différentes surfaces. Il se convainquit bientôt que si la relation remarquable

$$K = pa + K' - K'',$$

où p désigne le double du [illegible] de rayons issus de O, était [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

il suffit donc de multiplier $p = 25^{cm}$ *par l'arc* a, *estimé en centimètres, et l'on a, en centimètres carrés, l'aire cherchée* S.

Pratiquement, on remplace *a* par sa corde, car on peut prouver que la différence est plus petite qu'un dixième de millimètre.

Si on a $E \gtrless E' + E''$, *la formule* $S = pa$ *n'est plus qu'approximative; mais on peut estimer à vue la valeur et le sens de l'erreur;* puisqu'elle égale $E - (E' + E'')$. Si on veut l'évaluer en centimètres carrés, il y a un moyen rapide que j'indiquerai dans le *Journal de mathématiques spéciales* (voir **4**).

3. — Rien n'empêche de recommencer plusieurs fois l'opération

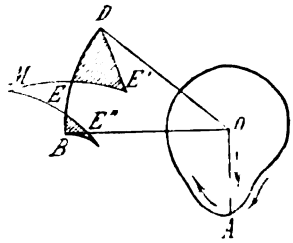


Fig. 2.

et de prendre la moyenne des arcs *a* ainsi obtenus. Il est bon aussi de refaire chaque parcours en sens contraire, pour corriger la légère influence de la déclivité de la table.

4. — La méthode précédente repose sur l'exactitude de la relation [1]; elle a besoin d'être démontrée. Dans sa brochure explicative (*), M. Prytz ne donne pas cette démonstration. Je crois savoir qu'il attend de l'avoir dégagée de certains postulats qui paraissent difficiles à établir. Par des considérations différentes, j'ai trouvé une démonstration que je publierai prochainement dans le *Journal de mathématiques spéciales.* C'est un corollaire d'un énoncé plus général (**).

(*) Elle accompagne l'instrument, qu'on trouve au prix de 14 fr. 50, chez M. Knudsen, ingénieur-opticien, à Copenhague.

(**) Voici mon énoncé : *Étant données deux courbes, l'une* M, *enveloppe d'un rayon tangentiel, constant ou variable* MN (c'est-à-dire d'un segment de tangente pris à partir du point de contact M); *l'autre,* N, *décrite par la seconde extrémité de ce rayon; si on rapporte ces courbes à un système de coordonnées rectilignes ou polaires, l'aire balayée par le rayon tangentiel égale la différence des aires correspondantes des deux courbes* N *et* M, *plus la différence* $T_0 - T$ *des aires déterminées dans ce système par le rayon initial et final.* La démonstration consiste à établir une équation différentielle.

5. — *La seconde règle* consiste à supposer que O est le centre de gravité. Il n'y a plus besoin de comparer les aires E, E′ + E″, car le calcul montre *a priori* que l'erreur est très petite. L'auteur donne ce calcul remarquable dans sa notice. Mais il n'a pas cherché à en déduire l'expression en nombres de l'approximation obtenue. Je suppléerai à cette petite lacune et je prouverai que *l'on peut compter sur une erreur relative de* $\frac{1}{30}$ ou *trois centièmes, dans les cas les plus défavorables,* qui sont assez rares. *Ordinairement, l'erreur est beaucoup plus petite.* Toutes choses égales, d'ailleurs, l'erreur relative diminue rapidement avec les dimensions (*).

Je vais maintenant exposer ce calcul, ayant soin de n'omettre aucun intermédiaire, et surtout de partager cette suite de transformations en plusieurs parties dont on aperçoive d'avance le but.

6. — *Formule préliminaire.* Soit AB une courbe quelconque dont

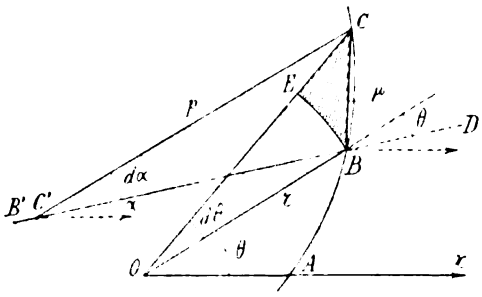


Fig. 3.

le point générateur B a pour coordonnées polaires r et θ (fig. 3). Quand la pointe du stang décrit cette courbe, la hachette décrit A′B′. Appelons α l'angle que fait avec la direction positive Ox, la droite BB′, prise de la hachette à la pointe. *Si la pointe parcourt l'arc infiniment petit* BC, *cherchons la valeur de* $d\alpha$.

Soit μ l'angle de OB et BC, et CE l'accroissement de r. Dans le triangle BCC′ on a

(*) La forme la plus défavorable est celle où l'axe déterminé par la position initiale OH du stang coupe l'aire en deux parties dont les centres de gravité sont aussi éloignés que possible de cet axe. C'est ce qui arrive quand la courbe ressemble à une lemniscate dont les retrécissements se trouvent sur l'axe OH. Mais cette forme devient, au contraire, très avantageuse si on fait tourner de 90° la position initiale du stang.

[2] $$CC' = CB\,\frac{\sin DBC}{d\alpha} = \frac{BC}{d\alpha}\,\sin(\mu + \theta - \alpha),$$

ou

[3] $$p\,d\alpha = BC\sin\mu\cos(\theta-\alpha) + BC\cos\mu\sin(\theta-\alpha).$$

Mais des formules connues des coordonnées polaires donnent

[4] $$EB = r\,d\theta = BC\sin\mu, \qquad CE = dr = BC\cos\mu.$$

Éliminant BC entre ces équations et [4], il vient

[5] $$p\,d\alpha = r\,d\theta.\cos(\theta-\alpha) + dr.\sin(\theta-\alpha).$$

7. — Supposons maintenant que la courbe AB soit celle dont nous voulons évaluer l'aire S, en regardant celle-ci comme un secteur AOB. Appelons φ la valeur que prend α lorsque, *par la pensée*, nous ramenons la pointe de B en O. Pour chaque valeur de α, il y a une valeur de φ. Soit φ_1 la valeur initiale de cet angle, celle qui correspond à A. Les positions initiale et finale du stang, dont la pointe serait ramenée en O, forment entre elles (*) l'angle $\varphi - \varphi_1$. Par suite, la formule approximative que nous avons à établir est

[6] $$S = p^2(\varphi - \varphi_1).$$

Il s'agit donc de passer de l'équation [5] à [6]. Pour cela, il faut, dans la première, introduire φ au lieu de α. A cette fin, 1° nous exprimerons, en fonction de φ, l'angle α et les expressions qui le renferment; 2° nous éliminerons α.

8. — *Calcul de α en fonction de φ.* La relation [5] étant établie pour une ligne quelconque, appliquons-la à la droite BC, en appelant ρ, ω les coordonnées de son point générateur. La relation se simplifie alors, car on a $\omega = 0 = const.$, et par suite $d\omega = o$. Il reste

[7] $$d\rho = \frac{p\,d\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}.$$

α varie de α à φ; ρ de r à zéro. On a donc, en intégrant [7],

[8] $$\int_r^0 dr = p\int_\alpha^\varphi \frac{d\alpha}{\sin(\theta-\alpha)};$$

ou, représentant par L les logarithmes népériens, et changeant les signes des deux membres,

[9] $$r = p\,\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\theta-\varphi) - p\,\mathrm{L}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}(\theta-\alpha).$$

Si, pour abréger, nous posons

[10] $$\frac{r}{p} = m,$$

(*) φ_1 n'a pas ici la même signification que dans la brochure, quoiqu'on puisse l'y ramener. L'auteur supposait que l'angle initial était nul. J'ai préféré traiter le cas général, ce qui n'est pas plus difficile.

l'équation [9] devient

$$[11] \qquad e^m = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\theta - \varphi)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\theta - \alpha)}.$$

Les équations équivalentes [9] et [11] donnent α en fonction de φ; ce qui va nous permettre d'exprimer de même, en fonction de φ, les trois expressions en α qui figurent dans [5]; $d\alpha$, $\sin(\theta - \alpha)$, et $\cos(\theta - \alpha)$.

9. — *Élimination de* $d\alpha$. Différentions [9]; il vient

$$[12] \qquad dr = \frac{pd(\theta - \varphi)}{\sin(\theta - \varphi)} - \frac{pd\theta}{\sin(\theta - \alpha)} + \frac{pd\alpha}{\sin(\theta - \alpha)},$$

Ajoutons membre à membre cette équation et [5], après avoir divisé dans celle-ci par $\sin(\theta - \alpha)$. Les quantités $d\alpha$ et dr disparaissent. On a

$$[13] \qquad \frac{p(d\varphi - d\theta)}{\sin(\theta - \varphi)\, d\theta} = \frac{-p + r\cos(\theta - \alpha)}{\sin(\theta - \alpha)}.$$

10. — *Élimination de* $\sin(\theta - \alpha)$ *et* $\cos(\theta - \alpha)$. De l'équation [11], nous tirons

$$[14] \qquad \frac{\sin \frac{1}{2}(\theta - \alpha)}{\sin \frac{1}{2}(\theta - \varphi)} = \frac{\cos \frac{1}{2}(\theta - \alpha)}{e^m \cos \frac{1}{2}(\theta - \varphi)} = \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) + e^{2m} \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi)}}.$$

De là, on passe facilement aux sinus et cosinus de l'angle double, et, en substituant dans [13], il vient successivement

$$[15] \qquad \frac{d\varphi - d\theta}{\sin(\theta - \varphi)\, d\theta} = \frac{-\left[\sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) + e^{2m} \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi)\right]}{2e^m \sin \frac{1}{2}(\theta - \varphi) \cos \frac{1}{2}(\theta - \varphi)} + m \frac{\left[e^{2m} \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) - \sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi)\right]}{2e^m \sin \frac{1}{2}(\theta - \varphi) \cos \frac{1}{2}(\theta - \varphi)},$$

$$[16] \qquad \frac{d\varphi - d\theta}{d\theta} = e^m (m - 1) \cos^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi) - e^{-m}(m + 1) \sin^2 \frac{1}{2}(\theta - \varphi)$$

$$= \frac{1}{2} e^m (m - 1) \left[1 + \cos(\theta - \varphi)\right] - \frac{1}{2} e^{-m} (m + 1) \left[1 - \cos(\theta - \varphi)\right].$$

$$[17] \qquad \frac{d\varphi}{d\theta} = 1 - \frac{e^m + e^{-m}}{2} + \frac{m(e^m - e^{-m})}{2} + \frac{e^{-m} - e^m + m(e^m + e^{-m})}{2} \cos(\theta - \varphi).$$

11. — *Intégration.* Ayant éliminé toutes les expressions en x, multiplions membre à membre par

$$\frac{2\,p^2}{r^2} = \frac{2}{m^2} \tag{18}$$

afin d'obtenir dans le premier membre la différentielle de $p^2\varphi$ divisé par $\frac{1}{2}\,r^2 d\theta$, différentielle de S. Il vient, après avoir chassé le dénominateur

$$p^2 d\varphi = f(m)\,dS + f_1(m)\cos(\theta - \varphi)\,dS; \tag{19}$$

en posant

$$f(m) = \frac{1}{m^2}\left(2 - e^m - e^{-m}\right) + \frac{1}{m}\left(e - e^{-m}\right), \tag{20}$$

$$f_1(m) = \left[\frac{1}{m^2}\left(e^{-m} - e^m\right) + \frac{1}{m}\left(e^m + e^{-m}\right)\right]\cos(\theta - \varphi).$$

Intégrons (19) en supposant que la pointe décrit le contour du secteur de O en O. φ varie de φ_1 à φ; S de zéro à S, même si O est extérieur à la courbe. Il vient

$$p^2(\varphi - \varphi_1) = \int f(m)\,dS + \int f_1(m)\cos(\theta - \varphi)\,dS. \tag{21}$$

Il serait difficile de calculer les valeurs exactes de ces intégrales. Nous allons du moins en obtenir une valeur très approchée; ce qui donnera l'équation définitive (6).

12. — *Évaluation de la première intégrale.* Développons $f(m)$ en série. Nous trouvons

$$\begin{aligned} f(m) &= \frac{2}{m^2} - \frac{2}{m^2}\left(1 + \frac{m^2}{1.2} + \frac{m^4}{1.2.3.4} + \ldots\right) \\ &\quad + \frac{2}{m}\left(\frac{m}{1} + \frac{m^3}{1.2.3} + \ldots\right) \\ &= 2\left[\left(1 - \frac{1}{1.2}\right) + \left(\frac{m^2}{1.2.3} - \frac{m^2}{1.2.3.4}\right) + \ldots\right] \end{aligned} \tag{22}$$

Cette série a l'unité pour valeur approchée. L'erreur correspondante ε est positive et croissante avec m. Nous en aurons donc une limite en donnant à m sa valeur maximum $\frac{1}{4}$. D'ailleurs, on voit qu'on a (*)

$$\varepsilon < \frac{2}{1.2.4}\left(m^2 + m^4 + m^6 + \ldots\right), \tag{23}$$

ou

$$\varepsilon < \frac{1}{4} \times \frac{m^2}{1 - m^2}, \tag{24}$$

ce qui donne, pour $m = \frac{1}{4}$,

(*) Pour évaluer cette erreur, on pourrait encore calculer $e^{\frac{1}{4}}$, $e^{-\frac{1}{4}}$. Mais l'approximation n'est guère plus avantageuse.

[25] $$\varepsilon < \frac{1}{60} \quad \text{ou} \quad 0{,}01666\ldots$$

Dès lors, la première intégrale a pour valeur $S + \varepsilon S$, *l'erreur* εS *étant plus petite que* $\frac{1}{60}$ *ou qu'un centième et demi de* S. Cette limite est même très exagérée, car elle suppose que tous les rayons sont égaux à la valeur maximum $\frac{p}{4}$.

13. — *Évaluation de la seconde intégrale.* Je dis qu'elle diffère très peu de zéro, si O est le centre de gravité. En effet, $f_1(m)$ développée en série donne

[26] $$\begin{aligned} f_1(m) &= -\frac{2}{m^2}\left(m + \frac{m^3}{1.2.3} + \ldots\right) \\ &\quad + \frac{2}{m}\left(1 + \frac{m^2}{1.2} + \ldots\right) \\ &= 2\left[\left(\frac{m}{1.2} - \frac{m}{1.2.3}\right) + \left(\frac{m^3}{1.2.3.4} - \frac{m^3}{1.2.3.4.5}\right) + \ldots\right] \\ &= \frac{2m}{3} + \ldots \end{aligned}$$

Tous les termes sont positifs. Prenons pour valeur approchée $\frac{2m}{3}$, l'erreur commise ε_1 sera positive. Elle est maximum en même temps que m. D'ailleurs on a :

[27] $$\varepsilon_1 < \frac{2}{1.2.3.5}(m^3 + m^3 + \ldots),$$

ou

[28] $$\varepsilon_1 < \frac{1}{15} \times \frac{m^3}{1 - m^2},$$

ce qui donne, pour $m = \frac{1}{4}$,

[29] $$\varepsilon_1 < \frac{1}{900}.$$

Cette limite donnerait, pour l'intégrale, $\frac{1}{900}$ S, si les éléments de celle-ci ne renfermaient pas le facteur variable $\cos(\theta - \varphi)$. Mais ce facteur les diminue numériquement, et, si O est intérieur à la courbe, le facteur rend les éléments négatifs dans la moitié environ du champ d'intégration. L'erreur est donc, en réalité, beaucoup plus petite et d'un ordre négligeable par rapport à l'erreur précédente ε.

14. — L'intégrale à évaluer se réduit ainsi à $\int \frac{2m}{3} \cos(\theta - \varphi)\, dS$. Jusqu'ici, nous avons supposé que O est pris au hasard dans le plan de la courbe (sauf toutefois la restriction $r < \frac{p}{4}$). Si, en conservant cette hypothèse, nous raisonnions comme précédemment,

nous aurions, pour l'erreur, une limite désavantageuse $\frac{1}{6}$ S. Mais, si nous supposons que O est le centre de gravité, la limite ε' va devenir $\frac{1}{66}$, ou un centième et demi.

En effet, nous avons :

[30] $$\cos(\theta-\varphi)=\cos\left[(\theta-\varphi_1)-(\varphi-\varphi_1)\right].$$

Développant cette expression, on trouve :

[31] $$\int\frac{2m}{3}\cos\left(\theta-\varphi\right)dS=$$
$$\frac{1}{p}\int\frac{2}{3}r\cos\left(\theta-\varphi_1\right)\cos\left(\varphi-\varphi_1\right)dS$$
$$+\frac{1}{p}\int\frac{2}{3}r\sin\left(\theta-\varphi_1\right)\sin\left(\varphi-\varphi_1\right)dS.$$

Si nous prenons un système de coordonnées rectangulaires dont l'axe des x fasse avec OA l'angle φ_1, les quantités:

[32] $$\frac{2}{3}r\cos\left(\theta-\varphi_1\right)=x\quad,\ \frac{2}{3}r\sin\left(\theta-\varphi_1\right)=y$$

sont les coordonnées du centre de gravité de chaque secteur élémentaire. Dès lors

[33] $$\int\frac{2m}{3}\cos\left(\theta-\varphi\right)dS=$$
$$\frac{1}{p}\int x\cos\left(\varphi-\varphi_1\right)dS+\frac{1}{p}\int y\sin\left(\varphi-\varphi_1\right)dS.$$

Si les deux dernières différentielles ne renfermaient pas les facteurs $\cos(\varphi-\varphi_1)$, $\sin(\varphi-\varphi_1)$, les intégrales seraient rigoureusement nulles, car elles égaleraient XS, YS, en appelant X, Y les coordonnées du centre de gravité de la surface S. Or, ce centre coïncide, par hypothèse, avec l'origine O. Nous allons voir que la présence des deux facteurs changera peu ces valeurs.

15. — En effet, si nous décomposons l'intégrale en deux parties, l'une formée des éléments positifs, l'autre des éléments négatifs, nous pourrons écrire :

[34] $$\int x\cos\left(\varphi-\varphi_1\right)dS=\int x'\cos\left(\varphi-\varphi_1\right)dS'-\int x''\cos\left(\varphi-\varphi_1\right)dS'';$$

S′ et S″ étant les deux segments de surface situés de part et d'autre de l'axe des y, et x', x'' représentant les valeurs absolues des abscisses des centres de gravité des éléments dS', dS''. Soient K′, K″, deux fractions comprises entre 1 et le minimum de $\cos\left(\varphi-\varphi_1\right)$. Ce minimum est $\cos 11^\circ = 0{,}981\,6272 = 1 - 0{,}018\,3728$, ou, forçant, $1-0{,}02$. Les quantités x', x'' étant toujours positives,

[35] $$\int x' \cos(\varphi - \varphi_1)\, dS' = K' \int x'\, dS' = K'X'S',$$

[36] $$\int x'' \cos(\varphi - \varphi_1)\, dS'' = K'' \int x''\, dS'' = K''X''S'';$$

d'où

[37] $$\int x \cos(\varphi - \varphi_1)\, dS = K'X'S' - K''X''S''.$$

Mais $X'S' = X''S''$, puisque l'origine est le centre de gravité. Donc

[38] $$\int x \cos(\varphi - \varphi_1)\, dS = (K' - K'')\, X'S'.$$

Le maximum de $K' - K''$ est de 0,02. Donc le maximum de l'intégrale est numériquement $0{,}02 \times S'$. Or, nous pouvons supposer $S' < \frac{S}{2}$, sans quoi nous aurions exprimé l'intégrale en fonction de S''. Dans les cas les plus défavorables (Voir la note de **5**), on a :

[39] $$X' < \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{6}.$$

L'intégrale est donc plus petite que $0{,}01 \times \frac{S}{6}$ ou $S \times 0{,}00166$. C'est donc négligeable par rapport aux autres erreurs.

16. — Enfin, il reste à évaluer

$$\frac{1}{p} \int y \sin(\varphi - \varphi_1)\, dS.$$

Décomposons encore l'intégrale en deux parties, en considérant les segments S', S'' déterminés par l'axe des x. Des calculs identiques aux précédents donnent

[40] $$\int y \sin(\varphi - \varphi_1)\, dS = (K' - K'')\, Y'S'.$$

Le maximum de sin φ est sin 11° = 0,191....., et on en conclut, comme plus haut, que l'intégrale est, abstraction faite du signe, plus petite que $\frac{0{,}191.....}{6 \times 2}$ S, ou $S \times 0{,}0151.....$, ou S *multipliée par un centième et demi.*

[21] L'équation devient donc

[41] $$p^2\varphi = S + \varepsilon S \pm \varepsilon' S,$$

d'où

[42] $$S = p^2\varphi + S(\pm \varepsilon' - \varepsilon).$$

Les erreurs ε, ε' sont plus petites environ qu'un centième et demi. Donc, en négligeant $S(\pm \varepsilon' - \varepsilon)$, on commet une erreur relative inférieure à 0,03 ou $\frac{1}{30}$. Mais on peut regarder cette limite comme très exagérée, même pour r atteignant $\frac{p}{4}$.

Imp. E. Petithenry, 8, rue François I^er^, Paris.

SUR LES NOMBRES DE BERNOUILLI

PAR M. CHARLES HERMITE
Membre de l'Institut de France

Dans son Mémoire célèbre sur la formule sommatoire d'Euler, Malmsten établit deux relations entre les nombres de Bernouilli par la voie du calcul intégral, en partant des expressions :

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m-1}\,dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{B_m}{4m},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m-1}\,dx}{e^{\pi x}-1} = \frac{2^{m-2}\,B_m}{m}.$$

L'éminent géomètre en conclut qu'en faisant pour un instant :

$$F(x) = \frac{(1+ix)^{2m-1} - (1+ix)^{2m-1}}{i}$$

on a :

$$\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{m-1}{m} + \frac{(-1)^{m-1}\,B_m}{2m},$$

et

$$\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{e^{\pi x}-1} = \frac{2m-1}{2m} + \frac{(2^{2m}-1)\,(-1)^m B_m}{m}.$$

Cela étant, il suffit d'employer le développement du polynôme $F(x)$, suivant les puissances croissantes de la variable, à savoir :

$$F(x) = 2(2m-1)_1\,x - 2\,(2m-1)_3\,x^3 + 2\,(2m-1)_5\,x^5 \ldots$$

pour obtenir les égalités

$$(2m-1)_1 B_1 - (2m-1)_3 \frac{B_2}{2} + (2m-1)_5 \frac{B_3}{3} \cdots = \frac{m-1}{m}$$

$$(2m-1)_1 2B_1 - (2m-1)_3 2^3 \frac{B_2}{2} + (2m-1)_5 2^5 \frac{B_3}{3} - \cdots$$
$$= \frac{2m-1}{2m} + \frac{(2^{2m-1}-1)(-1)^m B_m}{m}.$$

Ce sont ces résultats que je me propose de démontrer par une méthode élémentaire et purement algébrique qui donne également les relations antérieurement connues entre les nombres de Bernouilli, d'une manière simple et facile, comme on va voir.

Je rappelle d'abord que les quantités B_1, B_2, etc., sont définies par l'identité :

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \Sigma \frac{(-1)^{n-1} B_n x^{2n-1}}{1.2 \ldots 2n},$$

$$(n = 1.2.3. \ldots).$$

où il importe de remarquer qu'à l'exception du terme constant, le second membre ne contient que des puissances de degré impair. On le reconnaît immédiatement au moyen de l'expression,

$$D_x \frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{2 - e^x - e^{-x}},$$

dont le développement renferme uniquement des puissances paires de la variable. Je rappelle encore qu'après avoir écrit sous forme entière :

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \Sigma \frac{(-1)^{n-1} B_n x^{2n}}{1.2 \ldots 2n}$$

les relations de récurrence entre B_1, B_2, etc., s'obtiennent en multipliant par $e^x - 1$ et identifiant les deux membres. Il faut pour cela former le coefficient d'une puissance quelconque dans le produit d'une série infinie par l'expression, $e^x - 1 = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \cdots$. Voici, à cet effet, une remarque fort simple qui a d'importantes conséquences. Considérons en général une série quelconque que je représenterai par,

$$S = \lambda_0 + \frac{\lambda_1 x}{1} + \frac{\lambda_2 x^2}{1.2} + \cdots + \frac{\lambda_n x^n}{1.2 \ldots n} + \cdots;$$

le coefficient de x^n dans la quantité $S(e^x - 1)$ est une fonction linéaire de $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, dont la valeur s'obtient immédiatement lorsqu'on y remplace

λ_i par λ^i. C'est en effet le polynôme entier en λ du degré $n-1$, qui résulte du développement de $e^{\lambda x}(e^x-1)$, c'est-à-dire $e^{(\lambda+1)x}-e^{\lambda x}$ et qui a pour expression

$$\frac{(\lambda+1)_n-\lambda^n}{1.2\ldots n}.$$

Inversement on conclut la fonction linéaire de ce polynôme par le changement de λ^i en λ_i, nous avons ainsi une expression symbolique que j'appliquerai à la série proposée en faisant $\lambda_0=1$, $\lambda_1=-\frac{1}{2}$, puis en général $\lambda_{2i}=(-1)^{i-1}B_i$, $\lambda_{2i+1}=0$.

Les équations qui résultent de l'identification s'offrent donc sous cette forme extrêmement simple

$$(\lambda+1)^n-\lambda^n=0$$

en exceptant le cas de $n=1$, où le second membre doit être supposé égal à l'unité. On en conclut l'égalité suivante,

$$1-\frac{1}{2}n+n_2B_1-n_4B_2+\cdots-(-1)^i n_{2i}B_i+\cdots=0$$

en prenant pour le dernier terme $2i=n-2$, ou $2i=n-1$, suivant que n est pair ou impair. L'expression symbolique de cette relation a déjà été signalée par Lucas dans les *Comptes rendus*, t. LXXXIII, p. 539, et par M. E. Cesáro qui en a fait des applications d'un grand intérêt, à d'importantes questions d'analyse. Je renverrai au travail du savant géomètre publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, et je poursuivrai sous un autre point de vue les conséquences de l'équation

$$\frac{1}{e^x-1}=e^{\lambda x}$$

lorsqu'on convient de remplacer λ^{2i} par $(-1)^{i-1}B_i$ et λ^{2i+1} par zéro, dans le développement en série du second membre. J'observe à cet effet qu'elle subsiste si l'on change x en $2x$, et qu'on peut aussi multiplier les deux membres par e^x, ou même par une série quelconque dans laquelle n'entre pas la quantité λ. Nous avons donc à la fois

$$\frac{x}{e^x-1}=e^{\lambda x},$$

$$\frac{2x}{e^{2x}-1}=e^{2\lambda x},$$

$$\frac{2x\,e_x}{e^{2x}-1}=e^{(2\lambda+1)x},$$

et une simple combinaison linéaire nous donne la nouvelle identité :

$$e^{(2\lambda+1)z} - 2e^{\lambda z} + e^{2\lambda z} = 0.$$

On en tire la relation :

$$(2\lambda+1)^n + (2^n - 2)\lambda^n = 0,$$

que je vais écrire sous forme explicite en distinguant les cas de n pair ou impair. Soit d'abord $n = 2m$, nous aurons :

$$(2m)_2\, 2^2\, B_1 - (2m)_4\, 2^4\, B_2 + \cdots + (2^{2m+1} - 2)(-1)^{m-1} B_m = 2m - 1,$$

en observant que le dernier terme doit être seul employé pour $m = 1$. On trouve ensuite si l'on suppose $n = 2m - 1$,

$$(2m-1)_2\, 2^2\, B_1 - (2m-1)_4\, 2^4\, B_2 + \cdots + (2m-1)_{2m-2}(-1)^m B_{m-1} = 2m - 2.$$

J'arrive maintenant aux résultats obtenus par Malmsten; le mode de démonstration restera le même, mais c'est à une expression symbolique différente que nous serons conduit.

En partant de l'équation fondamentale

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} + \Sigma \frac{(-1)^{n-1} B_n\, x^{2n-1}}{1.2 \ldots 2n},$$

je la mettrai sous la forme :

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} S,$$

de sorte que si l'on fait, comme précédemment,

$$S = \lambda_0 + \frac{\lambda_1 x}{1} + \frac{\lambda_2 x^2}{1.2} + \cdots$$

on ait les conditions $\lambda_0 = 1$, $\lambda_1 = -B_1$, et en général, $\lambda_{2i} = 0$, $\lambda_{2i-1} = \frac{(-1)^{i-1} B_i}{i}$. Cela étant, il vient, après avoir chassé le dénominateur :

$$1 = \frac{e^x - 1}{x} - \frac{1}{2} S(e^x - 1)$$

et on trouvera pour le coefficient de x^n dans le second membre la quantité

$$\frac{1}{1.2..n+1} - \frac{1}{2} \frac{(\lambda+1)^n - \lambda^n}{1.2 \ldots n},$$

avec la convention de remplacer λ^i par λ_i. Nous avons par conséquent cette égalité :

$$(\lambda + 1)^n - \lambda^n = \frac{2}{n+1},$$

dont le caractère symbolique n'est plus le même que précédemment d'après les nouvelles conditions relatives aux éléments λ^i. Nous passerons encore aux relations effectives en distinguant les cas de $n = 2m$ et $n = 2m - 1$, on aura ainsi

$$(2m)_1 B_1 - (2m)_3 \frac{B_2}{2} + (2m)_5 \frac{B_3}{3} + \cdots + (2m)_{2m-1} \frac{(-1)^{m-1} B_m}{m} = \frac{2m-1}{2m+1},$$

$$(2m-1)_1 B_1 - (2m-1)_3 \frac{B_2}{2} + (2m-1)_5 \frac{B_3}{3} - \cdots + (2m-1)_{2m-3} \frac{(-1)^m B_{m-1}}{m-1} = \frac{m-1}{m}.$$

La seconde de ces égalités est précisément l'une de celles qu'a obtenues Malmsten.

Nous aurons l'autre, comme conséquence de la relation

$$(2\lambda + 1)^n + (2^n - 1)\lambda^n = \frac{1}{n+1}$$

que je vais établir.

A cet effet, je joins comme précédemment à l'équation fondamentale

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} e^{\lambda x}$$

celle qu'on en tire en changeant x en $2x$,

$$\frac{1}{e^{2x} - 1} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} e^{2\lambda x};$$

je multiplie ensuite par e^x, ce qui donne :

$$\frac{e^x}{e^{2x} - 1} = \frac{e^x}{2x} - \frac{1}{2} e^{(2\lambda+1)x},$$

et, par une combinaison linéaire simple, j'en conclus l'identité

$$e^{(2\lambda+1)x} - e^{\lambda x} + e^{2\lambda x} = \frac{e^x - 1}{x}.$$

La relation annoncée en résulte en égalant dans les deux membres les coefficients de x^n ; elle conduit aux égalités suivantes :

$$2n\,;B_1 - 2n\,;2^2\frac{B_2}{2} + 2n\,;2^4\frac{B_3}{3} - \cdots + 2n-1\,;2^{2n-2}\frac{-1^{n-1}B_n}{n} = \frac{n}{2n+1};$$

$$2n-1\,;B_1 - 2n-1\,;2^2\frac{B_2}{2} + 2n-1\,;2^4\frac{B_3}{3} - \cdots + \frac{2^{2n-1}-1\,;-1^{n-1}B_n}{2n} = \frac{2n-1}{4n}$$

la seconde ne diffère pas de celle de Malmsten, comme il est aisé de le reconnaître.

Je terminerai en indiquant une conséquence du second mode de représentation symbolique, qui a conduit à la relation

$$\lambda - 1^n - \lambda^n = \frac{2}{n-1}.$$

Elle montre immédiatement qu'en désignant par Fx un polynôme entier quelconque, on a :

$$F\lambda - 1 - F\lambda = 2\int_0^1 Fx\,dx.$$

Cela posé soit $Fx = x^n\,x-1^n$, de sorte qu'on ait

$$\int_0^1 x^n\,1-x^n\,dx = \frac{1.2\ldots n}{n+1\;\;n+2\ldots 2n+1}.$$

L'expression suivante

$$F\lambda - 1 - F\lambda = \lambda^n\,\lambda-1^n - \lambda-1^n,$$

étant développée suivant les puissances croissantes de λ, donne successivement pour n pair et pour n impair les quantités

$$2_0{}^n\,n\,\lambda - 1 - n_2\,\lambda^2 - \cdots - n_{n-2}\,\lambda^{n-1},$$

et

$$2_0{}^n - n_2\,\lambda^2 - n_4\,\lambda^4 - \cdots - n_{n-1}\,\lambda^{n-1}.$$

Nous avons donc les deux suites de relations

$$2n\;\frac{F_{n-1}}{n-1} - 2n\,;\frac{F_{n-3}}{n-2} - 2n\,;\frac{F_{n-5}}{n-3} - \cdots - 2n\,3\,;\frac{F_2}{2n} = \frac{1.2\ldots 2n}{2n-1\;\;2n-2\ldots 4n+1},$$

$$\frac{n+1}{+1} - (2m+1)_2 \frac{B_{m+2}}{m+2} + (2m+1)_4 \frac{B_{m+3}}{m+3} - \cdots + (2m+1)^{2m} \frac{B_{2m+1}}{2m+1}$$
$$= \frac{1.\ 2 \ldots 2m+1}{(2m+2)\ (2m+3) \ldots (4m+3)}.$$

Elles offrent cette circonstance digne de remarque de contenir $m-1$ ou n nombres de Bernouilli consécutifs à partir du m^e.

(Extrait du *Compte rendu du troisième congrès scientifique international des catholiques*, Section des sciences mathématiques et naturelles, pp. 5-11).

ESSAI D'EXPOSITION ÉLÉMENTAIR

DES PRINCIPES FONDAMENTAUX

DE LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE DE RIE

PAR M. PAUL MANSION
Professeur ordinaire à l'Université de Gand,
Membre de l'Académie royale de Belgique

---

1. *Introduction.* La géométrie euclidienne repose sur un certain de postulats parmi lesquels se trouvent les deux suivants : 1° Deux ne peuvent contenir un espace. 2° Deux droites qui en rencontrent u en faisant avec celle-ci des angles intérieurs dont la somme est inf deux droits, se coupent du côté où se trouvent ces angles.

Lorsqu'on laisse de côté le second de ces postulats, on obtient la trie non euclidienne de Lobatchefsky; lorsque, en outre, on aban premier, on arrive logiquement à la géométrie non euclidienne qui nom de Riemannn, bien que ce grand analyste n'en ait donné que cipe fondamental, savoir que la droite est une ligne finie rentrant même.

Pour comprendre le sens de cette dernière proposition, on doi prêter les définitions euclidiennes de la droite et du plan dans le leur a été attribué par Cauchy (1) et développé par M. De Tilly (2 : L de distance étant regardée comme une notion première irréduct point M est dit appartenir à la droite AB si aucun point de l'esp distant de A et B comme l'est M. Un point M est dit appartenir au pl si aucun point de l'espace n'est distant de A, B et C comme l'est M. L quelconque M de l'espace est déterminé par ses distances à quatr fixes A, B, C, D.

(1) *Sept leçons de Physique générale* (Paris, Gauthier-Villars, 1868). Ces leçon professées à Turin, en 1833. Voir pp. 44-45.

(2) *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique*. B Gounouilhou, 1879 (1er cahier du t. III de la 2e série des *Mémoires de la Société d physiques et naturelles de Bordeaux*). — *Essai de Géométrie analytique générale* couronnés et autres Mémoires de l'Académie royale de Belgique, in-8°, t. XLVII; ou décembre 1893).

En partant de ces notions et supposant finie la distance maxima 2Δ de deux points de l'espace, on démontre, comme on peut le voir dans le premier des ouvrages de M. De Tilly cités en note, que deux droites quelconques d'un même plan se coupent en deux points situés à la distance 2Δ. On en déduit que, dans un triangle riemannien, la somme des trois angles est supérieure à deux droits et, par suite, que, dans un quadrilatère riemannien, la somme des angles est supérieure à quatre droits (*Mathesis*, août 1894, t. XIV, pp. 180-183).

Ces préliminaires posés, voici comment on peut établir les principes fondamentaux de la géométrie riemannienne (1).

2. *Notations.* Considérons deux demi-droites OSO', OsO' faisant un angle aigu ; soient S et s leurs milieux. Les deux triangles OsS, O'sS étant égaux,

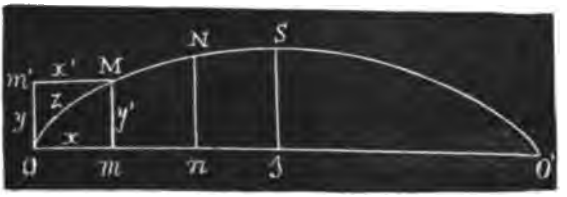


Fig. 1.

Ss est une perpendiculaire commune. Des points M, N de la droite OS, abaissons des perpendiculaires Mm, Nn sur Os ; de M abaissons aussi Mm' perpendiculaire sur Om' perpendiculaire à Om. Nous poserons

$$Om = x,\ Mm = y',\ Om' = y,\ Mm' = x'.$$

Ces quatre quantités varieront avec $OM = z$.

3. Théorème I. *L'angle* $OMm = (z, y)$ *croît avec* z (Fig. 1). La somme des angles du quadrilatère MNnm surpasse quatre droits ; comme les angles en m et n sont droits, on a donc

$$m\text{MN} + \text{MN}n > 2 \text{ droits.}$$

Mais

$$\text{OM}m + m\text{MN} = 2 \text{ droits.}$$

Donc

$$\text{OM}m < \text{MN}n.$$

(1) Nous imitons autant que possible les démonstrations de M. Gérard dans un excellent article sur la géométrie lobatchefskienne, intitulé : *Sur la Géométrie non euclidienne* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. X, pp. 74-84 ; février 1893). Plusieurs de ces démonstrations se trouvent en substance, dans le ch. IV du premier ouvrage cité de M. De Tilly. Voir aussi la dissertation inaugurale de M. Gérard : *Sur la Géométrie non euclidienne*. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892 (un volume in-4° de 110 pages).

COROLLAIRE. De O en S, tous les angles (z, y') sont aigus puisqu'ils sont plus petits que l'angle en S ; au delà, ils sont tous obtus.

4. THÉORÈME II. *De* O *en* S, *y' croît ; de* S *en* O', *y' décroît* (Fig. 1'). Soit p le milieu de mn, pP perpendiculaire à mn ; $nM' = Mm$; menons PM'. Le quadrilatère $PM'np$ sera égal à $MPpm$. L'angle $M'Pp$ = l'angle MPp sera aigu et, par suite, moindre que l'angle obtus NPp, si N est en deçà de S. Donc M' sera compris entre N et n ; par suite Mm, qui est égal à nM', sera inférieur à Nn. Ainsi, en deçà de S, y' croît avec z.

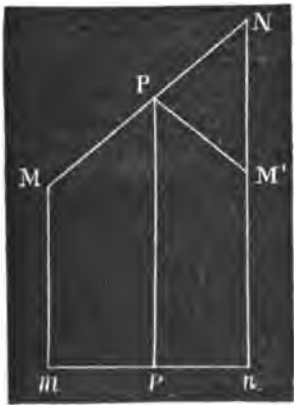


Fig. 1'.

On verrait de même que, au delà de S, y' décroît quand z croît.

5. THÉORÈME III. *De* O *en* S, $(x : z)$ *croît ; de* S *en* O', $(x : z)$ *décroît*. Il suffit de faire la démonstration pour les points situés entre O et S. Dans le triangle PNM', l'angle N est plus grand que l'angle M', qui est égal au supplément de M ; par suite, PM' ou PM surpasse PN.

Donc, à mesure que l'on s'éloigne de O, à des accroissements égaux mp, pn de x, correspondent des accroissements de plus en plus petits de z ; par conséquent, $(x : z)$ croît, parce que le numérateur croît plus rapidement que le dénominateur.

REMARQUE. Si l'on compte les z à partir de S, les x à partir de s, il est clair que $(x : z)$, d'après la démonstration précédente, décroît quand z croît de S en O', puisque les accroissements de z sont de plus en plus grands à mesure que l'on s'éloigne de O'.

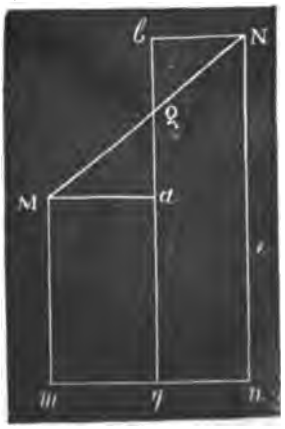


Fig. 1''.

6. THÉORÈME IV. *De* O *en* S, $(y' : z)$ *décroît ; de* S *en* O', $(y' : z)$ *croît* (Fig. 1''). Il suffit encore de faire la démonstration pour les points situés entre O et S. Soient Q le milieu de MN ; Qq une perpendiculaire abaissée de Q sur mn ; Ma une perpendiculaire abaissée de M sur Qq, Nb une perpendiculaire abaissée de N sur Aq.

D'après la seconde partie du théorème II, on a

$$aq > Mm, \quad bq > Nn.$$

Les triangles égaux MQa, QbN donnent d'ailleurs

$$aQ = bQ,$$

ou

$$Qq - aq = bq - Qq.$$

En remplaçant dans cette égalité aq, bq par les quantités plus petites Mm, Nn, il viendra

$$Qq - Mm > Nn - Qq.$$

Donc à des accroissements MQ, QN égaux de z, correspondent des accroissements de plus en plus petits de y' à mesure que l'on s'éloigne de O; par conséquent, $(y' : z)$ décroît quand z croît, pour les points situés entre O et S.

7. Théorème V. *Quand z tend vers zéro, $(x : z)$ tend vers une limite finie en décroissant, $(y' : z)$ vers une limite finie aussi, mais en croissant.* 1° D'après le théorème III, $(x : z)$ décroît quand z décroît; donc $(x : z)$ a une limite finie ou nulle. 2° D'après le théorème IV, $(y' : z)$ croît quand z décroît; donc $(y' : z)$ a une limite finie ou infinie. 3° D'après la seconde partie du théorème II, on a $x > x'$, donc

$$\frac{x}{z} > \frac{x'}{z}.$$

Mais $(x' : z)$, d'après ce qui vient d'être prouvé (2°), a une limite finie ou infinie; donc $(x : z)$ qui surpasse $(x' : z)$ n'a pas une limite nulle. 4° De même, d'après la seconde partie du théorème II, on a $y' < y$, et aussi

$$\frac{y'}{z} < \frac{y}{z}.$$

Mais $(y : z)$ a une limite finie ou nulle d'après ce qui a été démontré au 1°. Donc $(y' : z)$, qui est inférieure à $(y : z)$, n'a pas une limite infinie.

Remarque. Si l'on compte les z à partir de S, les x à partir de s, on prouve de même que $(x : z)$ tend vers une limite finie en croissant, $(y' : z)$ vers une limite finie en décroissant.

Fig. 2.

8. *Quadrilatère trirectangle.* Dans les n°s 9 et 10, nous allons considérer (Fig. 2) un quadrilatère trirectangle (x, y, x', y').

Nous appelons x, y les côtés adjacents à deux angles droits, x', y' les côtés opposés. D'après le théorème II, on a

$$x' < x, \quad y' < y.$$

9. Théorème VI. *Dans un quadrilatère trirectangle où y' est constant et où x croît, x' croît de plus en plus lentement à mesure que x croît* (Fig. 2'). Soient

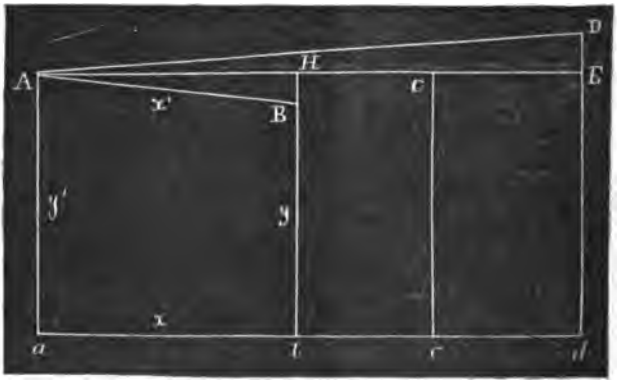


Fig. 2'.

A*ab*B, A*ac*C, A*ad*D trois quadrilatères trirectangles, l'angle A étant obtus dans chacun d'eux ; nous supposons de plus $bc = cd$; il faut démontrer que l'on a

$$AC - AB > AC - AD.$$

Supposons que AC rencontre *b*B en H et *d*D en E. On a

$$HC = CE,$$

ou

$$AC - AH = AE - AC.$$

Mais AH étant une oblique par rapport à AB, AE par rapport à AD, on a

$$AH > AB, \quad AE > AD.$$

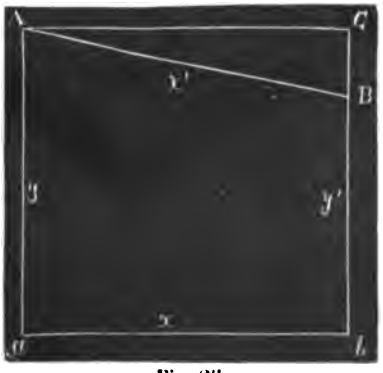


Fig. 2''.

On déduit de l'égalité précédente, au moyen de ces inégalités,

$$AC - AB > AD - AC.$$

10. Théorème VII. *Dans un quadrilatère trirectangle (x, y, x', y') où x tend vers zéro, $(x' : x)$ tend vers une limite $\varphi(y)$ inférieure à $(x' : x)$, mais $(x' : x)$ est inférieure à $\varphi(y')$* (Fig. 2''). Soient A*ab*B un quadrilatère (x, y, x', y') dont B est l'angle obtus, A*ab*C un autre quadrilatère trirectangle dont A est l'angle obtus. D'après la remarque du n° 7, lorsque x décroît, le rapport $(x : x')$ croît ; le rapport inverse décroît et a donc une limite $\varphi(y)$ inférieure à $(x' : x)$. D'après le théorème VI, quand y

décroît, (AC : x) croît et tend vers une limite $\psi(y)$ supérieure à (AC : x). D'ailleurs la perpendiculaire AC est plus petite que l'oblique AB. Donc

$$\frac{AC}{ab} < \frac{AB}{ab},$$

et, à la limite,

$$\psi(y) \leqq \varphi(y).$$

Puisque $\psi(y)$ surpasse (AC : x), on a donc aussi

$$\varphi(y) > \frac{AC}{x}.$$

Dans le quadrilatère AabB, Bb joue le même rôle que y dans AabC; donc, d'après la dernière inégalité,

$$\varphi(Bb) > \frac{AB}{ab}.$$

Résumant ces divers résultats, on a enfin

$$\varphi(y) < \frac{x'}{x} < \varphi(y').$$

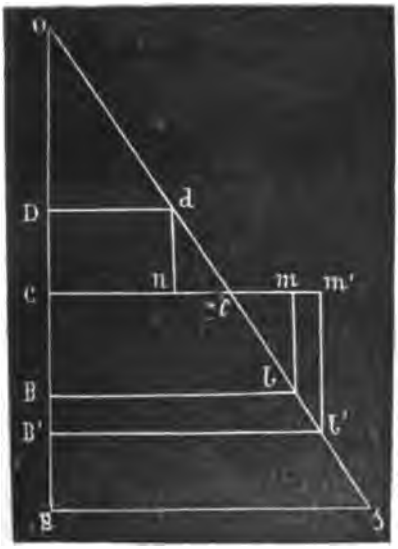


Fig. 3.

Remarque. Puisque x' est $< x$, la fonction $\varphi(y)$ est inférieure à l'unité, sauf pour $y = 0$, auquel cas, on voit directement que $\varphi(y) = 1$.

11. Théorème VIII. *La fonction* φ *est continue* (Fig. 3). Soient OS, Os deux perpendiculaires à une même droite, de manière que OS = Os = Δ; SB = $x - y$, SC = x, SD = $x + y$; Bb, Cc, Dd des perpendiculaires à OS, rencontrant Os en b, c, d; dm, bn des perpendiculaires sur Cc. D'après le théorème III, appliqué à l'angle en c commun aux trois triangles cnd, cmb, CcO, on a $cb < cd$ et, de plus,

$$\frac{cm}{cb} < \frac{cC}{cO}, \quad \frac{cn}{cd} < \frac{cC}{cO}.$$

On peut écrire la première de ces relations sous la forme

$$Cm - Cc < Cc \frac{cb}{cO},$$

et, en divisant par Ss,

$$\frac{Cm}{Ss} - \frac{Cc}{Ss} < \frac{Cc}{Ss} \frac{cb}{cO},$$

ou encore

$$\left(\frac{Bb}{Ss} : \frac{Bb}{Cm}\right) - \frac{Cc}{Ss} < \frac{Cc}{Ss} \frac{cb}{cO}. \qquad (\alpha)$$

D'après le théorème VII, si Ss et, par suite, Bb, Cm tendent vers zéro, on a

$$\lim \frac{Bb}{Ss} = \varphi(y - y),$$

$$\lim \frac{Bb}{Cm} = \varphi(y),$$

$$\lim \frac{Cc}{Ss} = \varphi(x).$$

D'ailleurs $\lim cb = CB = y$, $\lim cO = CO = \Delta - x$. Donc l'inégalité (α) donne, à la limite,

$$\frac{\varphi(x - y)}{\varphi(y)} - \varphi(x) \leqq \frac{y}{\Delta - x} \varphi(x),$$

c'est-à-dire,

$$\varphi(x - y) - \varphi(x)\,\varphi(y) \leqq \frac{y}{\Delta - x} \varphi(x)\,\varphi(y). \qquad (\beta)$$

De la relation

$$\frac{cn}{cd} < \frac{cC}{cO},$$

on tire de même

$$\varphi(x)\,\varphi(y) - \varphi(x + y) \leqq \frac{y}{\Delta - x} \varphi(x)\,\varphi(y). \qquad (\gamma)$$

En ajoutant les relations (β) et (γ), on trouve

$$\varphi(x - y) - \varphi(x + y) \leqq \frac{2y}{\Delta - x} \varphi(x)\,\varphi(y) < \frac{2y}{\Delta - x}.$$

Cette inégalité exprime que φ est une fonction continue.

12. Théorème IX. *On a* $\varphi(x-y)+\varphi(x+y)=2\varphi(x)\,\varphi(y)$. D'après le théorème III, $cd > cb$; par suite, on a aussi

$$cn > cm,$$

ou successivement

$$Cc - Cn > Cm - Cc,$$

$$2\,Cc > Cm + Cn,$$

$$2\,Cc > \left(\frac{Bb}{Ss} : \frac{Bb}{Cm}\right) + \left(\frac{Dd}{Ss} : \frac{Dd}{Cn}\right),$$

et, à la limite,

$$2\varphi(x) \geqq \frac{\varphi(x-y)}{\varphi(y)} + \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(y)},$$

ou

$$2\varphi(x)\,\varphi(y) \geqq \varphi(x-y) + \varphi(x+y). \qquad (\delta)$$

2° Soit $BB' = \alpha$, une quantité fixe aussi petite qu'on le veut. Menons $B'b'$ perpendiculaire à SO, $b'm'$ perpendiculaire à Cc. On a

$$cb' > CB' - B'b' - Cc > CB + \alpha - 2Ss = CD + \alpha - 2Ss.$$

Donc, si l'on rend Ss égal ou inférieur à $\frac{1}{2}\alpha$, cb' est plus grand que CD et, à fortiori que cd; par suite, on a

$$cm' > cn,$$

et, successivement,

$$Cm' - Cc > Cc - Cn,$$

$$Cm' + Cn > 2Cc,$$

$$\left(\frac{B'b'}{Ss} : \frac{B'b'}{Cm'}\right) + \left(\frac{Dd}{Ss} : \frac{Dd}{Cn}\right) > \frac{2Cc}{Ss},$$

et, à la limite,

$$\frac{\varphi(x-y-\alpha)}{\varphi(y+\alpha)} + \frac{\varphi(x+y)}{\varphi(y)} \geqq 2\varphi(x).$$

3° On déduit de là, en faisant tendre α vers zéro,

$$\varphi(x-y) + \varphi(x+y) \geqq 2\varphi(x)\,\varphi(y).$$

Rapprochant cette relation de (δ), on en tire

$$\varphi(x-y) + \varphi(x+y) = 2\varphi(x)\,\varphi(y).$$

Remarque. Dans le cas où l'on a $x = y$, la démonstration doit être légèrement modifiée. Au lieu de considérer un point B' voisin de B, on en considère un voisin de D, entre C et D.

13. Théorème X. *On a* $\varphi(z) = \cos\left(\frac{z}{k}\right)$, *k étant une constante.* On a $\varphi(0) = 1$, et $\varphi(x) < 1$, si x est différent de zéro. Posons

$$\varphi(x) = \cos t.$$

En calculant successivement $\varphi\left(\frac{1}{2}x\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{4}x\right)$, etc., par la formule

$$\varphi(2x) = 2\varphi^2(x) - 1,$$

déduite de

$$\varphi(x+y) + \varphi(x-y) = 2\varphi(x)\,\varphi(y), \qquad (\epsilon)$$

en faisant $x = y$, on trouve

$$\varphi\left(\frac{1}{2}x\right) = \cos\frac{1}{2}t, \quad \varphi\left(\frac{1}{4}x\right) = \cos\frac{1}{4}t, \text{ etc.}$$

Posant ensuite, p étant un entier quelconque,

$$\frac{1}{2^p}x = X, \quad \frac{1}{2^p}t = T,$$

de la relation

$$\varphi(X) = \cos T,$$

on tire successivement $\varphi(2X)$, $\varphi(3X)$, etc., par la formule (ϵ) et, en général,

$$\varphi(nX) = \cos nT,$$

n étant un entier quelconque, pourvu que nX ne surpasse pas Δ. Soient ensuite

$$nX = z, \quad nT = nX.\frac{T}{X} = \frac{z}{k},$$

la dernière relation pourra s'écrire

$$\varphi(z) = \cos\left(\frac{z}{k}\right).$$

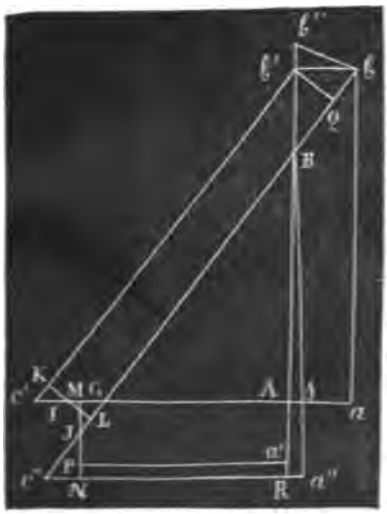


Fig. 4.

14. Théorème XI. *Dans un triangle rectangle on a la relation* $\varphi a = \varphi(b)\,\varphi(c)$ *entre l'hypoténuse a et les côtés b et c* (1). Soit le triangle ABC; d'un point b pris sur le prolongement de l'hypoténuse abaissons ba perpendiculaire sur AC; faisons glisser le triangle abC le long de AC jusqu'en A$b'c'$, puis le long de BC, jusqu'en a''Bc''. Par le milieu I de Cc' menons à BC une perpendiculaire

(1) Cette démonstration est empruntée presque textuellement à l'article cité de M. Gérard, *mutatis mutandis*.

KL qui sera aussi perpendiculaire à $b'c'$, en un point K tel que IK = IL. De même, la perpendiculaire JM à la droite AC, menée par le milieu de Cc'' est aussi perpendiculaire à $a''c''$ en un point N, tel que JN = JM. Enfin menons $b'Q$ perpendiculaire à BC et bb'' perpendiculaire sur AB. Nous avons vu que, si l'on fait tendre Bb vers zéro, on a

$$\lim \frac{bb''}{Bb} = \lim \frac{b'Q}{b'B};$$

de même

$$\frac{MJ}{JC} \text{ et } \frac{IL}{IC}$$

tendent vers la même limite; donc

$$\lim \frac{MN}{Cc''} = \lim \frac{KL}{Cc'}.$$

D'où, en divisant membre à membre et remarquant que $Cc'' = Bb$ et $Cc' = Aa$

$$\lim \frac{bb''}{MN} = \lim \frac{b'Q}{KL}. \lim \frac{Aa}{Bb'}$$

ou, en transposant,

$$\lim \frac{b'Q}{KL} = \lim \frac{bb''}{Aa}. \lim \frac{MN}{Bb'}.$$

Je dis que cette relation est identique à la suivante :

$$\varphi(a) = \varphi(c)\ \varphi(b).$$

En effet, d'après le théorème VII,

$$\varphi(LQ) < \frac{b'Q}{KL} < \varphi(Kb').$$

Or quand Bb tend vers zéro, LQ et Kb' tendent vers $BC = a$, et, d'après le théorème VIII, $\varphi(LQ)$ et $\varphi(Kb')$ tendent vers $\varphi(a)$. Donc

$$\lim \frac{b'Q}{KL} = \varphi(a).$$

On prouve de même que

$$\lim \frac{bb''}{Aa} = \varphi(c).$$

Reste à chercher la limite de $\frac{Bb'}{MN}$. Appelons s le point de rencontre de Ba'' avec AC; on aura l'oblique Bs plus grande que la perpendiculaire BA; donc, puisque $Ab' = Ba''$, on a $Bb' > sa''$. Par suite,

$$\frac{Bb'}{MN} > \frac{sa''}{MN} > \varphi(Na'').$$

Prolongeons BA jusqu'à sa rencontre en R avec $a''c''$; l'oblique BR étant plus longue que la perpendiculaire $Ba'' = Ab'$, portons sur BR une longueur $Ba' = Ab'$; le point a' tombera entre B et R. Du point a', abaissons $a'P$ perpendiculaire sur MN. On aura

$$\frac{Bb'}{MN} < \frac{Bb'}{MP} = \frac{Aa'}{MP} < \varphi(Pa') < \varphi(AM - PM - Aa').$$

Résumant les dernières inégalités, il vient

$$\varphi(AM - PM - Aa') > \frac{Bb'}{MN} > \varphi(Na'')$$

et, à la limite,

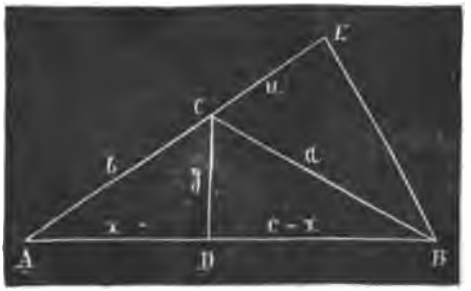
$$\varphi(b) = \varphi(AC) = \lim \frac{Bb'}{MN}$$

Remarque. On observera que le théorème précédent ne suppose pas connue la forme de la fonction φ ; il suffit que l'on sache que cette fonction est continue.

Il est bon de remarquer aussi que l'on suppose implicitement en plusieurs endroits de la démonstration que les longueurs considérées sont inférieures à Δ ; il en est de même dans plusieurs des démonstrations précédentes. Cette restriction n'entraîne aucun inconvénient. Une fois les principes fondamentaux établis pour des figures suffisamment petites, on les étend aisément par l'analyse à tous les autres cas.

15. Théorème XII. *Dans un triangle* ABC *quelconque, on a entre les trois côtés* $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, *la relation*

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{b}{k}\right) \cos\left(\frac{c}{k}\right) + \sin\left(\frac{b}{k}\right) \sin\left(\frac{c}{k}\right) \cos A.$$



Supposons l'angle A aigu. Des points B et C abaissons les perpendiculaires BE, CD sur les côtés opposés. Posons $AD = x$, $CE = u$. On aura, dans CBD,

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{y}{k}\right) \cos\left(\frac{c-x}{k}\right)$$

ou, en développant,

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{y}{k}\right) \cos\left(\frac{c}{k}\right) \cos\left(\frac{x}{k}\right) + \cos\left(\frac{y}{k}\right) \sin\left(\frac{c}{k}\right) \sin\left(\frac{x}{k}\right).$$

is, dans ACD,

$$\cos\left(\frac{y}{k}\right)\cos\left(\frac{x}{k}\right) = \cos\left(\frac{b}{k}\right).$$

La valeur de $\cos\left(\frac{a}{k}\right)$ peut donc s'écrire

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{b}{k}\right)\cos\left(\frac{c}{k}\right) + \sin\left(\frac{b}{k}\right)\sin\left(\frac{c}{k}\right)\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{b}{k}\right)}.$$

La considération des triangles CBE, ABE conduit de même à la relation

$$\cos\left(\frac{a}{k}\right) = \cos\left(\frac{b}{k}\right)\cos\left(\frac{c}{k}\right) + \sin\left(\frac{b}{k}\right)\sin\left(\frac{c}{k}\right)\frac{\operatorname{tang}\left(\frac{b+u}{k}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{c}{k}\right)}$$

On obtient donc la relation indiquée si l'on pose

$$\cos A = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{x}{k}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{b}{k}\right)} - \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{b+u}{k}\right)}{\operatorname{tang}\left(\frac{c}{k}\right)},$$

omme on en a le droit, puisque les expressions du second membre sont inférieures à l'unité et ne dépendent pas de la grandeur des côtés b et x de angle A. Par suite, cos A est égale à lim $(x : b)$, si b décroît indéfiniment (1).

En supposant l'angle A obtus, on arrive à la même formule, à condition de définir le cosinus d'un angle obtus comme égal à *moins* le cosinus du supplément de cet angle.

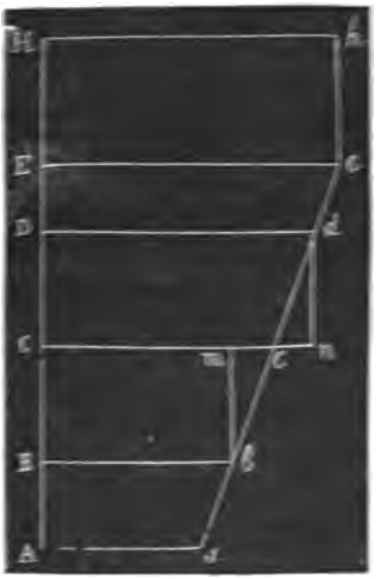
16. *Comparaison avec la géométrie lobatchèfskienne.* L'exposé précédent, e n° 11 et le 2° du n° 12 exceptés, est une simple transposition de celui que M. Gérard a donné pour la géométrie lobatchefskienne, dans l'article cité en note, au n° 1. Inversement, il est facile à celui qui n'a pas à sa disposition l'article de M. Gérard de le reconstruire au moyen de ce qui précède, en partant de cette proposition fondamentale : *la somme des trois angles d'un triangle est inférieure à deux droits.*

En géométrie lobatchefskienne, on n'a pas besoin de prouver explicitement le théorème relatif à la continuité de la fonction $f(y)$, limite de $(x' : x)$ dans un quadrilatère trirectangle (x, y, x', y'), et l'on démontre un peu plus simplement qu'en géométrie riemannienne le théorème

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

(1) Si l'on suppose k infini, on a, comme l'on sait, la géométrie euclidienne ; on trouve alors os A = $(x : b)$, ce qui prouve que les cosinus d'angle ont le même sens dans tous les ystèmes de géométrie.

Voici l'esquisse de cette démonstration pour ceux de nos lecteurs qui peuvent consulter l'article de M. Gérard. Soient AH, ou deux perpendiculaires à une même droite Ax ; AB = x, AC = x, AD = x − y, EH = y, ces longueurs portées sur AH : Bb, Cc, Dd, Ee des perpendiculaires à AH rencontrant ce en b, c, d, e ; Hh une perpendiculaire à AH, et une perpendiculaire Hi, Im, ... des perpendiculaires à Ax.



On prouve aisément que l'on a $cm > cm$, et par suite, $cm > Cm - \ldots$, puis, comme au n° 12, l'...

$$2fx\ fy \geq fx - y + fx - y$$

On a ensuite

$$\frac{cm}{cb} > \frac{cm}{cd} \quad \text{ou} \quad \frac{cm}{cm} < u, \quad \text{si } u = \frac{cd}{cb}$$

L'inégalité $\frac{cm}{cm} > u$ donne $Cm - \ldots < Cc\ (1 - u)$, puis en divisant par Ax et faisant tendre Ax vers zéro.

$$fx - y - fx - y \cdot \lim u \leq fx\ fy \cdot \lim (1 - u).$$

Mais

$$\lim u = \lim cd : cb = CD : CB = 1.$$

Donc

$$fx + y + fx - y \leq 2fx\ fy.$$

Des relations 2 et 1, on déduit

$$fx + y + fx - y = 2fy\ fy.$$

On prouve ensuite que

$$fz = \mathrm{Ch}\left(\frac{z}{k}\right),$$

après avoir observé que la fonction fz est supérieure à l'unité, sauf pour $z = 0$. Cette démonstration se fait plus facilement que pour le théorème correspondant en géométrie riemannienne parce que z peut croître indéfiniment sans que f change de signe.

La relation entre les trois côtés d'un triangle est

$$Ch\left(\frac{a}{k'}\right) = Ch\left(\frac{b}{k'}\right) Ch\left(\frac{c}{k'}\right) - Sh\left(\frac{b}{k'}\right) Sh\left(\frac{c}{k'}\right) \cos A,$$

cosA ayant encore le même sens qu'en géométrie euclidienne, comme on le voit en faisant croître k' indéfiniment (1).

(1) Une esquisse du présent mémoire a été publiée dans le *Compte-rendu de la réunion Oxford de l'Association britannique pour l'avancement des sciences* (août 1894). De la relation entre les trois côtés d'un triangle on déduit aisément le théorème de Stewart, c'est-à-dire la relation entre les six distances de quatre points dont trois sont en ligne droite. Ce théorème de Stewart permet ensuite d'établir la relation de Schering entre les dix distances de cinq points dans l'espace, relation qui est le point de départ de M. De Tilly, dans le second mémoire cité en tête de ce travail. Enfin, la relation de Schering conduit à une relation entre les quinze distances de six points où les cosinus (circulaires ou hyperboliques) des distances (divisées par k ou k') de deux d'entre eux n'entrent qu'au premier degré. Nous espérons pouvoir publier ultérieurement cette relation et les démonstrations dont il vient d'être question.

(Extrait du *Compte rendu du troisième congrès scientifique international des catholiques*, Section des sciences mathématiques et naturelles, pp. 12-25).

QUELQUES PROPRIÉTÉS ANGULAIRES DES CERCLES

PAR LE R. P. AUG. POULAIN, S. J.
Sous-directeur aux internats de l'Université catholique d'Angers

1. — Steiner a proposé (1) le problème de *construire un cercle coupant trois cercles donnés sous des angles donnés*. Mais, tout en annonçant qu'il possédait la solution générale, il n'a résolu que quelques cas particuliers. M. Darboux a repris la question (2), en la rattachant ingénieusement aux propriétés analytiques des sphères de rayon nul, à centre imaginaire. En 1882, M. Fiedler, de Zurich, a imaginé de son côté une méthode voisine, mais où l'on n'opère que sur des figures réelles; il remplace les sphères par des cônes et des hyperboloïdes équilatères (3). Enfin, M. Rouché a exposé dans le tome I de son *Traité de géométrie* (4) une construction élémentaire due à M. G. Tarry, et qui exige la solution préliminaire de quatre cas particuliers. Dans le tome II (p. 288), se trouve une solution plus rapide, s'appliquant aux figures tracées sur la sphère. Mais elle n'est pas toujours exécutable graphiquement. Car elle ramène la question à mener un cercle tangent à trois autres; or ceux-ci sont parfois imaginaires, même quand les solutions qu'il faut en déduire sont réelles.

Le théorème principal de M. Darboux est simple et élégant. Si, depuis vingt-deux ans, il ne s'est pas vulgarisé, c'est qu'il reposait sur une théorie longue et savante. Nous croyons donc utile d'en donner une démonstration uniquement empruntée à la géométrie élémentaire, et qu'on peut abréger encore, à l'aide des premières notions de géométrie analytique. Elle est la conséquence d'une proposition plus générale (théorème I) qui, elle-même, se déduit d'un lemme.

Dans ce qui suit, nous désignerons les cercles, tantôt par leur centre. Exemple : le cercle A); tantôt par leur centre et leur rayon : cercle (A, R).

(1) *Journal de Crelle*, t. II.
(2) *Annales scientifiques de l'École Normale*, 1872, t. I, p. 369.
(3) Voir le compte rendu dans le *Bulletin des sciences mathématiques*, 1884, p. 209.
(4) 6e édition, 1891, p. 290.

2. Lemme. — *Étant donnés deux points* A *et* B, *dont on connaît les puissances* u, u', v, v' *par rapport à deux cercles* (ω), (ω'), *l'axe radical de ces cercles partage* AB *dans le rapport* $\frac{u-u'}{v-v'}$; *les segments étant pris avec des signes contraires quand le partage de* AB *est additif* (1).

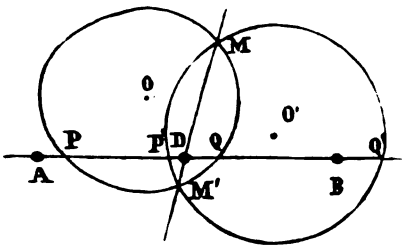


Fig. 1.

Soient P, Q, P', Q', les intersections réelles ou imaginaires des deux cercles et de AB; D, le point où AB est coupée par l'axe radical.

Représentons les segments par deux lettres, conformément au principe des signes; c'est-à-dire que AD = — DA. On sait qu'alors, pour tout point K de AB, on a AB = AK + KB; et que les relations peuvent être écrites sans distinguer les différentes dispositions de la figure, et sans même recourir à celle-ci.

Il faut prouver qu'on a

$$[1] \qquad \frac{DA}{DB} = \frac{u-u'}{v-v'}.$$

Puisque D appartient à l'axe radical,

$$[2] \qquad DP.DQ = DP'.DQ',$$

ou, transformant de manière que D ne soit associé qu'à la seule lettre A,

$$[3] \qquad (DA + AP)(DA + AQ) = (DA + AP')(DA + AQ'),$$

ou, effectuant les calculs et mettant DA en facteur commun,

$$[4] \quad DA(AP + AQ - AP' - AQ') = AP'.AQ' - AP.AQ = u' - u;$$

ou, groupant dans le premier membre AP avec AP', et AQ avec AQ',

$$[5] \qquad DA(P'P + Q'Q) = u' - u.$$

Nous trouvons une seconde relation analogue, en échangeant entre elles les lettres A et B :

$$[6] \qquad DB(P'P + Q'Q) = v' - v.$$

Divisant [5] et [6], on obtient la relation cherchée [1].

(1) Ce lemme peut être mis sous une autre forme : *Deux couples de points* (P, Q), (P' Q') *étant situés sur une droite* AB, *si on connaît les puissances* u, u' *et* v, v' *de* A *et* B *par rapport aux deux couples, le point central* D *de l'involution qu'ils définissent a une position déterminée : il partage* AB *dans le rapport*, etc.

3. — La *géométrie du triangle* établit immédiatement ce lemme. Car, C étant un point arbitraire, et ABC étant pris pour triangle de référence, désignons par u, u' les puissances de C par rapport aux deux cercles. Les équations barycentriques sont (1)

$$(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha u + \beta v + \gamma w) - \Sigma a^2 \beta\gamma = 0,$$
$$(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha u' + \beta v' + \gamma w') - \Sigma a^2 \beta\gamma = 0.$$

L'axe radical est donc

$$\alpha(u - u') + \beta(v - v') + \gamma(w - w') = 0.$$

Dès lors, pour $\gamma = 0$,

$$\frac{DA}{DB} \text{ ou } -\frac{AD}{DB} \text{ ou } -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{u - u'}{v - v'}.$$

4. — On peut aussi se servir des coordonnées cartésiennes. Prenons AB pour axe des x et l'axe MM' pour axe des y. A et B ont pour abscisses x_0, x_1. Soit $P = 0$ l'équation du premier cercle. Celle du second est $P + \lambda x = 0$. Pourvu que le coefficient de x^2 ait été ramené à l'unité dans P, les puissances de A sont $u = P_0$, $u' = P_0 + \lambda x_0$. Par suite, $u - u' = \lambda x_0$. De même $v - v' = \lambda x_1$. Dès lors

$$\frac{u - u'}{v - v'} = \frac{x_0}{x_1}.$$

Or $\frac{x_0}{x_1}$ est précisément le rapport de partage déterminé sur AB par l'axe des y, si on fait la convention des signes indiquée par l'énoncé.

5. — Ce lemme a l'avantage d'éviter les équations des cercles, et, par suite, la géométrie analytique, dans un certain nombre de questions, telles que la suivante.

6. THÉORÈME I. — *Soient deux cercles* A, R_a, B, R_b *coupés par un troisième* ω, ε *suivant les angles* α, β, *et* S *un quelconque des cercles orthogonaux aux deux premiers. Les deux derniers cercles ont pour axe radical une droite* MM' *qui passe par un des centres de similitude des deux cercles* A, R_a *ou* α', B, R_b *ou* β', *concentriques aux premiers* (2).

(1) Voir mes *Premières* et *nouvelles leçons de Trigonométrie*, p. 15. Paris, 1892. Gauthier-Villars, rue de la Sorbonne, 55; et les *Comptes rendus de l'Assoc.* de 1892, p. 60.

(2) Le raisonnement ne vaut établissant encore un contact direct, et le cercle orthogonal

si on veut éviter la trigonométrie dans cet énoncé et dans la démonstration, appellera R_a le rayon du premier cercle auxiliaire, et on le définira en ant que les tangentes à ce cercle coupent le cercle concentrique (A, R_a) ıs l'angle α; et ainsi des autres.

Démonstration. La puissance du point A par rapport à (ω) est

$$u = R_a^2 \pm 2\rho R_a \cos\alpha.$$

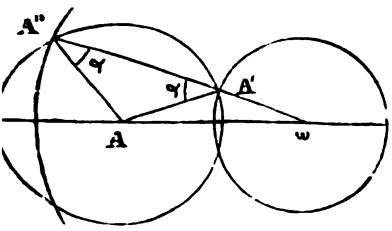


Fig. 2.

Car, soit A' un des points d'intersection de (ω) et de A, R_a). Le triangle AA'ω a son angle en A' formé par deux rayons R_a, ρ. Cet angle est égal à α ou à $\pi-\alpha$. On a donc

[8] $$\overline{A\omega}^2 = R_a^2 + \rho^2 \pm 2\rho R_a \cos\alpha.$$

On en tire

[9] $$\overline{A\omega}^2 - \rho^2 \text{ ou } u = R_a^2 \pm 2\rho R_a \cos\alpha.$$

Pour le cercle orthogonal,

[10] $$u' = R_a^2,$$

valeur que donne la formule précédente, pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent

[11] $$u - u' = \pm 2\rho R_a \cos\alpha.$$

On trouverait de même une valeur analogue pour $v - v'$.

Cela posé, en vertu du lemme (2) l'axe radical de (ω, ρ) et du cercle orthogonal partage AB dans le rapport

[12] $$\frac{u - u'}{v - v'} = \pm \frac{2\rho R_a \cos\alpha}{2\rho R_b \cos\beta} = \pm \frac{R_a \cos\alpha}{R_b \cos\beta}.$$

Le point de division est donc un des deux centres de similitude de (A, $R_a \cos\alpha$), (B, $R_b \cos\beta$).

est remplacé par un autre (ω'), d'une espèce plus générale. Celui-ci coupe les deux premiers cercles suivant un angle α'. β', tels que les quatre cosinus soient proportionnels :

$$\frac{\cos\alpha'}{\cos\alpha} = \frac{\cos\beta'}{\cos\beta}.$$

De plus il faut ajouter la restriction, expliquée plus loin (8), que les intersections de (B, R_b) sont semblables ou dissemblables suivant que celles de (A, R_b) sont semblables ou dissemblables.

7. — Réciproquement, *si l'axe* MM' *passe par un des centres de similitude des cercles auxiliaires* (A, $R_a \cos\alpha$), (B, $R^b \cos\beta$); *si, de plus, le cercle* (ω) *coupe suivant l'angle* α *un des premiers cercles* (A, R_a), *il coupe suivant l'angle* β *le second cercle* (B, R_b).

En effet, on peut toujours trouver une quantité λ telle que

$$\overline{B\omega}^2 = R_b^2 + \rho^2 + 2\lambda\rho R_b, \qquad [13]$$

puisqu'on pose ainsi une équation du premier degré en λ. La puissance du point B est alors

$$v = \overline{B\omega}^2 - \rho^2 = R_b^2 + 2\lambda\rho R_b; \qquad [14]$$

d'où

$$v - v' = 2\lambda\rho R_b. \qquad [15]$$

L'axe radical MM' partage donc AB dans le rapport $\frac{R_a \cos\alpha}{R_b \lambda}$. Mais, par hypothèse, ce rapport égale $\frac{R_a \cos\alpha}{R_b \cos\beta}$. Donc $\lambda = \cos\beta$. Par suite, en vertu de [13], le triangle BB'ω existe et son angle en B' égale β. Dès lors (ω, ρ) est coupé par (B, R_b) sous l'angle β.

8. Remarque I. — Le théorème précédent indique deux centres de similitude, mais il ne précise pas celui de ces points par lequel doit passer MM'. Cette indécision est facile à lever quand (ω, ρ) est tangent aux cercles donnés (A), (B); ce qui correspond au cas particulier de $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Car alors on distingue les contacts en *intérieurs* et *extérieurs*, et l'on dit : MM' *passe par un centre externe, si les contacts avec* (A) *et* (B) *sont tous deux intérieurs, ou tous deux extérieurs*. C'est le centre interne dans le cas contraire. On abrège même cet énoncé en disant que, dans le premier cas, les contacts avec (A) et (B) sont *semblables entre eux*.

Il semble, au premier abord, qu'on ne puisse faire aucune distinction analogue quand (ω) coupe (A) sous l'angle α; puisque les intersections ne sont ni intérieures ni extérieures. Mais considérons les rayons AA', ωA' menés au point de concours (fig. 2). Leur angle peut être aigu ou obtus; il est égal, l'un à α, l'autre à $\pi - \alpha$.

Ainsi, *à l'aide des rayons, on établit deux espèces très distinctes de cercles* (ω) *coupant* (A) sous l'angle α. Dans le cas particulier de $\alpha = 0$, c'est-à-dire quand (ω) est tangent à (A), l'espèce correspondante à l'angle aigu des rayons donne précisément les cercles tangents intérieurement; l'autre donne des cercles tangents extérieurement.

Dès lors, pour poursuivre l'analogie des deux théories, on peut convenir de dire que (ω) coupe *d'une manière semblable* (A) et (B) sous les angles α et β,

lorsque les angles AA'ω, BB'ω, *formés par les rayons*, sont à la fois aigus, ou à la fois obtus.

9. — Il serait utile d'introduire ces distinctions dans les traités de géométrie.

Les ayant établies, il est facile de compléter le théorème I, en précisant par quel centre de similitude passe l'axe MM'. *C'est le centre interne ou externe, suivant que les rencontres de* (ω) *avec* (A) *et* (B) *sont semblables entre elles ou dissemblables.*

En effet, nous pouvons toujours supposer que α désigne un angle aigu. Dans la formule [11] qui donne $u-u'$, on a donc le signe ±, suivant que les rayons font un angle obtus ou aigu. Si les intersections de (ω) et (B) sont semblables à celles de (ω) et (A), les signes sont les mêmes pour $v - v'$. Le rapport $\frac{u-u'}{v-v'}$ a donc le signe +, qui correspond au centre externe (2).

10. Remarque II. — Le théorème précédent ne semble pas s'appliquer aux cas où l'un des cercles (B, R^b) est remplacé par une droite L. En effet, le cercle concentrique (B, $R_b \cos\beta$) a non seulement son centre à l'infini, mais il y est rejeté tout entier. Car sa distance à la droite L est la limite de $R_b - R_b \cos\beta$ ou $R_b (1 - \cos\beta)$, pour R_b infini. On ne peut donc pas construire directement le centre de similitude de ce cercle et d'un autre.

Mais on tourne la difficulté en remarquant que le centre de similitude de deux cercles ne change pas, si on divise leurs rayons par une même quantité $\cos\beta$. Le second cercle auxiliaire devient ainsi (B, R_b), et le premier, $\left(A, R_a \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)$. L'un dégénère en la droite L. Le second est facile à construire. On est ramené à marquer les centres de similitude d'un cercle et d'une droite. On sait qu'ils sont sur le cercle, aux deux extrémités du diamètre perpendiculaire à la droite.

11. — Voici une seconde méthode. Pour R_b suffisamment grand, le cercle (B, $R_b \cos\beta$) est extérieur à l'autre cercle auxiliaire (A, $R_a \cos\alpha$), puisque le premier s'éloigne à l'infini. Donc le centre de similitude finit par occuper des positions d'où l'on peut mener des tangentes communes aux deux cercles auxiliaires. Ces tangentes coupent toujours le cercle variable (B, R_b) suivant l'angle β. Dès lors, à la limite, ces droites font l'angle β avec L, tout en restant tangentes à (A, $R_a \cos\alpha$). On peut les construire et leurs intersections donnent les points cherchés.

12. Théorème II (1). — *Étant donnés trois cercles* (A, R_a), (B, R_b), (C, R_c), S *leur centre radical, p, la puissance commune de* S, 1° *à tout cercle* (ω, ρ) *qui*

(1) C'est la troisième partie de cet énoncé qui constitue le théorème de M. Darboux.

coupe les trois premiers sous les angles α, β, γ, *en correspond un second* (ω', ρ') *jouissant de la même propriété. Il est son réciproque par rapport à* S; *la puissance d'inversion est p.* 2° *Leur axe radial* MM' *leur est commun avec le cercle* (S, $\sqrt{p}$) *orthogonal aux trois premiers.* 3° *Cet axe* MM' *est l'un des quatre axes de similitude de trois cercles auxiliaires concentriques aux premiers et de rayons* R *cos* α,...

1° Faisons la transformation par rayons vecteurs réciproques, indiquée par l'énoncé. Les trois cercles donnés (A, R_a),... ne changent pas. Le cercle (ω, ρ) est remplacé par un autre (ω', ρ') qui coupe encore les premiers sous les angles α, β, γ.

2° On sait que le cercle orthogonal aux trois premiers a S pour centre et $\sqrt{p}$ pour rayon. La transformation ne le change donc pas. Dès lors les points M, M' où il coupe (ω, ρ) restent les mêmes. Ils appartiennent donc aussi au transformé de (ω, ρ). Par suite MM' est l'axe radical des trois cercles (S, $\sqrt{p}$), (ω, ρ), (ω', ρ').

3° En vertu du théorème I, l'axe MM' passe par un des centres de similitude de (A, R_a cos α) et (B, R_b cos β); et, de même, par un des centres de similitude du premier de ces cercles et de (C, R_c cos γ). C'est donc un axe de similitude des trois cercles auxiliaires.

13. — La troisième partie a été déduite du théorème I. Mais on pourrait, au contraire, faire du premier théorème un corollaire du second. En effet, prenons un centre C, tel que $\overline{SC}^2 - p$ soit positif. Prenons aussi pour rayon R_c la racine carrée de cette quantité. Le cercle (S, $\sqrt{p}$) est orthogonal à ce troisième cercle, comme à (A, R_a), (B, R_b), puisqu'on a $\overline{SC}^2 = R_b^2 + (\sqrt{p})^2$.

D'après le théorème II, MM' est l'axe de similitude des trois cercles auxiliaires. Donc cette droite passe par un des centres de similitude des deux premiers d'entre eux.

14. — Le théorème II a une réciproque analogue à celle du théorème I, et se déduisant de celle-ci.

15. Application. — Le théorème et sa réciproque donnent la solution du problème : *Construire un cercle qui coupe trois cercles donnés suivant des angles donnés.* Le cercle orthogonal (S, $\sqrt{p}$) est connu par son centre et son rayon, qui tantôt est réel, tantôt imaginaire de la forme K $\sqrt{-1}$, quand *p* est négatif. Il coupe chacun des axes de similitude en deux points M, M', réels ou imaginaires conjugués. Et l'on est ramené à ce problème plus simple dont nous parlerons plus loin : *Par deux points* M, M' *mener un cercle* (ω) *qui coupe un cercle* (A, R_a) *suivant un angle* α.

Comme ce dernier problème a au plus deux solutions, chaque axe de similitude donne au plus deux cercles; ce qui fournit un total maximum de huit solutions.

Chaque couple de cercles est caractérisé encore par la manière dont ils coupent les cercles donnés (A), (B), (C). Pour ceux du premier couple, les trois rencontres sont semblables (9). Pour ceux du second couple, les rencontres avec (A), (B) sont semblables; mais dissemblables de la rencontre avec (C), etc.

16. — En vertu de la remarque sur les cercles dégénérés en droites (10), nous savons résoudre, outre le problème général, certains cas particuliers. Ils doivent présenter les caractères suivants : 1° qu'il n'y ait pas deux cercles qui se réduisent à des points; puisqu'on ramène chaque cas à celui-là; 2° que la figure ne se réduise pas non plus à un point et deux droites; puisqu'iln'y a plus alors de cercles auxiliaires.

On peut résoudre les quatre problèmes suivants :

Problème II. — Deux cercles et une droite;
Problème III. — Deux cercles et un point;
Problème IV. — Un cercle et deux droites;
Problème V. — Un cercle, une droite et un point.

17. — Il reste à résoudre directement les trois problèmes suivants, que nous allons examiner successivement :

Problème VI. — Deux points M, M' et un cercle (A, R_a).
Problème VII. — Deux points M, M' et une droite L.
Problème VIII. — Un point M et deux droites KL, KL'.

18. *Problème VI. — Par deux points* M, M', *mener un cercle* (ω) *qui coupe un cercle donné* (A, R_a) *suivant un angle donné* α.

On pourrait déduire du théorème 1 plusieurs méthodes de résolution. Mais, au point de vue pratique, le mieux est de se contenter d'un procédé qu'on puisse retrouver à volonté, sans effort de mémoire. Ce procédé, c'est l'inversion. Nous distinguerons deux cas.

19. *1er Cas.* — M *et* M' *sont réels.* Ce cas paraît être le seul qui ait été traité dans les recueils de problèmes.

On fait, par rapport à M, une inversion qui conserve le cercle (A, R_a). La question est ainsi ramenée à ce problème très simple : *Mener par deux points réels une droite coupant un cercle donné sous un angle donné.* Cette droite est tangente à un cercle concentrique à (A, R_a). On trouve deux solutions au plus.

20. — La méthode est la même pour résoudre le problème VII (deux points et une droite).

21. *2e Cas.* — M, M' *sont imaginaires conjugués;* c'est-à-dire que ces points sont définis comme intersections d'une droite MM' et d'un cercle dont on donne le centre S et le rayon $\sqrt{p}$. Celui-ci est, soit réel, mais trop petit

pour atteindre la droite, soit imaginaire de la forme K $\sqrt{-1}$. Ce sont là, en effet, les deux cas que peut présenter le cercle orthogonal dans le problème général et dans ses cas particuliers.

Concevons le *faisceau* de cercles passant par les deux points M, M'. On construit ce qu'on appelle les *deux points limites* du faisceau (ce sont les cercles évanouissants du système). On sait qu'ils sont placés sur la ligne des centres SD, perpendiculaire à l'axe MDM'. Ils sont à la même distance de l'intersection D, et le carré de cette distance égale $-\overline{DM}^2$ ou $-(\overline{SM}^2-\overline{SD}^2)$ ou $\overline{SD}^2-p$. Cette longueur est donc, soit l'hypoténuse, soit le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle, suivant que p est négatif ou positif.

Or, si on fait l'inversion par rapport à un des points limites, on sait (1) que tous les cercles du faisceau sont transformés en cercles concentriques entre eux. On est donc ramené à ce problème plus simple : *construire un cercle de centre donné, coupant un cercle donné sous un angle donné* α. Les rayons menés au point de rencontre des deux cercles forment l'angle donné ou son supplément. Par suite, leur point de concours est situé sur un des arcs décrits sur la ligne des centres et capables de l'angle α, ou sur le prolongement de cet arc. Il y a deux solutions au plus.

22. *Problème VIII. — Par un point donné* M, *mener un cercle* (ω) *qui coupe deux droites données* KL, KL' *suivant deux angles donnés.*

On pourrait résoudre le problème, en se servant uniquement du théorème I. Mais il est plus simple de déterminer un second point M' de (ω) ; ce qui ramène au problème précédent.

En effet, on connaît le rapport des distances ωP, ωP' du centre ω à KL, KL'. Car

$$\frac{\omega P}{\omega P'} = \frac{\rho \cos \alpha}{\rho \cos \beta} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \text{constante.}$$

Le centre est donc sur une des deux droites Kω, définies par ce rapport constant. L'une quelconque de ces droites devant être un diamètre de (ω), on a un second point de ce cercle en prenant le symétrique M' de M par rapport à chacune des droites. On connaît donc deux points M et M' de (ω) et une droite que (ω) doit couper sous l'angle α (problème VII). Il peut y avoir jusqu'à quatre solutions.

(1) Voir le *Traité de géométrie* de M. Rouché ; édition de 1891, t. I, p. 274.

(Extrait du *Compte rendu du troisième congrès scientifique international des catholiques*, Section des sciences mathématiques et naturelles, pp. 26-34).

BRUXELLES. -- IMPRIMERIE POLLEUNIS ET CEUTERICK
37, RUE DES URSULINES, 37

MÊME MAISON A LOUVAIN, 30, RUE DES ORPHELINS
Ancienne Maison LEFEVER, Frères et Sœur

NOTICE SUR LES RECHERCHES

DE M. DE TILLY

EN MÉTAGÉOMÉTRIE[1]

PAR

P. MANSION

Professeur ordinaire à l'Université de Gand
Membre de l'Académie royale de Belgique
et de la Société royale des Sciences de Bohême

M. De Tilly a publié, en décembre 1893, un Mémoire remarquable intitulé : *Essai de Géométrie analytique générale* (2), qui peut être regardé comme le couronnement des recherches qu'il a entreprises, depuis trente-cinq ans environ, sur les principes fondamentaux de la Géométrie. Comme les travaux du savant commandant de l'École militaire de Bruxelles forment un tout indissoluble, et que des circonstances fortuites (3) ont empêché la diffusion de ses écrits, soit en Belgique, soit à l'étranger, nous croyons utile d'analyser rapidement l'ensemble de ces recherches pour mieux en faire ressortir la portée à la fois scientifique et philosophique. Nous donnerons en même temps, dans les notes, des indications bibliographiques exactes sur divers points relatifs à la Métagéométrie, sans prétendre toutefois épuiser la question au point de vue historique.

I.

Tous ceux qui se sont occupés de l'histoire ou de la philosophie des mathématiques connaissent la singulière lacune que semble présenter à ses débuts, au point de vue logique, la science de l'espace, la Géométrie.

Dans ses immortels *Éléments*, Euclide met, pour ainsi dire, cette lacune en pleine lumière; en énonçant après les définitions de son premier livre, outre un certain nombre d'axiomes, plusieurs postulats dont l'un surtout est devenu célèbre : " *Si une droite*

qui rencontre deux autres droites situées dans un même plan, fait avec ces droites du même côté des angles intérieurs dont la somme soit moindre que deux angles droits, ces deux droites prolongées se rencontrent du côté où la somme est inférieure à deux droits. „

Dès l'antiquité, des tentatives furent faites pour déduire, de théorèmes antérieurs, cette proposition, appelée souvent *postulatum d'Euclide,* mais personne n'y réussit.

Il en fut de même dans les temps modernes : Nassareddin, Clavius, Wallis, Saccheri, Lambert, Legendre, s'efforcèrent en vain d'asseoir sur une base inébranlable les principes fondamentaux de la Géométrie (4).

Gauss, Lobatchefsky et Jean Bolyai découvrirent presque en même temps, vers 1830, la vraie nature logique du postulatum d'Euclide : il n'est pas une suite des vérités géométriques qui le précèdent dans les Eléments; il n'est pas non plus en contradiction avec elles; il en est indépendant. Il exprime l'une des deux suppositions, également admissibles au point de vue de la rigueur mathématique, que l'on peut faire sur la manière d'être de deux droites, supposées infinies, situées dans un même plan et non perpendiculaires à une même troisième. Le postulatum d'Euclide conduit à la Géométrie ordinaire; l'hypothèse contraire conduit à une autre Géométrie, la Géométrie non euclidienne, tout aussi rigoureuse que celle qui est basée sur le postulatum d'Euclide et d'ailleurs pratiquement équivalente, au point de vue des applications.

Gauss se contenta de communiquer un extrait de ses recherches à Schumacher sans en rien publier, mais en lui donnant une forme si précise que personne ne peut douter qu'il ne fût en possession des vérités fondamentales de la Géométrie non euclidienne (5).

Jean Bolyai fit paraître, en 1832, un court exposé de cette nouvelle branche des mathématiques, en appendice à un livre de son père (6).

Lobatchefsky, le premier, avant Gauss et Bolyai, avait publié un mémoire sur la matière; il ne cessa, pendant trente ans, de développer ses recherches dans ce domaine, principalement en langue russe, dans les Mémoires de Kazan, mais aussi en français, dans un article du *Journal de Crelle* et dans son dernier ouvrage; en allemand, dans une brochure publiée à Berlin (7).

Les écrits de Lobatchefsky et de Bolyai restèrent longtemps ignorés en Occident, et bien des chercheurs essayèrent de

démontrer le célèbre postulatum longtemps encore après que les travaux dont il vient d'être question avaient prouvé, d'une manière presque certaine, l'inutilité d'une pareille entreprise.

En Belgique, Lamarle fit paraître, en 1856, sa démonstration cinématique du postulatum, où il retrouvait, après Clavius et Saccheri, les propriétés de l'équidistante de la droite, en admettant au fond, comme eux, sans preuve, que cette équidistante est une droite (8).

En 1860, Delbœuf publia ses *Prolégomènes* (9), étude remarquable pour le temps où elle parut, où il remplaçait le postulatum d'Euclide par celui de Wallis, en lui donnant une forme plus intuitive et plus générale.

II.

C'est alors, vers 1860, que M. De Tilly entre dans la carrière, par ses *Recherches sur les Éléments de la Géométrie* (10), où il signale toutes les imperfections et les lacunes des *Éléments* de Legendre et où il essaie de les faire disparaître ou de les combler. Dès ce premier écrit, il donne déjà des preuves d'un véritable esprit critique à propos des questions difficiles qui se présentent en Géométrie élémentaire et, en particulier, à propos du postulatum d'Euclide. Il montre très bien le point faible de la démonstration que Legendre en donne, et en propose lui-même une nouvelle en la basant sur un postulat aussi admissible que celui que Legendre admet implicitement. Le postulat de M. De Tilly est le suivant : Il existe un minimum différent de zéro pour la valeur de l'angle d'un triangle équilatéral quelque grands que soient les côtés.

Peu de temps après, M. De Tilly reconnaît que l'on peut établir un système complet de Géométrie sans recourir ni au postulatum d'Euclide, ni à aucun autre équivalent. Sans sortir de la Géométrie plane, il retrouve, par une voie personnelle, tous les résultats fondamentaux de Lobatchefsky ; mais il va plus loin : il écrit une cinématique, une statique et une dynamique non euclidiennes. Ces recherches furent présentées à l'Académie royale de Belgique, le 1er août 1868, et publiées dans l'un de ses recueils (11). Faut-il dire qu'elles ne furent pas appréciées à leur valeur dans notre pays ? Le sujet était trop neuf, trop philosophique peut-être.

Hoüel venait cependant de faire paraître (1866) la traduction des *Études géométriques sur la théorie des parallèles* de Lobat-

chefsky (12), et cette traduction avait été accueillie dans le monde savant avec l'intérêt qu'elle méritait.

Deux ans plus tard, Beltrami démontrait qu'il existe une correspondance presque parfaite entre les propriétés des triangles géodésiques tracés sur des surfaces à courbure constante négative et celles des triangles rectilignes dans le plan lobachefskien (13). Il en conclut, par un raisonnement ingénieux, qu'il est impossible de démontrer le postulatum d'Euclide par la considération des figures planes.

Le Mémoire de Beltrami eut un grand retentissement : après cet écrit, ceux qui croyaient encore le postulatum démontrable ne pouvaient plus en chercher de preuve en dehors de la Géométrie solide.

C'est M. De Tilly qui, le premier, croyons-nous, établit que le postulatum d'Euclide est indémontrable par un raisonnement géométrique quel qu'il soit, en 1872, dans un compte rendu d'un ouvrage de M. Flye de Sainte-Marie (14), en 1873, sous une forme plus développée, dans un rapport sur un Mémoire de M. Genocchi (15).

III.

Quelques années plus tard, en 1877, M. De Tilly présentait à la *Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* un travail d'ensemble où il réunissait sous une forme systématique nouvelle, non seulement ses spéculations antérieures sur les principes de la Géométrie, mais aussi (outre un essai sur les bases de la Mécanique dont nous ne dirons rien ici) un exposé complet et original d'une nouvelle branche de la Géométrie non euclidienne, celle qui porte le nom de Riemann.

Riemann, en 1854, dans une leçon inaugurale, avait émis, sur les principes de la Géométrie, quelques idées neuves et profondes qui ne furent livrées au public qu'après sa mort, en 1867 (16).

Malgré la forme concise et obscure sous laquelle elles avaient paru, elles ne tardèrent pas à susciter chez les géomètres un nouveau courant de recherches relatives aux principes de la Géométrie. Outre les deux alternatives que nous avons signalées plus haut relativement à la position de deux droites dans un plan, celle d'Euclide et celle de Lobatchefsky, il y en avait une troisième tout aussi admissible, soit au point de vue spéculatif,

soit au point de vue pratique. Quelle était cette troisième alternative ? La voici sous une forme plus saisissable que celle que Riemann lui a donnée : La somme des trois angles d'un triangle peut, *sans aucune contradiction*, être supposée non seulement toujours égale à deux droits, comme dans la Géométrie d'Euclide, ou toujours inférieure, comme dans celle de Lobatchefsky, mais elle peut aussi être supérieure.

Le Mémoire de Riemann, que Hoüel fit connaître par une traduction française en 1870, ne contient pour ainsi dire que l'idée fondamentale du système de Géométrie qui correspond à cette troisième alternative. M. De Tilly, admirablement préparé, par ses méditations antérieures, à saisir le germe fécond contenu dans l'idée de Riemann, en vit toute la portée.

D'autres géomètres qui, après Beltrami et Cayley (17), avaient traduit les spéculations de Lobatchefsky dans la théorie des surfaces à courbure négative ou dans des propriétés équivalentes de l'hyperbole, transposèrent aussi l'idée de Riemann, dans la théorie des surfaces à courbure positive ou dans des propriétés presque équivalentes de l'ellipse.

Il n'en fut pas de même de M. De Tilly dans son second grand Mémoire, son *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique* (18). Dans ce remarquable ouvrage, c'est directement qu'il attaque et expose d'une manière complète les bases de la science de l'espace. Reprenant à son insu peut-être une idée émise par Cauchy en 1833 (19), il fonde toute la Géométrie sur la notion d'intervalle ou de distance de deux points. Cette notion première irréductible, il l'analyse avec une sagacité et une rigueur magistrales et il en fait sortir successivement la Géométrie de Riemann, la Géométrie de Lobatchefsky et enfin celle d'Euclide. Il admet, pour cela, d'abord la notion de distance seule, sans aucun postulat, puis un premier et enfin un second postulat de simplification. Il développe, à partir des premiers principes, le plan d'un traité complet de Géométrie et de Trigonométrie dans les trois hypothèses.

Cette fois, le succès fut complet, sauf peut-être en Belgique, où des spéculations aussi profondes ont rarement du retentissement. Il fut d'autant plus complet, qu'à part un manuel de M. Frischauf (20), il n'existait aucun livre sur la matière, et que celui de M. De Tilly portait à chacune de ses pages la marque d'un esprit original et profond. Aussi le livre de M. De Tilly fut-il bientôt épuisé et introuvable. Mais l'auteur ne s'en tint pas là.

IV

En terminant son rapport sur le livre de M. De Tilly à la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux, Houël avait dit : " Par l'insertion de ce travail, la Société, dans l'espace de douze ans, aura fait connaître à la France l'alpha et l'oméga de la nouvelle Géométrie. Lobatchefsky, le premier révélateur de cette doctrine, a été dépassé. Nous croyons que les conceptions de M. De Tilly ne seront pas dépassées de sitôt. „ Houël s'est trompé, mais c'est M. De Tilly qui s'est surpassé lui-même en écrivant le dernier Mémoire dont il nous reste à rendre compte.

Ses réflexions sur les principes de la Géométrie l'avaient conduit peu à peu à une conception plus profonde de l'ensemble des questions qu'il avait étudiées jusque là. Il en fit connaître l'idée fondamentale dans une note du discours qu'il prononça comme Directeur de la classe des sciences de l'Académie de Belgique, le 16 décembre 1887 : " Il y a entre n points, $1/2\, n\,(n-1)$ distances et, à partir de $n = 5$, il existe une relation entre ces distances, relation qui n'est pas la même dans les divers systèmes de Géométrie, et qui contient le paramètre constant de la Géométrie réelle (21). „

Cette relation avait été donnée, sans aucun développement, en 1870 et 1873, par Schering pour les deux Géométries non euclidiennes (22), et, au siècle passé, par Lagrange (23) pour la Géométrie euclidienne ; Cayley avait mis la relation euclidienne sous une forme remarquable dans le premier Mémoire qu'il ait publié (24).

C'est de ces relations que M. De Tilly fait sortir la Géométrie tout entière dans le Mémoire intitulé : *Essai de Géométrie analytique générale*, publié à la fin de l'année 1893 (25).

Il observe d'abord, comme dans son livre antérieur, que toutes les vérités de la Géométrie peuvent se réduire en dernière analyse à des relations entre des distances, parce que les autres idées qui se rencontrent dans la science de l'espace ne sont que conventionnelles, tandis que la distance de deux points est une notion première irréductible. Ces relations elles-mêmes dépendent d'une seule relation entre n points, n surpassant de deux unités le nombre des dimensions de l'espace ; dans l'espace réel, $n = 5$, comme le prouve l'expérience.

La relation fondamentale existe donc entre les dix distances de cinq points. Mais elle n'est pas arbitraire : elle doit être telle

qu'elle subsiste pour tous les groupes de cinq points de l'espace ; autrement dit, elle doit vérifier un théorème que l'on peut appeler *la condition des six points*. M. De Tilly prouve que cette condition est nécessaire et suffisante, et qu'elle est vérifiée tant pour la relation de Lagrange que pour celle de Schering. La démonstration est faite en introduisant dans les calculs certaines coordonnées qui sont définies d'une manière purement analytique à partir de la notion même de distance.

Ces coordonnées permettent d'établir l'équation de la ligne droite sous la forme classique, non seulement en Géométrie euclidienne, mais aussi en Géométrie non euclidienne, et, par suite, l'auteur peut en démontrer avec la plus grande facilité la plupart des propriétés ainsi que celles du plan.

Observons toutefois que l'une de ces propriétés, celle qui se rapporte à la mesure de la longueur de la droite et où intervient nécessairement le calcul intégral, suppose des calculs assez ardus qui sont peut-être trop abrégés dans le Mémoire de M. De Tilly. Il en est probablement de même des raisonnements au moyen desquels il établit la vraie valeur du maximum de la distance de deux points.

Après avoir déduit les vérités fondamentales de la Géométrie des relations de Lagrange et de Schering, l'auteur indique avec précision la portée des trois Géométries au point de vue expérimental, et il montre pourquoi il est impossible de démontrer le postulatum d'Euclide d'aucune manière.

Les calculs les plus difficiles du Mémoire sont rejetés dans les notes qui le terminent, suivant une habitude de l'auteur qui ne contribue pas toujours à la clarté. Mais l'une de ces notes, la quatrième, a un autre but. Elle contient la démonstration sommaire de ce théorème capital : Il n'existe pas d'autre système de Géométrie possible que ceux d'Euclide, de Lobatchefsky et de Riemann. Cette démonstration, à la forme près, est empruntée à ses deux grands Mémoires antérieurs et les relie au Mémoire actuel pour en former un tout indissoluble.

La question des principes de la science de l'espace est l'une de celles qui ont le plus préoccupé les géomètres et. parmi eux, quelques-uns des plus illustres de notre époque, témoin les écrits sur ce sujet de Legendre, Lobatchefsky, J. Bolyai, Riemann, Beltrami, Cayley, Klein, Darboux, Schering, Helmholtz (26), Lie (27), Poincaré (28), Newcomb (29). On sait maintenant qu'elle a fait aussi l'objet des méditations de Lagrange (30), de

Gauss, d'Ampère (31) et de Cauchy, qui ont laissé sur cette question des indications rapides, mais importantes malgré leur brièveté et portant l'empreinte de leur génie.

M. De Tilly a étudié trois fois d'une manière de plus en plus approfondie cette question de philosophie mathématique ; il l'a fait d'une manière originale ; personne n'a été aussi loin que lui dans l'investigation des premiers principes des trois Géométries possibles ; personne n'y a apporté une rigueur plus grande et n'a ramené, comme lui, la science de l'espace à ses idées fondamentales.

L'ensemble de ces travaux, qui forme maintenant un tout complet, est une des œuvres mathématiques qui honorent le plus notre pays. Son disciple dans ce domaine trop peu connu en Belgique, souvent le confident de ses pensées, peiné parfois de ne pas voir son œuvre appréciée comme elle devrait l'être, j'ai cru de mon devoir d'écrire les pages qui précèdent pour faire connaître à ceux qui l'ignorent la part considérable que M. De Tilly a prise à l'établissement de la Géométrie comme *Physique mathématique des distances* et comme science absolument rigoureuse.

NOTES BIBLIOGRAPHIQUES.

(1) Cette Notice, avec les présentes notes, a paru dans la *Revue des questions scientifiques*, t. XXXVII, pp. 584-595 (livraison d'avril 1895). Un extrait de cette Notice a été inséré par M. Neuberg dans son *Rapport sur le concours quinquennal des sciences physiques et mathématiques* (période 1889-1893), rapport qui a paru dans le *Moniteur belge*, le 24 janvier 1895, pp. 221-227 (voir pp. 225 et 226).

(2) *Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique* (collection in-8°), t. XLVII, 80 pages (présenté à la Classe des Sciences, le 10 mai 1892). Ce mémoire a été aussi publié en supplément à *Mathesis* (Gand, Hoste ; Paris, Gauthier-Villars et Fils), livraison de décembre 1893, 2e série, t. III.

(3) Les trois principaux mémoires de M. De Tilly ont paru dans des recueils assez peu répandus, et il n'en a été publié, en dehors de ces recueils, qu'un nombre trop restreint de tirages à part.

(4) Voir notre *Analyse des recherches du P. Saccheri, S. J.*, dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1888-1889, t. XIV, 2e partie, pp. 46-59, ou pp. 15-29 de la brochure intitulée : *Notes sur la Géométrie euclidienne et sur la Géométrie non euclidienne*. Le livre de Saccheri : *Euclides ab omni naevo vindicatus*, a été publié à Milan en 1733, année de la mort de l'auteur. Saccheri analyse les essais de Nassareddin et ceux de Wallis et en montre l'insuffisance. Voir aussi, sur Nassareddin et Wallis, CANTOR, *Geschichte der Mathematik*, c. 83, III, pp. 24-26, où

les sources sont indiquées. Le postulat de Wallis est celui-ci : *il existe des triangles semblables.* Clavius dans son édition d'Euclide, et Saccheri dans l'ouvrage cité, après avoir démontré diverses propriétés de l'équidistante d'une droite, ont essayé de prouver, sans y parvenir, qu'elle est aussi une droite.

Les recherches de Lambert, publiées en 1786 seulement, et dont le point de départ est le même que celui de Saccheri, ne nous sont connues que par un passage de la préface du tome III de l'ouvrage de Lie : *Theorie der Transformationsgruppen* (Leipzig, Teubner, 1893. Voir pp. x-xi). — Celles de Legendre se trouvent dans sa *Géométrie,* dont les diverses éditions sont assez différentes l'une de l'autre sur la question du postulatum, par exemple, la 3e et la 12e ; puis dans ses *Réflexions sur différentes manières de démontrer la théorie des parallèles ou le théorème sur la somme des trois angles d'un triangle* publiées en 1833, dans le tome XII (pp. 367-410, une planche) des *Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France.* La célèbre note II de la *Géométrie* de Legendre est moins complète dans les éditions françaises que dans la traduction anglaise due au célèbre Carlyle, mais publiée, en 1824, à Édimbourg sous le nom de Brewster. Dans cette note, Legendre s'inspire d'une idée publiée dans le tome II des *Miscellanea Taurinensia,* par Foncenex, mais due probablement à Lagrange, comme l'a prouvé Genocchi (*Mém. de Turin,* 2e série, t. 29).

(5) Voir ces lettres du 17 mai 1831, du 12 juillet 1831 et du 28 novembre 1846, à la suite des *Études géométriques sur la théorie des parallèles* de Lobatchefsky, traduites par Hoüel (*Mémoires de Bordeaux,* 1866, t. IV, ou tirage à part, Paris, Gauthier-Villars, 1866 [42 pp. in-8o]). Dans la seconde lettre, Gauss donne l'expression $2\pi k \operatorname{Sh}(r : k)$ de la longueur de la circonférence de rayon r ; dans la troisième, il fait ressortir la valeur de l'opuscule de Lobatchefsky. De la première et de la troisième, il résulte que ses méditations sur ce sujet remontent *en partie* à 1792. D'après diverses assertions de la seconde lettre, on peut conjecturer que c'est la note II des *Éléments* de Legendre qui a été, jusqu'à un certain point, l'origine des recherches de Gauss.

(6) Ce livre étant introuvable aujourd'hui, nous ne pouvons citer que la traduction de l'Appendice publiée dans les *Mémoires de Bordeaux,* t. V, en 1868, et le tirage à part : *La Science absolue de l'espace,* par Jean Bolyai. Paris, Gauthier-Villars, 1868 (64 pp. in-8o).

(7) L'université de Kazan a publié une édition complète des œuvres géométriques de Lobatchefsky. Le tome Ier, VIII-550 pages, Kazan, contient les ouvrages en langue russe. 1. *Éléments ou principes de la Géométrie* (pp. 1-67 ; 2 planches), publié en 1829 et 1830 dans le *Messager de Kazan.* L'équivalent des pages 1-17, qui contiennent déjà les idées fondamentales de l'auteur, avait été lu, le 12 février 1826, dans une séance de la Faculté, sous le titre : *Exposition succincte des principes de la Géométrie.* 2. *Géométrie imaginaire* (pp. 69-120 ; 1 pl.), publié en 1835 dans les *Mémoires scientifiques de l'Université de Kazan.* 3. *Applications de la Géométrie imaginaire aux intégrales définies* (pp. 121-218 ; 1 pl.), publié en 1836 dans les *Mém. sc. de Kazan.* 4. *Nouveaux éléments de Géométrie, avec une théorie complète des parallèles* (pp. 219-486 ; 10 pl.), publié de 1835 à 1838 dans les *Mém. sc. de Kazan.* 5. *Pangéométrie* (pp. 487-550), publié en 1855 dans le même recueil. — Le tome second

(VIII pages et pp. 551-680) contient : 6. *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallelenlinien* (pp. 551-578; 3 pl.). Reproduction de la brochure publiée en 1840, à Berlin, chez Fincke. 7. *Géométrie imaginaire* (579-613; 1 pl.), publié en 1837, dans le *Journal* de Crelle, t. 17, pp. 295-320. 8. *Pangéométrie ou précis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles* (614-680). Ce mémoire a paru dans le Recueil de mémoires scientifiques publiés à l'occasion du 50e anniversaire de l'Université de Kazan, 1856. Une liste des ouvrages relatifs à la Géométrie non euclidienne termine le tome II (pp. I-XX).

Le n° 7 est une traduction abrégée de 2, et 8 est une traduction de 6. La brochure 6 a été traduite par Hoüel, comme nous l'avons dit dans la note 5; elle a été reproduite récemment à Berlin par la photographie et aussi à Paris (chez Hermann). M. G. Br. Halsted, professeur à l'Université du Texas, l'a traduite en anglais, 1891 (Austin; 50 pp. in-8). 4e édition en 1892; cette traduction a été reproduite au Japon, à Tokio. Le n° 8 a été traduit en italien par Battaglini dans le *Giornale di Matematiche*, t. V, 1867 (64 pp. in-8°).

(8) *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 1856, t. XXIII, 2e partie, 408-430, 637-640.

(9) *Prolégomènes philosophiques de la Géométrie et solution des postulats*, etc. Liége, Desoer; Leipzig, Muquardt; Paris, Ladrange (XXI-308 pp. in-8°). " Homogénéité (de l'espace)... : toute figure a une grandeur et une forme indépendantes l'une de l'autre „ (p. 265; comp. p. 129). M. Delbœuf qui a publié récemment, dans la *Revue philosophique* (nov. 1893, XXVI, pp. 449-484; avril 1894, XXVII, pp. 353-383; avril 1895, pp. 345-373), de nouvelles études sur les principes de la Géométrie, a signalé, dans sa curieuse étude intitulée *Megamicros* (*Bull. de l'Acad. royale de Belg.*, juin 1893, 3e série, t. XXV, p. 669), une note de l'*Exposition du système du monde* (Livre V, ch. v), où Laplace déclare aussi que le postulatum de Wallis lui semble la base la plus naturelle de la Géométrie élémentaire. M. Delbœuf est le premier qui, de ce côté du Rhin, ait appelé l'attention sur les recherches de Lobatchefsky. Dans ses *Prolégomènes*, pp. 76-77, il donne une idée de l'article du géomètre russe publié en 1837, dans *le Journal de Crelle*.

(10) Bruxelles, Bruylant-Christophe et Cie; Paris, Ch. Tanera, 1860 (120 pp. in-8°).

(11) *Études de Mécanique abstraite* (extrait du tome XXI des *Mémoires couronnés et autres Mémoires*, publiés par l'Académie royale de Belgique, 1870. Collection in-8°; 99 pages).

(12) Voir note 5 et note 7.

(13) *Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea* (*Giornale* de Battaglini, septembre et octobre 1868, VI, pp. 285-315). Traduction française par Hoüel, dans les *Annales de l'École normale supérieure*, 1869, t. VI, pp. 251 et suiv. — Le procédé de démonstration de Beltrami ne s'étend pas à l'espace, comme on pourrait le croire au premier abord. Voir le Mémoire du même auteur, commentaire et complément du Mémoire de Riemann dont il est question, note 16 : *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante* (*Annali di Matematica pura ed applicata*, 2e série, t. II, pp. 232-255), ou la traduction de Hoüel, *Ann. de l'Éc. normale sup.*, 1869, t. VI, pp. 347-377.

(14) *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 1872, t. III, pp. 131-138.

15) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 1873, 2e série, t. XXXVI, 124-139.

16) *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen.* Lu le 10 juin 1854, à la Faculté de philosophie de Göttingen; publié en 67, dans le tome XIII des *Mémoires de Göttingen;* reproduit dans les *iemann's Werke*, 1876, pp. 254-269. Hoüel en a donné une traduction ançaise, en 1870, dans les *Annali di Matematica*, 2e série, t. III, p. 300-327.

Selon nous, ce Mémoire de Riemann et la plupart de ceux qui en ont té le commentaire ou la continuation, s'occupent presque exclusivement 'analyse parce que les coordonnées dont il y est question n'ont aucune éfinition géométrique, sauf si l'on suppose déjà établies soit la Géométrie euclidienne, soit les Géométries non euclidiennes, et si l'on se borne étudier l'espace à trois dimensions. Il est pourtant exact de dire que a Géométrie non euclidienne qui porte le nom de Riemann est vraiment sortie du Mémoire de ce profond géomètre et en particulier de cette remarque : " *Die Unbegrenztheit des Raumes bezitzt daher eine grössere empirische Gewissheit, als irgend eine äussere Erfahrung. Hieraus folgt aber die Unendlichkeit keineswegs* (*Riemann's Werke*, p. 266, III, § 2, dernier alinéa). Cette seule remarque, avec les définitions du plan et de la droite de Cauchy, dont il est question dans la note 19, suffisent pour donner la Géométrie non euclidienne de Riemann.

(17) *A Sixth Memoir upon Quantics*, publié en 1859 dans les *Philosophical Transactions*, t. CXLIX, pp. 61-90, reproduit dans *The Collected Mathematical Papers*, Cambridge, 1889, vol. II, no 158, pp. 561-592. La partie du Mémoire relative au sujet dont il s'agit ici se trouve pp. 583-592 (nos 209-230), et elle doit être rapprochée de notes importantes du grand géomètre. pp. 604-606, ajoutées en 1889 à son Mémoire, où, au fond, il reconnaît que toutes les spéculations de ce genre, pour avoir une vraie portée géométrique, doivent reposer sur la notion de distance : " *It must however admitted that, in applying this theory of Staudt's to the theory of distance, there is at least the appearance of arguing in a circle, since the construction for the product of the two ratios, is in effect the assumption of the relation* dist. PQ + dist. QR = dist. PR (p. 605, dernières lignes). Il cite ensuite un passage de R. S. Ball où celui-ci dit nettement qu'il y a là un cercle vicieux (p. 606).

MM. Klein et Darboux ont publié d'importants travaux de Géométrie générale dans le sens de Cayley, qu'il n'entre pas dans notre plan de signaler ici.

(18) *Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique*. Bordeaux, G. Gounouilhou, 1879 (VIII-192 pp. in-8o, 2 pl.). Cet ouvrage a été publié d'abord dans les *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 2e série, t. III, pp. 1-190. Les pages I-VIII contiennent le rapport de M. Hoüel sur l'*Essai* de M. De Tilly.

(19) *Sept leçons de physique générale*, par A. Cauchy. Paris, Gauthier-Villars, 1868 (in-18, de XII-108 pages). Ces leçons ont été faites à Turin, en 1833. Cinquième leçon : *De l'espace et de l'étendue* (pp. 40-51). C'est là que se trouvent ces remarquables définitions de la droite et du plan : La notion de distance étant regardée comme une notion première irréductible, un point M est dit appartenir à la droite AB (ou au plan ABC)

si aucun point de l'espace n'est distant de A et B (ou de A, B et C comme l'est M.

(20) *Elemente der absoluten Geometrie* von Dr J. Frischauf, Professor a. d. Universität Graz. Leipzig, Teubner, 1876 (VI-142 pp. in-8°). Cet ouvrage a été critiqué à tort, selon nous, par ceux qui se placent au point de vue analytique de Cayley (note 17).

(21) *Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3e série, t. XIV, p. 1015.

(22) *Nachrichten* de Göttingen, 1870, pp. 311-321 ; 1873, pp. 13-21, 149-159

(23) *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires* (*Mém. de l'Ac. de Berlin*, 1773, ou *Œuvres*, t. III, pp. 659-692). La relation entre les dix distances de cinq points est établie dans ce Mémoire par un procédé d'une admirable élégance, dans les nos 18, 19, 20 (pp. 675-677). On la trouve établie d'une manière beaucoup moins simple dans Carnot, *Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace*, etc. Paris, Courcier, 1806.

(24) Cayley, *Collected Math. Papers*, I, pp. 1-4. *On a Theorem in the Geometry of Position* (From the *Cambridge Mathematical Journal*. vol. II, 1841, pp. 267-271).

(25) Voir la note 2.

(26) *Ueber die Thatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen* (*Nachrichten* de Göttingen, 1868, pp. 193-221) et plusieurs articles de vulgarisation sur les principes de la géométrie. M. Lie, dans l'ouvrage cité note 4, a fait connaître à la fois l'importance et les imperfections du Mémoire de Helmholtz, dont Houel a aussi publié une traduction française, reproduite récemment par Hermann avec les *Études* de Lobatchefsky (voir note 7, dernier alinéa).

(27) Voir l'ouvrage cité note 4 à propos de Lambert. La section v, pp. 393-543, est consacrée à des *Recherches sur les fondements de la Géométrie*. On y trouve, avec l'indication des travaux antérieurs de M. Lie, la solution de la question d'analyse que l'auteur appelle le problème de Riemann et Helmholtz, puis un exposé critique de l'*Essai* de M. De Tilly de 1878, et des travaux de MM. Klein, Lindemann et Killing. Il est facile de voir que M. Lie ne s'est pas mis au même point de vue géométrique que M. De Tilly, et cela suffit pour expliquer l'objection non fondée, selon nous, qu'il fait contre le point de départ du savant belge (Comparez note 16).

(28) *Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1887, t. XV, pp. 203-216). Voir aussi la *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 1891, t. II, pp. 769-774, t. III, pp. 74-75, puis un passage important de la *Notice sur les travaux scientifiques de H. Poincaré* (Paris, Gauthier-Villars. 1886), p. 19.

(29) *Elementary Theorems relating to the Geometry of a Space of Three Dimensions and of Uniforme Positive Curvature in the Fourth Dimension* (*Journal de Crelle*, 1877, t. LXXXIII, pp. 293-300).

(30) Voir, note 4, ce que nous avons dit de Foncenex. De plus, Houel attribue quelque part à Lagrange cette profonde remarque dont nous ne parvenons pas à retrouver la source, que la Trigonométrie sphérique est indépendante du postulatum d'Euclide.

(31) *Essai sur la philosophie des sciences*. Première partie, p. 64 (Deuxième édition; Paris, Mallet-Bachelier, 1856).

Extrait de la *Revue des questions scientifiques*, avril 1895,
t. XXXVII, pp. 596-603.

SYNOPSIS DER HÖHEREN MATHEMATIK, von JOHANN G. HAGEN, S.J., Director der Sternwarte des Georgetown College, Washington D.C. Zweiter Band. *Géométrie der algebraischen Gebilde.*—Berlin, Verlag von Felix L. Dames, 3, Koch-strasse, 3. MDCCCXCIV. — Un volume grand in-4° de IV-416 pages.

Un compte rendu détaillé de la première partie *(Analyse arithmétique et algébrique)* de cette Encyclopédie des hautes mathématiques a paru dans la *Revue des questions scientifiques* (1892, deuxième série, t. II, pp. 594-601). Il n'est peut-être pas inutile de rappeler comment le but et le plan de ce grand ouvrage y sont caractérisés : " Tous les résultats acquis dans les hautes mathématiques, jusqu'à une certaine limite que nous signalerons plus bas, sont ici groupés avec ordre, de façon qu'on s'y oriente avec une grande facilité. Les définitions sont données et expliquées, les théorèmes énoncés ; il ne manque que les démonstrations, et d'abondantes indications bibliographiques permettent au lecteur de les trouver à bonne source. Partout le fil logique reste apparent, ce qui distingue cet ouvrage d'un pur dictionnaire ou recueil de formules.

„ En général, l'auteur s'en est tenu aux sujets exposés dans les meilleurs traités et dans les mémoires devenus classiques ; il fait connaître pour chaque matière les principaux résultats acquis et, ce qui est très utile, il signale les lacunes qui restent à combler. L'historique de chaque théorie peut se faire au moyen des innombrables renseignements bibliographiques contenus dans les diverses sections de l'ouvrage. „

En parcourant le tome II, nous avons constaté avec une vraie satisfaction que le même programme a été réalisé en tout point pour la géométrie. Si un examen attentif nous a révélé par-ci

par-là des lacunes, des imperfections, des *lapsus calami*, notre première impression favorable n'en a pas été atteinte : dans un ouvrage de cette ampleur, exigeant de longues années de recherches, il est pour ainsi dire impossible que la critique n'ait rien à reprendre.

Le tome II du livre du P. Hagen se divise en treize sections : 1. Les principes fondamentaux de la géométrie. 2. La géométrie projective. 3. Les systèmes de coordonnées. 4. Les systèmes de droites des deux premiers ordres. 5. Ausdehnungslehre (géométrie symbolique, algèbre extensive). 6. Les courbes planes en général. 7. Les lignes ou enveloppes des deux premiers degrés (ordres ou classes). 8. Les courbes planes du troisième degré. 9. Les courbes planes du quatrième degré. 10. Les figures du troisième rang en général. 11. Les figures du troisième rang, des deux premiers degrés (ordres ou classes). 12. Les surfaces du troisième degré. 13. Les surfaces du quatrième degré.

Nous allons reproduire la table détaillée des matières de chaque section, ce qui permettra au lecteur de juger de l'ordre suivi dans chaque section, et aussi de l'étendue des développements consacrés par l'auteur aux différentes questions. A la fin de quelques sections, nous plaçons les observations que nous a suggérées la lecture de la *Synopsis*.

Section 1 (1) (pp. 1-19). I. Les hypothèses de la géométrie.

II. Les éléments et les formes fondamentales (Grundgebilde). A. Les éléments réels (et les éléments à l'infini). B. Les éléments imaginaires (dans le sens de von Staudt). C. Les formes fondamentales du premier ordre (ponctuelle, faisceau de rayons ou de plans, système plan, gerbe, espace ponctuel ou planaire). D. Les formes fondamentales du second ordre (conique, cône, système réglé). E. Les formes fondamentales du troisième ou quatrième ordre (cubique gauche, avec le système de ses plans osculateurs ou de ses tangentes). F. Formes discontinues (polygones, polyèdres).

(1) Les chapitres sont désignés par des chiffres romains, I, II, III...; les sous-chapitres par des lettres A, B, C...; les subdivisions de ceux-ci par des chiffres arabes; des subdivisions ultérieures sont indiquées par des minuscules *a*, *b*, ...; des corollaires par des chiffres romains entre parenthèses. Nous supprimons les titres des sous-chapitres là où cela peut se faire sans inconvénients.

Pour abréger, nous mettons quelquefois entre parenthèses une explication sommaire ou une indication rapide.

III. Rapport anharmonique (et relation d'harmonie).

Le chapitre premier est consacré aux hypothèses fondamentales de la géométrie et à la géométrie non-euclidienne. Il contient un grand nombre de renseignements bibliographiques, et parmi eux les plus importants sur Euclide, Legendre, Gauss, Lobatchefsky, Bolyai, Riemann, Beltrami, Klein. Cependant, il y a aussi, dans ce chapitre, des lacunes provenant sans doute de ce que l'auteur s'est placé trop au point de vue de Klein dans l'appréciation des recherches sur la métagéométrie. Ainsi l'auteur ne cite nullement De Tilly ni Poincaré. Selon nous, voici comment il aurait fallu classer les matières à traiter dans ce premier chapitre (nous soulignons les noms omis) : 1° *Géométrie euclidienne et non-euclidienne proprement dite.* Euclide, Saccheri, *Lambert, Foncenex* ou *Lagrange*, Legendre, *Ampère*, Gauss, *Cauchy*, Lobatchefsky, Bolyai, Riemann, *Schering, De Tilly*, etc. 2° *Surfaces pseudosphériques*, etc. Beltrami et ses continuateurs. 3° *Théorie des coniques et des quadriques*, dans ses rapports avec la métagéométrie. Cayley (avant Klein, ce qui est indiqué, du reste, plus loin, p. 26, n° 5), Klein, *Darboux, Poincaré*. 4° *Théorie des groupes*. Riemann, Helmholtz, Jordan, et surtout Lie et ses élèves et continuateurs (Lie est cité dans les *Errata*). — Nous ne sommes pas d'accord avec l'auteur (§ 7) sur la portée objective des recherches relatives à la métagéométrie. Nous ne sommes pas certain non plus que l'édition d'Euclide de Heiberg surpasse celle de Peyrard au point de vue critique : Peyrard a sur Heiberg l'avantage de bien savoir les mathématiques (1).

Au chapitre II, la terminologie adoptée nous paraît manquer parfois de précision; certaines définitions essentielles sont omises, pour d'autres on peut regretter que la forme analytique prédomine.

Le désir d'être concis ou de réunir des cas analogues amène quelquefois un défaut de clarté ou même des inexactitudes. On aurait pu citer : p. ex. au n° 1, (3), un article de Poincaré (*Revue générale des sciences*, 1891); pour la représentation des imaginaires, les travaux de Laguerre et de Tarry; pour la géométrie récente, les ouvrages de Casey, Fuhrmann, Emmerich, le traité de géométrie de Rouché et de Comberousse, les articles bibliographiques de Vigarié, etc. Des *lapsus calami* se rencontrent : au

(1) Ces notes sur le premier chapitre concernant la métagéométrie nous ont été communiquées par notre savant ami, M. P. Mansion.

n° 1, (3) [comparer p. 336, n° 2, (3)] ; au n° 5, lignes 1 et 2 ; au n° 8, (1), 2e alinéa ; au n° 9, où le cylindre est à considérer comme un cas particulier du cône ; page 12, ligne 9 en remontant, où le terme de surface du second ordre est trop général.

La généralisation des centres harmoniques (p. 19, ligne 1) est antérieure à 1857.

Section II (pp. 20-68). I. Rapports de la géométrie projective avec les autres branches de la géométrie. II. Projectivité en général. III. Homographie. A. Formes du premier rang. B. Formes du deuxième ou troisième rang. IV. Dualité. V. Projectivité non linéaire entre éléments de même espèce. A. Transformations plurivoques (principe de correspondance de Chasles). B. Transformations univoques en général (transformations birationnelles). C. Transformations univoques des courbes et des surfaces (conservation du genre). D. Représentation conforme des surfaces sur un plan. VI. Projectivité d'un ordre supérieur entre éléments contragrédients. A. Les éléments. B. Les formes fondamentales (connexes). C. Les coïncidences. VII. Projectivités particulières. A. Affinité. B. Égalité (affinité de module ± 1). C. Similitude. D. Congruence et symétrie. VIII. Position perspective. IX. Involution. A. Involution quadratique des formes du premier rang. B. Involution quadratique des formes du deuxième ou du troisième rang. C. Involution quadratique des systèmes réciproques. D. Involutions cycliques. E. Involutions d'un ordre supérieur.

Cette section comprend les accroissements les plus importants de la géométrie dans les vingt dernières années.

La géométrie projective est considérée ici dans le sens de Clebsch : elle a pour objet les propriétés descriptives des figures (celles qui se rapportent à la position relative des parties des figures); sa méthode est la projection dans l'acception la plus générale de ce mot (transformation des figures); elle fait indifféremment usage des démonstrations synthétiques ou analytiques. — La projectivité linéaire est définie d'après Cremona (II, n° 1) : deux figures sont projectives lorsqu'elles se déduisent l'une de l'autre par un nombre fini de projections ou sections. Cette définition nous semble exclure les formes réciproques du deuxième et du troisième rang [2, n° 1, (2)].

A propos des homographies et des involutions plurilinéaires, l'auteur aurait pu citer des travaux importants de MM. Folie, Le Paige, Fr. Deruyts, et ceux de plusieurs géomètres italiens.

Les développements donnés sur la dualité au chapitre 4, n° 6, (a) et (3), se confondent avec ceux du § 3.

Section III (pp. 67-93). I. Coordonnées parallèles, ponctuelles ou tangentielles. II. Coordonnées trilinéaires ou tétraédriques. A. Coordonnées générales de Plücker. B. Coordonnées barycentriques de Möbius. C. Coordonnées sphériques de Möbius. D. Coordonnées de Chasles. III. Coordonnées polaires. IV. Coordonnées elliptiques. V. Coordonnées hyperboliques dans le plan ou dans l'espace. VI. Coordonnées paraboliques dans le plan ou dans l'espace. VII. Coordonnées circulaires et lemniscatiques dans le plan ou dans l'espace.

Cette section donne des renseignements intéressants sur les coordonnées avant Descartes et sur les différents systèmes de coordonnées développés depuis ce grand géomètre jusqu'à ces derniers temps. La bibliographie aurait pu indiquer les travaux de Lucas sur les coordonnées tripolaires, de Walton et Genese sur les coordonnées biangulaires, de Darboux sur les coordonnées pentasphériques.

Section IV (pp. 94-128). I. La droite comme élément de l'espace. II. Généralités sur les complexes. III. Complexes du premier ordre. IV. Congruence de deux complexes linéaires. V. Congruence de trois complexes linéaires. Surfaces réglées. VI. Complexes quadratiques. A. Définitions. B. Diamètre et centre. C. Singularités. D. Propriétés polaires. E. Classification des complexes quadratiques. VII. Complexes polaires ou tangentiels.

Nous trouvons ici un excellent résumé de la géométrie de l'espace réglé. L'ouvrage de R. Sturm n'a pu être utilisé. La bibliographie aurait pu signaler les complexes particuliers qui ont été étudiés.

Section V (pp. 128-165). I. Historique. II. Notions générales. III. Les éléments et leurs unités. IV. Les grandeurs élémentaires et leurs domaines. V. Addition géométrique. VI. Multiplication géométrique en général. VII. Multiplication extérieure. VIII. Multiplication intérieure. IX. Multiplication intermédiaire (Mittlere Multiplication). X. Multiplication de Hamilton (Quinions et verseurs hyperboliques de Macfarlane).

Les auteurs qui ont servi principalement pour la rédaction de cette partie sont : Argand, Möbius, Hamilton, Grassman, Clifford, Tait, Gibbs, Hyde, Heavisede, Macfarlane. La *Synopsis* apporte

un bon résumé de leurs travaux, sans que cependant on puisse dire que cet exposé réalise des progrès dans l'explication des théories qui, sous leur forme actuelle, ne sont pas encore goûtées d'un grand nombre de géomètres, du moins sur le continent. Les travaux de Bellavitis (équipollences) auraient pu trouver place dans un chapitre spécial, et on pourrait aussi désirer, quand il s'agit d'une matière qui n'est pas encore rendue accessible à l'enseignement, des indications sur les principaux ouvrages ou articles de vulgarisation (Houël, Allégret, Laisant, Transon, Sarrau, Caspari, Massau, Carvallo, etc.).

Section VI (pp. 166-203). I. Équations des courbes et systèmes de courbes. A. Courbes. B. Faisceaux et réseaux (ponctuels ou tangentiels) de courbes. C. Systèmes de courbes. Caractéristiques (Chasles, Zeuthen, de Jonquières, Schubert, Halphen, Cayley). II. Sections, contacts et normales. A. Intersections de deux ou plusieurs courbes. B. Groupes de points d'intersection. Groupes résiduels ou corésiduels. C. Tactinvariants et normales. III. Asymptotes. A. Généralités. B. Notations abrégées de Plücker. C. Méthode de Liouville. IV. Diamètres, centres, foyers. V. Singularités, élémentaires ou élevées. VI. Pôles et polaires. A. Théorèmes généraux. B. Polaires particulières. C. Les courbes de Hesse, Steiner et Cayley.

Section VII (pp. 204-230). I. Droite et point. II. Les coniques en général. III. Propriétés projectives. A. Théorèmes généraux. B. Propriétés polaires. C. Diamètres conjugués, centre. D. Coniques semblables. IV. Coniques dégénérées. V. Axes principaux. VI. Classification des coniques. VII. Foyers. VIII. Notations abrégées.

La théorie des coniques nous paraît présenter des lacunes : par exemple, les travaux de Dandelin et Quetelet, et la *Géométrie de direction* de P. Serret ne sont pas même mentionnés ; la théorie des coniques bitangentes est passée sous silence.

Section VIII (pp. 231-264). I. Représentation analytique des courbes du troisième degré. A. Équation générale. B. Equation canonique. C. Représentation paramétrique. D. Représentation sphérique de Möbius. E. Représentation symbolique de Plücker. II. Génération et constructions. III. Contacts et intersections. A. Tangentes et cordes. B. Coniques sécantes, tangentes et osculatrices. C. Autres courbes sécantes ou tangentes. IV. Asymptotes.

V. Points d'inflexion. VI. Centres et diamètres. VII. Propriétés polaires. A. Généralités. B. Hessienne et Cayleyenne. C. Polo-coniques de droites. VIII. Faisceaux et réseaux de cubiques. IX. Classification des cubiques d'après leurs branches infinies ou d'après leurs projections centrales.

On peut regretter l'absence de renseignements sur les cubiques et les quartiques remarquables (cissoïde, conchoïde, strophoïde...). Les travaux de MM. Folie et Le Paige sur les cubiques méritent d'être mentionnés.

Section IX (pp. 265-276). I. Propriétés générales. II. Classification des quartiques. III. Points doubles. IV. Tangentes doubles.

Les travaux de Casey et de Darboux sur les quartiques bicirculaires auraient dû être signalés ici.

Section X (pp. 277-320). I. Équations des surfaces et des systèmes de surfaces. A. Ordre, classe, rang. B. Systèmes linéaires de surfaces. II. Intersections, contacts, normales. A. Intersections de deux ou trois surfaces. B. Intersections de systèmes homographiques de surfaces. C. Contacts et normales. III. Singularités des surfaces. A. Courbes singulières ; genre. B. Points et lignes multiples. Droites simples. C. Tangentes singulières, plans tangents singuliers. D. Relations entre les singularités. IV. Propriétés polaires. V. Surfaces réglées. VI. Surfaces développables. A. Théorèmes généraux. B. Singularités. C. Développables planaires ou rationnelles. D. Cônes. VII. Courbes gauches. A. Propriétés générales. B. Classification. C. Intersection complète de deux surfaces. D. Courbes gauches tracées sur une quadrique. E. Cubiques gauches. F. Courbes gauches du quatrième ordre.

Section XI (pp. 321-348). I. Plan, point et droite. II. Quadriques en général. III. Propriétés projectives. A. Théorèmes généraux. B. Propriétés polaires. C. Diamètres, plans diamétraux, centre. D. Similitude. IV. Quadriques dégénérées. V. Axes principaux. VI. Classification des quadriques. VII. Quadriques particulières. VIII. Foyers et lignes focales. IX. Notations abrégées.

Section XII (pp. 349-364). I. Propriétés générales. A. Équation générale. B. Équation canonique. C. Génération et représentation conforme. D. Contacts et intersections. II. Les 27 droites. Classification des surfaces cubiques. III. Propriétés polaires. Surfaces

de Hesse et de Steiner. Surfaces polaires mixtes. IV. Surfaces cubiques particulières. A. Surfaces réglées. B. Cône.

Section XIII (pp. 365-396). I. Propriétés générales. A. Équation générale. B. Cônes tangents et nœuds. C. Surfaces ayant une ligne double. D. Surfaces sur lesquelles on peut tracer une infinité de coniques. II. Surfaces particulières. A. Surface de Kummer à seize nœuds. B. Surfaces ayant 10 nœuds ou moins. C. Cyclides. D. Tétraoïde de Cayley. Surface des ondes de Fresnel. III. Surfaces réglées. A. Théorèmes généraux. B. Surfaces ayant une droite triple. C. Surfaces ayant une ligne double. IV. Surfaces de complexe des complexes quadratiques. A. Surfaces méridiennes ou équatoriales. B. Singularités des surfaces de complexe. C. Classification des surfaces de complexe. V. Les surfaces de complexe les plus simples. A. Représentation analytique. B. Classification.

Bien que les quatre dernières sections résument les travaux déjà devenus classiques, on peut regretter que la bibliographie ne renseigne pas au moins les recherches importantes de plusieurs géomètres très distingués, tels que Laguerre, Mannheim, Piquet, Le Paige, Koenigs, Veronese, Schoute, etc.

Malgré ces omissions et celles que nous avons signalées dans les sections antérieures, nous ne pouvons que recommander vivement aux géomètres la *Synopsis* du P. Hagen. Cet ouvrage vient à son heure et il comble une vraie lacune : les mathématiques font des progrès incessants dans toutes les directions, et il est difficile, sans un guide sûr comme celui-ci, d'être renseigné sur ce qui est déjà fait et sur les questions qui restent à résoudre. La *Synopsis* avait d'abord limité les matières à celles que les traités les plus estimés exposent déjà sous une forme plus ou moins définitive. Cependant, elle a quelque peu élargi ce programme en indiquant des travaux remarquables d'une date assez récente. Tous les géomètres en sauront gré à l'auteur, et souhaiteront même que la bibliographie soit encore plus complète, particulièrement pour les travaux qui ont paru dans des recueils scientifiques français, italiens, belges ou hollandais.

Pour terminer, disons que l'éditeur n'a rien négligé pour nous faire de la *Synopsis* une œuvre irréprochable au point de vue typographique et qu'il y a réussi.

J. Neuberg,
professeur à l'Université
de Liége.

I

SUR

LA COURBURE DU CONTOUR APPARENT D'UNE SURFACE

PAR

M. D'OCAGNE,

Professeur à l'École des ponts et chaussées.

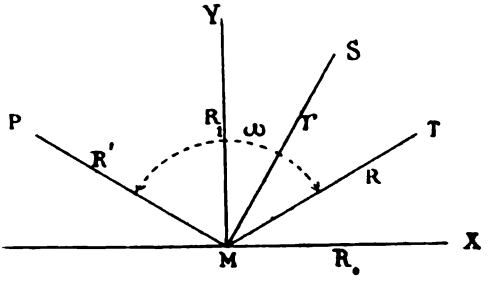
Le problème qui consiste à déduire la courbure en un point du contour apparent d'une surface projetée orthogonalement sur un plan des éléments de courbure de cette surface, peut se résoudre très simplement de la manière suivante :

Soient, sur le plan tangent en un point M de la courbe de contact de la surface et de son cylindre projetant,

MX et MY les traces des sections principales dont les rayons de courbure sont R_0 et R_1,

MT la tangente à la courbe de contact qui détermine une section normale de rayon R,

MP la projetante qui détermine une section normale de rayon R'.



Le rayon de courbure correspondant r du contour apparent est celui de la section droite du cylindre projetant, faite par la droite MS perpendiculaire à MP.

Les théorèmes d'Apollonius, appliqués à l'indicatrice de la surface en M, donnent, en remarquant que, d'après le théorème de Dupin, R et R′ sont proportionnels aux carrés des deux demi-diamètres conjugués dirigés suivant MT et MP,

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad R + R' = R_0 + R_1,$$

et

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad RR' \sin^2\omega = R_0 R_1.$$

Mais la relation d'Euler, appliquée au cylindre projetant, donne

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{R} = \frac{\sin^2\omega}{r}.$$

On tire de là,

$$r = R \sin^2\omega,$$

d'où, en vertu de (2),

$$r = \frac{R_0 R_1}{R'},$$

ou encore, en vertu de (1),

$$r = \frac{R_0 R_1}{R_0 + R_1 - R}.$$

Dans le cas des surfaces minima, pour lesquelles $R_0 + R_1 = 0$, cette dernière formule devient

$$r = \frac{R_0^2}{R}(*).$$

(*) Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1895, t. XIX, 1re partie, pp. 99-101.

II

SUR

L'ENSEIGNEMENT ÉLÉMENTAIRE DE L'ALGÈBRE EN 1676

D'APRÈS L'EUCLIDE DE HENRION,

PAR

M. P. MANSION

Professeur à l'Université de Gand.

Cet ouvrage, souvent réimprimé au XVII[e] siècle (*), contient, comme introduction au deuxième livre d'Euclide, un *Sommaire*

(*) Voici le titre complet de cette édition : *Les quinze livres des Elements d'Euclide, traduits en Français par* D. HENRION, *Professeur ès Mathematiques, reveus et corriges : avec des commentaires beaucoup plus amples et faciles, et des figures en plus grand nombre que dans toutes les impressions precedentes. Plus, le livre des* DONNEZ *du même Euclide, aussi traduit en Français par ledit Henrion. A. Rouen, chez* JEAN LUCAS, rue aux Juifs, à côté de la petite porte de *l'Hôtel de ville*. M. DC. LXXVI. Deux volumes petit in-8°, de pp. VIII-551, et IV-527-116. — Dans la *Bibliotheca Mathematica* de Murhard, on signale une *seconde* édition à Paris, en 1623; une autre à Paris, en 1634; une cinquième édition à Rouen, en 1649. — Dans la *Bibliotheca mathematica* de Rogg, on en indique une de 1677, à Paris. — Dans le *Catalogue de la Bibliothèque de Chasles* (Paris, Claudin, 1881), p. 153, on en renseigne deux, l'une de 1632, in-4°, à Paris, une de 1683, à Rouen. — D'après le *Biographisch Woordenboek der Nederlanden* de Van der Aa (t. VI, 1867, pp. 190-191), la 1[re] édition est de 1615, la seconde de 1621, toutes deux in-8°; en 1623, c'est une *Réponse apologétique pour les traducteurs et interprètes des Éléments d'Euclide... avec un Sommaire de l'Algèbre* (in-8°) que publie Henrion. L'édition in-4° de Paris de 1632 est la première qui contienne les *Données*. Van der Aa cite ensuite des éditions in-8°, à Rouen en 1649 et 1676; à Paris, en 1683 et 1685.

D'après la préface de notre édition, la traduction d'Euclide (*Éléments* et *Données*) de D. Henrion aurait paru après sa mort. CANTOR (*Geschichte der Math.*, II, p. 681) fait remarquer que Henrion fit paraître, en 1626, un *Traicté des logarithmes* qui est la première table de logarithmes publiée en France. On peut conclure de là que Henrion est mort en 1631 ou 1632, avant la publication de l'édition in-4° de sa traduction, et non vers 1640, comme le disent les dictionnaires biographiques. On ignore la date de sa naissance. Il a été pendant quelque temps au service des États-Généraux de Hollande.

de l'Algèbre, qui n'occupe pas moins de 122 pages. Dans ce sommaire, on trouve sans démonstration, ou avec des démonstrations abrégées ou seulement esquissées, *non seulement les Algorithmes et autres operations des nombres radicaux et des nombres sourds, mais aussi toutes les autres regles et operations Algebraïques.*

Ce qui caractérise ce manuel d'Algèbre, dont la première édition est antérieure à Descartes, c'est, au point de vue de la forme, l'emploi systématique de notations compliquées pour désigner les puissances et les racines des nombres; au point de vue du fond, l'importance accordée au calcul algébrique, à la *logistique spécieuse*, comme on disait alors, plutôt qu'à la résolution des équations. L'auteur évidemment est un disciple de Viète et de ses prédécesseurs.

La réimpression fréquente de cette introduction, au XVI^e^ siècle, après l'invention de la notation des exposants, prouve que celle-ci n'a pas pénétré immédiatement dans l'usage général.

Il nous a paru intéressant de faire connaître les notations et le plan du *Sommaire de l'Algèbre* de Henrion, afin de donner une idée de la manière dont on entendait l'enseignement de cette science au XVII^e^ siècle.

I. 1. *Notations pour les puissances d'une première quantité.* Ces notations sont les suivantes (le signe β remplace $\int s$ = sursolide) :

N, ℛ, *q*, *c*, *qq*, β, *qc*, *b*β, *qqq*, *cc*, *q*β, *c*β, *qqc*, *d*β, *qb*β, etc.

pour le nombre absolu et simple, la racine (c'est-à-dire le plus souvent l'inconnue), son carré, son cube, et ses puissances successives jusqu'à la quatorzième. Comme l'auteur le remarque, le « caractere N defaut le plus souvent aux nombres simples ». On écrit donc indifféremment 7N ou 7.

Les signes *q* et *c* sont les initiales des mots *quarré* et *cube; qq* signifie carré de carré; *qc*, carré de cube; *cc*, cube de cube.

Le signe β ou $\int s$ signifie *sursolide*. On appelait autrefois *problèmes solides*, ceux qui se résolvaient par intersection de deux

coniques, et qui, par conséquent, dépendaient d'une équation du quatrième degré; ceux du cinquième degré s'appelaient, par suite, *sursolides*. Si l'on pose $\text{Ⅱ} = x$, on a donc $\beta = x^5$.

Les puissances impaires d'exposant premier, à partir de 5, sont appelées premier, second, troisième, ... sursolide. On les désigne ainsi :

$$b\beta = x^7, \quad c\beta = x^{11}, \quad d\beta = x^{13}, \quad e\beta = x^{17}, \quad f\beta = x^{19},$$
$$g\beta = x^{23}, \quad h\beta = x^{29}, \quad i\beta = x^{31}, \quad k\beta = x^{37}, \quad l\beta = x^{41},$$
$$m\beta = x^{43}, \quad n\beta = x^{47}, \quad o\beta = x^{53}, \quad p\beta = x^{59}, \quad \text{etc.}$$

Les lettres *b*, *c*, *d*, etc., remplacent les mots second, troisième, quatrième, etc., ou les chiffres correspondants qu'on n'aurait pu employer sans introduire de la confusion.

Les puissances dont l'exposant n'est pas premier sont désignées par des combinaisons toutes naturelles des signes précédents. Ainsi, puisque

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3, \quad 30 = 2 \times 3 \times 5,$$

on écrit

$$qqqc, \quad qc\beta,$$

pour x^{24} et x^{30}.

La notion et le nom d'*exposant* sont connus et employés par Henrion comme ils le sont aujourd'hui ; les notations pour les puissances d'exposant non premier le montrent bien d'ailleurs.

Les coefficients sont employés comme aujourd'hui aussi, mais sans recevoir de nom particulier ; le coefficient 1 est rarement supprimé.

Les diverses puissances de Ⅱ s'appellent les *nombres cossiques*.

2. *Notations pour les puissances d'une seconde, d'une troisième quantité, etc.* Henrion introduit de la manière suivante, dans ses calculs, une seconde, une troisième racine, etc. : « 1A, signifie 1Ⅱ seconde; 1B, denotte 1Ⅱ tierce; 1C, signifie 1Ⅱ quarte, etc. » Si nous posons $y = 1\text{A}$, on écrit, pour y^2, y^3,... 1A*q*, 1A*c*,... On aura, par exemple, 2A*q* multiplié par 5A*c* égal à 10Aβ, etc.

3. *Notations pour les racines des nombres ou des nombres cossiques.* Quelques exemples suffiront, en mettant les notations modernes en face des anciennes :

$$\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{c5} = 5^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{qq5} = 5^{\frac{1}{4}},$$
$$\sqrt{c20\mathfrak{X}} = (20x)^{\frac{1}{3}}, \quad \sqrt{qc512c} = (512x^3)^{\frac{1}{4}}, \quad \text{etc.}$$

Henrion emploie les parenthèses lorsqu'il doit manier des radicaux portant sur des binomes ou, comme il dit, des *racines universelles.* Exemple : multiplier

$$\sqrt{(\sqrt{18000} + 30)} - \sqrt{(\sqrt{450} + 15)}$$

par

$$\sqrt{(\sqrt{450} + 15)}.$$

4. *Signes d'opération.* L'auteur ne se sert comme signes d'opération que de + (plus), — (moins), $\sqrt{}$ (racine). Il emploie la barre horizontale pour désigner les fractions. Mais il n'a aucun signe pour la multiplication, la division ou l'égalité. Par suite, la résolution des équations se fait en employant beaucoup plus le langage ordinaire qu'on ne le fait aujourd'hui.

II. *Plan du sommaire de l'Algèbre.* Chapitres 1-2. Notation des nombres cossiques. 3, 4, 5. Numération, addition, soustraction, multiplication, division des nombres cossiques. 6. Des fractions en nombres cossiques. 7, 8, 9, 10. Résolution des équations à une inconnue, du premier et du second degré. 11. Des secondes racines : calcul algébrique sur 1A, 1B, etc., 1A*q*, 1Ac, etc.; problèmes à plusieurs inconnues. 12-16. Calcul des radicaux portant sur des nombres simples. 17-20. Calcul des radicaux portant sur des nombres irrationnaux composés ou diminués (de la forme, par exemple, $6 \pm \sqrt{18}$), appelés aussi binomes et résidus. 21. Des fractions des nombres irrationnaux. 22. Des nombres cossiques et irrationnaux et de leurs algorithmes. 23. Des racines universelles et de leurs algorithmes. 24. De l'extraction des racines de binomes et de résidus. 25. Diverses questions et problèmes avec leur solution.

Pour le fond, l'exposition de Henrion est presque toujours identique à celle des traités d'algèbre moderne, mais elle est plus difficile à suivre à cause des notations employées. La place considérable accordée au calcul des radicaux s'explique, le *Sommaire* étant destiné à faciliter l'intelligence du livre X d'Euclide qui ne traite que de radicaux.

Le *Sommaire de l'Algèbre* est éminemment propre à faire saisir combien la notation des exposants a contribué à rendre l'algèbre à la fois plus simple et plus féconde (*).

III

SUR

LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

PAR

M. Ch.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN

Professeur à l'Université de Louvain (**).

---

1. Dans un Mémoire récent (***), très remarquable, M. le général De Tilly a reproduit une démonstration qu'il avait déjà fait connaître antérieurement et qui établit le théorème suivant : Il ne peut exister plus de trois espèces de géométrie ayant en commun, avec le système usuel, les notions de la droite et du plan.

Cette démonstration nous a vivement intéressé, mais elle fait

---

(*) Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1895, t. XIX, 1re part e, pp. 101-105.

(**) Voir page 16 un rapport de M. De Tilly sur cette note.

(***) *Essai de géométrie analytique générale.* MÉMOIRES COURONNÉS ET AUTRES MÉMOIRES PUBLIÉS PAR L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, t. XLVII, 1892, ou *Mathesis*, 1893, supplément.

appel à des considérations cinématiques dont la portée géométrique nous a paru un peu obscure au premier abord. Nous nous sommes donc proposé de les éliminer complètement, et nous avons été conduit à la démonstration que nous allons reproduire. A notre avis, les considérations cinématiques de M. De Tilly sont équivalentes aux trois postulats ou axiomes suivants (*), que l'on peut admettre en géométrie, comme une conséquence du principe de continuité largement entendu :

1° Les relations de la géométrie euclidienne sont vraies à la limite dans les figures dont toutes les dimensions tendent vers zéro;

2° Un côté d'un triangle rectiligne est une fonction continue des côtés adjacents et de l'angle opposé; cette fonction admet des dérivées partielles par rapport à chacun de ces trois éléments considéré comme variable indépendante (**);

3° La longueur d'une circonférence est une fonction continue du rayon R qui admet une dérivée par rapport à R.

2. Nous avons d'abord quelques remarques essentielles à faire.

Nous appliquerons les propriétés suivantes du cercle, qui sont évidemment indépendantes du théorème d'Euclide. Elles résultent soit de la symétrie de la figure, soit de l'application du premier postulat énoncé plus haut :

En chaque point d'un cercle, le rayon est normal à la tangente;

Les angles au centre sont entre eux dans le même rapport que les arcs interceptés par leurs côtés;

La longueur d'un arc de cercle et celle de sa corde ne diffèrent que par un infiniment petit d'ordre supérieur au premier.

3. Il y a quelque chose de plus à dire au sujet de la mesure des angles et de la définition des lignes trigonométriques.

(*) Nous pensons que ces principes peuvent être au moins partiellement démontrés, mais nous n'examinons pas cette question pour le moment.

(**) Au fond ce second principe est une conséquence du premier, comme cela résulte de notre démonstration même.

Dans la géométrie ordinaire, pour obtenir la mesure d'un angle, on décrit, du sommet comme centre, une circonférence de rayon arbitraire, on cherche le rapport de l'arc compris entre les côtés de l'angle avec le rayon, et ce rapport, qui ne dépend pas de la longueur du rayon, est la mesure cherchée. Pour obtenir *le même résultat*, dans le cas actuel, il suffira, en vertu du premier postulat, de choisir comme mesure d'un angle la limite du rapport dont nous venons de parler, quand on fera tendre le rayon du cercle vers zéro.

On fera de même pour les lignes trigonométriques. Dans la géométrie usuelle, ces lignes sont les rapports de certains segments de droites définis dans un cercle avec le rayon de ce cercle qui reste arbitraire.

Pour retrouver *les mêmes fonctions*, dans le cas actuel, il suffit, en vertu du premier postulat, de prendre, comme définition des lignes trigonométriques, les limites des rapports en question quand le rayon du cercle tend vers zéro. Les fonctions ainsi définies coïncideront analytiquement avec celles de la trigonométrie ordinaire, et l'on pourra appliquer toutes les formules trigonométriques usuelles dans les triangles dont tous les côtés tendent vers zéro.

4. Enfin, nous aurons besoin de connaître la mesure θ d'un angle au centre qui intercepte un arc ρ sur un cercle de rayon R. En vertu du principe de proportionnalité rappelé plus haut, on aura

$$\frac{\theta}{4 \text{ droits}} = \frac{\rho}{\text{circ R}}.$$

Nous représenterons dorénavant la longueur d'une circonférence de rayon R par la formule

$$\text{circ R} = 2\pi\varphi(\text{R}),$$

et, en vertu du premier postulat, $\varphi(\text{R}) : \text{R}$ tendra vers l'unité quand R tendra vers zéro. Il viendra donc, puisque 4 droits $= 2\pi$,

$$\theta = \frac{2\pi}{\text{circ R}}\rho = \frac{1}{\varphi(\text{R})}\rho.$$

Ces préliminaires posés, voici comment on peut établir très simplement les formules de résolution des triangles par une méthode au moins aussi naturelle que celle de M. De Tilly, car elle ne pose aucune formule *à priori* et donne lieu à des éliminations moins nombreuses.

5. Soit un triangle ABC ; considérons le côté a comme fonction des trois variables indépendantes A, b, c et calculons-en les dérivées partielles.

Donnons d'abord à l'angle A un accroissement dA en laissant b et c invariables. On peut supposer que cet accroissement s'obtienne par une rotation infinitésimale du côté b. Dans ce mouvement, le sommet C décrit un arc infiniment petit CC'. A la limite, cet arc se confond avec sa corde et devient normal à AC et AC'. Du sommet B comme centre, décrivons l'arc de cercle CP, coupant en P la droite BC' ; cet arc, à la limite, se confondra également avec sa corde et sera perpendiculaire aux deux droites BC et BC'. Il viendra donc, à la limite, dans le triangle infinitésimal CPC',

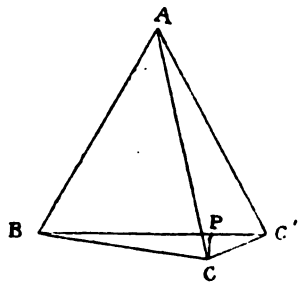


Fig. 1.

$$da = \mathrm{PC'} = \mathrm{CC'} \sin \mathrm{C}.$$

Mais CC' est un arc de cercle de centre A et de rayon b ; donc

$$\mathrm{CC'} = \mathrm{circ}\, b \,.\, \frac{dA}{2\pi} = \varphi(b)\, dA,$$

d'après la définition de la fonction φ. On a donc

$$da = \varphi(b) \sin \mathrm{C}\, dA,$$

et une première expression de la dérivée partielle

$$\frac{\partial a}{\partial A} = \varphi(b) \sin \mathrm{C}.$$

On en déduit une autre, par raison de symétrie,

$$\frac{\partial a}{\partial A} = \rho(c) \sin B.$$

De là l'égalité

$$\frac{\rho(b)}{\sin B} = \frac{\rho(c)}{\sin C},$$

et, par raison de symétrie,

$$(1) \quad \ldots\ldots \frac{\rho(a)}{\sin A} = \frac{\rho(b)}{\sin B} = \frac{\rho(c)}{\sin C} = \mu,$$

$$(2) \quad \ldots\ldots \frac{\partial a}{\partial A} = \mu \sin B \sin C,$$

μ étant une fonction symétrique des éléments du triangle, c'est-à-dire une fonction qui ne change pas par une permutation circulaire de (a, b, c) en (b, c, a) et (A, B, C) en (B, C, A).

Passons au calcul de la dérivée partielle de a par rapport à b.

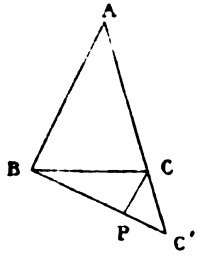


Fig. 2.

Donnons à b un accroissement $CC' = db$, en laissant A et c invariables; décrivons, comme tout à l'heure, de B comme centre un arc de cercle CP; il viendra, à la limite, dans le triangle infinitésimal CPC',

$$da = PC' = CC' \cos C = db \cos C;$$

par suite,

$$\frac{\partial a}{\partial b} = \cos C.$$

De même, par raison de symétrie,

$$\frac{\partial a}{\partial c} = \cos B.$$

6. Substituons les trois valeurs des dérivées partielles ainsi calculées dans l'expression suivante de la différentielle totale

$$da = \frac{\partial a}{\partial A} dA + \frac{\partial a}{\partial b} db + \frac{\partial a}{\partial c} dc;$$

nous trouverons la première des trois équations ci-dessous, les deux autres s'obtenant par permutation circulaire,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} da - \cos C\, db - \cos B\, dc = \mu \sin B \sin C\, dA, \\ -\cos C\, da + db - \cos A\, dc = \mu \sin C \sin A\, dB, \\ -\cos B\, da - \cos A\, db + dc = \mu \sin A \sin B\, dC. \end{array} \right.$$

Désignons par δ le déterminant des coefficients des différentielles au premier membre; c'est encore une fonction symétrique des éléments du triangle, qui peut se mettre sous différentes formes :

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & -\cos C & -\cos B \\ -\cos C & 1 & -\cos A \\ -\cos B & -\cos A & 1 \end{vmatrix},$$

$$\delta = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C - 2 \cos A \cos B \cos C,$$

$$(4) \quad \ldots \quad \delta = \sin^2 B \sin^2 C - (\cos A + \cos B \cos C)^2.$$

Le signe de ce déterminant δ caractérise complètement, comme nous le verrons plus loin, le système de géométrie, et dans la géométrie usuelle δ est nul.

Nous avons trouvé (1) la relation $\varphi(a) = \mu \sin A$; différentions-la, on trouve :

$$\varphi'(a)\, da = \sin A\, d\mu + \mu \cos A\, dA.$$

Multiplions la première des équations (3) par cos A, puis remplaçons au second membre $\mu \cos A\, dA$ par sa valeur tirée de l'équation précédente, nous trouverons :

$$da\,[\cos A - \varphi'(a) \sin B \sin C] - \cos A \cos C\, db - \cos A \cos B\, dc = -\sin A \sin B \sin C\, d\mu.$$

On remarque que, le second membre ne changeant pas par

une permutation circulaire, le premier ne peut pas changer non plus. Faisons donc la permutation circulaire de (a, b, c) en (b, c, a) et (A, B, C) en (B, C, A) et égalons le nouveau coefficient de da à l'ancien, il viendra :

$$\cos A - \varphi'(a) \sin B \sin C = -\cos B \cos C,$$

$$(5) \quad \ldots\ldots \quad \varphi'(a) = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

Mais on tire de l'équation (4)

$$\left(\frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}\right)^2 = 1 - \frac{\delta}{\sin^2 B \sin^2 C},$$

et, comme on a, par (1), $\varphi^2(a) : \mu^2 \sin^2 A = 1$, cette équation peut s'écrire

$$(6) \quad \left(\frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}\right)^2 = 1 - \frac{\delta}{\mu^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C} \varphi^2(a).$$

Posons encore, plus simplement,

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad k^2 = \frac{1}{\mu^2 \sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C} \delta,$$

k^2 sera une nouvelle fonction symétrique des éléments du triangle, ayant le même signe que le déterminant δ et vérifiant, en vertu de (5) et de (6), la relation

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad [\varphi'(a)]^2 = 1 - k^2 \varphi^2(a).$$

Donc k ne dépend ni de b ni de c, et comme k est une fonction symétrique des éléments du triangle, k ne peut pas dépendre de a non plus; c'est donc nécessairement une constante pour tous les triangles.

L'équation (8) donne :

$$\frac{\varphi'(a)\, da}{\sqrt{1 - k^2 \varphi^2(a)}} = da.$$

On constate que, pour a suffisamment petit, $\varphi(a)$ croît avec a, donc $\varphi'(a)$ sera positif. Dans ces conditions, le radical doit être pris positivement, et en intégrant l'équation, il vient, puisque $\varphi(a)$ s'annule avec a,

$$\arcsin k\varphi(a) = ka,$$

$$(9) \quad \varphi(a) = \frac{\sin ka}{k},$$

$$(10) \quad \varphi'(a) = \cos ka.$$

Comparons les relations (9) et (10) aux relations (1) et (5); on trouve :

$$(11) \quad \frac{\sin ka}{\sin A} = \frac{\sin kb}{\sin B} = \frac{\sin kc}{\sin C} = k\mu,$$

$$(12) \quad \cos ka = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C},$$

relation qui en donne deux autres par une permutation circulaire.

Des formules (11) et (12) on déduit toutes les autres sans aucune difficulté.

7. La méthode que nous venons de suivre est d'une généralité remarquable; elle s'applique, sans aucun changement, à la résolution des triangles sphériques dans un système de géométrie quelconque. Seulement, dans ce cas, il reste à achever la détermination de k qui est possible.

Supposons pour cela que le triangle ABC soit tracé sur une sphère de rayon R. La longueur d'une circonférence décrite sur une sphère cesse de croître avec son rayon a (qui est ici un arc de grand cercle), quand a devient égal au quart de la circonférence, c'est-à-dire quand

$$a = \frac{1}{4}[2\pi\varphi(R)] = \frac{\pi}{2}\frac{\sin kR}{k}.$$

Pour cette valeur de a, on devra donc poser $\varphi'(a) = 0$, ou, par (10),

$$\cos ka = \cos\left(\frac{\pi}{2}\sin kR\right) = 0,$$

$$\sin kR = 1,$$

$$k = \frac{\pi}{2R}.$$

Telle est la valeur de k, quel que soit le système de géométrie. On a alors, par (9),

$$\varphi(a) = \frac{2R}{\pi}\sin\frac{a\pi}{2R},$$

$$\varphi(R) = \frac{2R}{\pi}, \qquad (13)$$

et les formules de résolution sont, a, b, c désignant les longueurs absolues des côtés sur la sphère de rayon R,

$$\frac{\sin\dfrac{a\pi}{2R}}{\sin A} = \frac{\sin\dfrac{b\pi}{2R}}{\sin B} = \frac{\sin\dfrac{c\pi}{2R}}{\sin C},$$

$$\cos\frac{a\pi}{2R} = \frac{\cos A + \cos B\cos C}{\sin B\sin C}, \ldots$$

Donc les formules de résolution des triangles sphériques sont les mêmes dans tous les systèmes de géométrie.

Les expressions $\frac{a\pi}{2R}, \frac{b\pi}{2R}, \frac{c\pi}{2R}$ sont les mesures des angles au centre de la sphère correspondant aux arcs a, b et c. En effet, la mesure de l'angle correspondant à un arc a de rayon R étant désignée par θ, doit vérifier la relation

$$a = \theta\varphi(R),$$

ou, par (13),

$$\theta = \frac{a}{\varphi(R)} = \frac{a\pi}{2R}\ (^*).$$

(*) Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1895, t. XIX, 2e partie, pp. 17-26.

IV

RAPPORT SUR LA NOTE PRÉCÉDENTE

PAR

M. DE TILLY,
Commandant de l'École militaire.

M. De Tilly donne lecture du rapport sur le mémoire intitulé : *Sur la géométrie non euclidienne*, par M. Ch.-J. de la Vallée Poussin.

« Le but de l'auteur est de donner une démonstration nouvelle de ce fait, qu'il ne peut exister plus de trois espèces de géométrie ayant en commun avec le système usuel, les notions de la droite et du plan.

» Cette démonstration est basée sur trois principes, postulats ou axiomes que l'on peut admettre en géométrie comme conséquences du principe de continuité largement entendu. Mais le premier de ces principes, d'après lequel les relations de la géométrie euclidienne sont vraies à la limite dans les figures dont toutes les dimensions tendent vers zéro, se réduit au fond, quant à l'application qui en est faite (et conformément à une remarque présentée par l'auteur lui-même dans une lettre qu'il m'a fait l'honneur de m'écrire), à admettre que la somme des angles d'un triangle tend vers deux droits, quand les côtés tendent vers zéro, ce qui est encore une conséquence directe du même principe de continuité. Il faut y ajouter toutefois l'existence d'une limite pour le rapport des côtés de l'angle droit à l'hypoténuse, dans un triangle rectangle évanouissant.

» La méthode suivie par M. de la Vallée Poussin est simple et ingénieuse ; elle est plus naturelle que celle que j'ai présentée dans la note IV de mon *Essai de géométrie analytique générale*.

» Je propose à la section de voter l'impression du mémoire et des remerciements à l'auteur. (*) »

(*) Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 1895, t. XIX, 1re partie pp. 45-46.

BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
TANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
SITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD
RIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
ORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
TANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY
NIVERSITY LIBRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
BRARIES · STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES · STANFORD

To avoid fine, this book should be returned on
or before the date last stamped below

30M-12-60-96455

STANFORD UNIVERSITY LIBRARY
Stanford, California

510.5
M429
v.14-15
1894-1895